

計算格子に斜交する衝撃波の鋸歯状化現象の解析

相曾 秀昭 (宇宙航空研究開発機構 航空技術部門 数値解析技術研究ユニット)

Analysis on effect of grid to the capturing of shock surfaces that are oblique to the axes of Cartesian grid for computation

by
Hideaki AISO(JAXA)

ABSTRACT

We are concerned with numerical computation of shocks whose surfaces are oblique to any axis of grid for computation, where the grid is a structured orthogonal grid. It is easily observed that the capturing of shock surface is affected by the grid and that the surface often looks jagged but not smooth, even if the shock surface should be planar or smooth from theory. The phenomenon is purely numerical and the machinery of phenomenon is not yet clear. While the setting of problem is rather simple, several different mathematical factors are complicatedly related even in the case of compressible Euler equations for ideal gases. Therefore we analyze a simplified problem, scalar conservation laws over two dimensional space. From the simplified analysis we still obtain some essential part of the numerical machinery, which may suggest a method to decrease the inconvenient effect of grid.

1. はじめに

流体现象の数値シミュレーションにおける格子生成では物体形状と流体现象に適合するように作成された格子を用いることが理想的であるが、そのような格子の作成には大きな時間コストや高度な経験的ノウハウが要求されることが通例である。そのため、流体现象の数値シミュレーションが広く用いられるようになるにつれ、生成が容易な直交格子の利用が増加している。

直交格子の利用については、格子が流体现象(流線や衝撃波など)に適合しないゆえの精度低下を格子生成の簡便さで節約されたコストをより細かい格子の利用などに振り向けて得られる精度向上と衡量し、場合に依りて判断していると考えられるが、数値計算法解析の観点からは精度低下のしくみについて定性的または定量的な解析を試みることも重要である。

本稿では、現象としては広く認知されながらも、その数値的な機構についてあまり省みられることのない格子に斜交する衝撃波面の数値的な挙動である衝撃波面の鋸歯状化について考察する。

圧縮性 Euler 方程式は非線形保存則の一つであるが、他の非線形保存則と同様に数値計算における衝撃波の捕獲は重要な課題の一つである。1次元空間での

衝撃波捕獲では、数値的振動と数値的鈍化をできるだけ抑制することが課題となったが、これは TVD スキーム¹などによりほぼ実現され、数値解では1個のみの内点(中間状態)²を以って衝撃波を捕獲できるようになった。しかし、空間の次元が2以上の場合、1次元では単なる点であった衝撃波面が、“(空間次元) - 1”の次元を有する曲線又は曲面となるため、衝撃波捕獲において数値的振動と数値的鈍化以外に衝撃波面の形状が問題となってくる。つまり、厳密解では曲線又は曲面である衝撃波面が一般には鈍化により厚みを有するため、数値的な衝撃波面を a. 中間状態をとる有限体積、及び b. 両側の有限体積がそれぞれ衝撃波両側の状態となっている有限体積境界、の和集合とするのが妥当と考えられる。(図1は空間2次元の例)

¹TVDは「全変動減少」の意味であるが、実際に全変動減少(厳密には全変動非増加)の性質が実現されているのは一般的にはスカラー保存則又は線形保存則の場合のみであり、圧縮性 Euler 方程式などに対する「TVD」スキームはスカラー保存則の TVD スキームの類推的拡張であることに注意する。

²厳密解では従属変数の値は衝撃波の一つの側の状態から他の側の状態へ非連続的に跳躍するが、有限体積法による数値計算では、衝撃波の位置が有限体積間の境界と一致しない限り、衝撃波両側の状態(従属変数の値)とは異なる状態を有する有限体積が出現する。これは数値的(厳密解には存在しない)にもかかわらず数値計算には出現する現象であり、これらの状態を衝撃波捕獲における内点もしくは中間状態という。

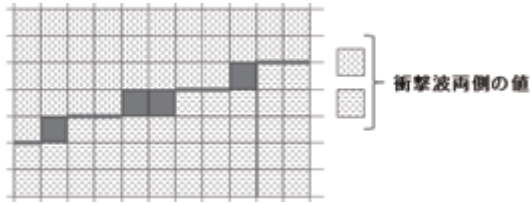


図 1: 塗りつぶしと太線の部分が数値的な衝撃波面

衝撃波面の形状への格子の影響は鈍化が大きい場合(図2)はそれほど目立たないが、鈍化が小さくなると顕著に認識され、数値的に捕獲された衝撃波面は鋸歯状または階段状といってよい形状となる。(図3) 理想的な数値解は各有限体積毎に厳密解を平均化したもの(図4)であると考えられるが、本稿での考察によれば、有限体積法ではこの理想的な数値解はほぼ実現不可能であろうと予想される。

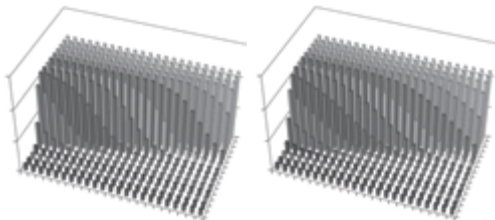


図 2: 鈍化の大きい衝撃波の数値解

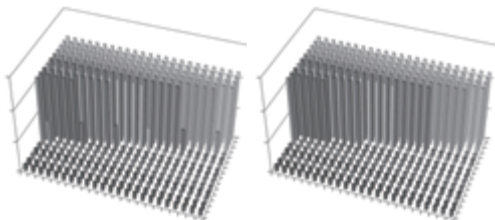


図 3: 衝撃波面が鋸歯状となった数値解

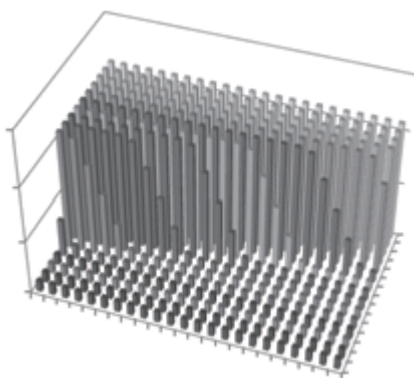


図 4: 理想的と考えられる衝撃波の数値解

この衝撃波面の鋸歯状の機構について、本稿では空間2次元スカラー保存則の数値計算をモデルとして

考察を進める。結論では、空間1次元の場合に内点が1個となる性質が2次元空間では鋸歯状をもたらす事が明らかになる。この事実は空間1次元での計算スキームの評価が空間多次元にそのままつながらずではないことを示唆している。

2. 2次元空間でのスカラー保存則初期値問題とその衝撃波解

先ず2次元空間上のスカラー保存則の初期値問題で衝撃波が x, y 両軸に斜交するものを設定する。

スカラー関数 $u = u(x, y, t), -\infty < x, y < \infty, 0 \leq t < \infty$, について次の初期値問題を考える。

$$u_t + \left(\frac{p}{2}u^2\right)_x + \left(\frac{q}{2}u^2\right)_y = 0, \quad -\infty < x, y < \infty, 0 < t < \infty$$

$$u(x, y, 0) = \begin{cases} u_L, px + qy < C \\ u_R, px + qy > C \end{cases} \quad (1)$$

ここで p, q は $p > q > 0$ なる互いに素な整数であり³、 C は実定数である。

$u_L > u_R$ であれば、この初期値問題の解は衝撃波を形成する。 s を1次元問題で流束関数が $\frac{1}{2}u^2$ であるときの衝撃波の伝播速度とすると、Rankine-Hugoniotの条件から

$$s = \frac{\frac{1}{2}(u_R)^2 - \frac{1}{2}(u_L)^2}{u_R - u_L} = \frac{u_L + u_R}{2}$$

であるが、問題(1)では、衝撃波は x, y -軸方向にそれぞれ ps, qs の速度で進行するため、次の解が得られる。

$$u(x, y, t) = \begin{cases} u_L, px + qy < C + s(p^2 + q^2)t \\ u_R, px + qy > C + s(p^2 + q^2)t \end{cases} \quad (2)$$

衝撃波面は $px + qy = C + s(p^2 + q^2)t$ であり、波面と垂直な方向(波面の法線ベクトルの方向)に $s\sqrt{p^2 + q^2}$ の速度で進む。

3. 保存型差分近似、Godunov 差分

本稿で用いる保存型差分近似について簡単に説明する。

空間格子は正方形である各有限体積

$$D_{i,j} = \left\{ (x, y) \mid \left(i - \frac{1}{2}\right) \Delta x < x < \left(i + \frac{1}{2}\right) \Delta x, \right. \\ \left. \left(j - \frac{1}{2}\right) \Delta y < y < \left(j + \frac{1}{2}\right) \Delta y \right\}$$

³ p, q の符号を限定したのは初期値が $u_L > u_R$ を満たす場合に衝撃波解を形成するためである。また互いに素な整数としたのは、後の部分の数値計算において循環境界条件を利用して有限の領域で数値計算を行いやすくするための仮定である。

で空間を分割する直交格子とする。時間増分 Δt は一定として $t = n\Delta t$ (時間進行 n 段目) の各 $D_{i,j}$ での u の計算値を $u_{i,j}^n$ と記す。

$t = n\Delta t$ から $t = (n+1)\Delta t$ への時間発展は陽的保存型差分近似を用いる。一般的な空間 2 次元の保存則

$$u_t + f(u)_x + g(u)_y = 0 \quad (3)$$

では、流束関数 f, g に対応する数値流束 \bar{f}, \bar{g} を適当に選べば陽的差分近似

$$\begin{aligned} u_{i,j}^{n+1} = & u_{i,j}^n \\ & - \frac{\Delta t}{\Delta x} \{ \bar{f}(u_{i,j}^n, u_{i+1,j}^n) - \bar{f}(u_{i-1,j}^n, u_{i,j}^n) \} \\ & - \frac{\Delta t}{\Delta y} \{ \bar{g}(u_{i,j}^n, u_{i,j+1}^n) - \bar{g}(u_{i,j-1}^n, u_{i,j}^n) \} \end{aligned} \quad (4)$$

を得るが、本稿の問題 (1) では

$$\begin{cases} f(u) = ph(u) \\ g(u) = qh(u), \end{cases} \quad h(u) = \frac{1}{2}u^2 \quad (5)$$

であるので、まず空間 1 次元スカラー保存則

$$u_t + h(u)_x = 0, \quad h(u) = \frac{1}{2}u^2 \quad (6)$$

の差分近似

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \{ \bar{h}(u_{i-1}^n, u_i^n) - \bar{h}(u_i^n, u_{i+1}^n) \} \quad (7)$$

を定め、その数値流束 $\bar{h}(u_-, u_+)$ から

$$\begin{cases} \bar{f}(u_-, u_+) = p\bar{h}(u_-, u_+) \\ \bar{g}(u_-, u_+) = q\bar{h}(u_-, u_+) \end{cases} \quad (8)$$

により \bar{f}, \bar{g} を定める。

陽的差分では安定性確保のために Δt は何らかの CFL 条件の制約を受ける。ここでは、

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} |f'| + \frac{\Delta t}{\Delta y} |g'| < 1 \quad (9)$$

を課す。

数値流束 \bar{h} は

$$\begin{aligned} \bar{h}(u_-, u_+) = & \frac{1}{2} \{ h(u_-) + h(u_+) \} \\ & - \frac{1}{2} a(u_-, u_+) (u_+ - u_-) \end{aligned} \quad (10)$$

のように数値粘性係数 $a(u_-, u_+)$ により記述でき、それにより \bar{h} が定まる。 $a(u_-, u_+)$ は u_-, u_+ の連続関数と仮定する。

$$a(u_-, u_+) = \begin{cases} \left| \frac{h(u_+) - h(u_-)}{u_+ - u_-} \right|, & u_- \neq u_+ \\ |h'(u_-)|, & u_- = u_+ \end{cases} \quad (11)$$

であれば、Murmman-Roe スキーム [4, 5, 6] であり、

$$a(u_-, u_+) = \begin{cases} \max_{(s-u_-)(s-u_+) \leq 0} \left| \frac{h(u_-) + h(u_+) - 2h(s)}{u_+ - u_-} \right|, & u_- \neq u_+ \\ |h'(u_-)|, & u_- = u_+ \end{cases} \quad (12)$$

であれば、Godunov スキーム [2] である。

Godunov と Murmman-Roe の数値流束に違いが生じるのは u_-, u_+ の作る Riemann 問題の厳密解が音速点 (特性速度が 0 となる u の値) を含む膨張波となる場合のみであり、それ以外の場合ではこの 2 つは同じものになる。[3] そのため、本稿の議論の範囲では Godunov、Murmman-Roe どちらでも同じことになる。

4. 数値計算の実行

差分近似により初期値問題 (1) の数値解を計算し、計算格子に斜交する衝撃波の数値解の挙動を観察してゆく。

格子については簡単のため $\Delta x, \Delta y = 1$ とし、時間増分 Δt については安定性のために CFL 条件の制約が課される。

数値計算の実行では計算領域の有限化が必須だが、ここでは次のようにする。

(1) 計算領域は

$$x_{\min} \leq x \leq x_{\max}, y_{\min} \leq y \leq y_{\max} \quad (13)$$

の形の長方形領域とする。 x 軸方向は十分に大きくとり、 y 軸方向には p 個の有限体積をとり $y_{\max} - y_{\min} = p$ とする。領域内の各有限体積は $D_{i,j}, 1 \leq i \leq M_x, 1 \leq j \leq p$ と番号付けしておく。 $(M_x = x_{\max} - x_{\min}, p = y_{\max} - y_{\min})$

(2) x 軸方向の両端の境界 $x = x_{\min}$ 及び $x = x_{\max}$ では、 $u = u_L$ または $u = u_R$ による流入流出条件を課す。

(3) y 軸方向の両端 $y = y_{\min}$ 及び $y = y_{\max}$ では基本的には循環境界条件とする。ただし、衝撃波面に適合させるため両端を同一視する際に x 軸方向のシフトを組み入れる。即ち、境界 $y = y_{\max}$ 上の点 (x, y_{\max}) と境界 $y = y_{\min}$ 上の点 $(x+q, y_{\min})$ を同一視する。同一視する相手の点が存在しない部分、即ち

$$x_{\min} < x < x_{\min} + q, y = y_{\min}$$

と

$$x_{\max} - q < x < x_{\max}, y = y_{\max}$$

では(2)と同様に $u = u_L$ または $u = u_R$ による流入流出条件とする。(図5)

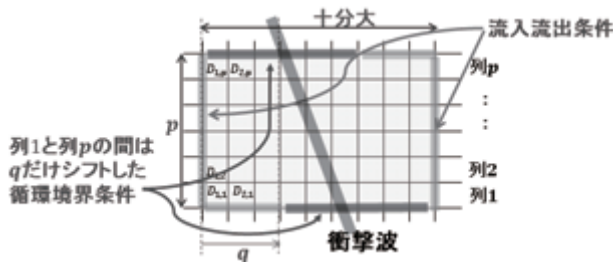


図 5: 実際の数値計算での境界条件

数値計算のための初期値の設定は、各有限体積 $D_{i,j}$ について、次のように定める。

- (1) $D_{i,j}$ の内部の全ての点が $px + qy < C$ を満たせば、 $u_{i,j} = u_L$ とする。
- (2) $D_{i,j}$ の内部の全ての点が $px + qy > C$ を満たせば、 $u_{i,j} = u_R$ とする。
- (3) 上の2つ以外の場合は、 $D_{i,j}$ 内で $px + qy < C$ を満たす部分の面積と $px + qy > C$ を満たす部分の面積の比により、 u_L と u_R の加重平均をとり、その値を $u_{i,j}$ とする。

衝撃波捕獲の様子議論は、初期から十分な離散時間発展回数を経て(つまり n が十分大きくなって)数値解が“安定”し時間的に定常になった段階で行う。本稿では衝撃波が静止(つまり $s = 0$)している場合を考えるので、差分近似(11)による離散時間発展を十分な回数繰り返せば数値解が定常で変化のない状態に至ることが期待される⁴。その定常数値解の衝撃波捕獲の様子を観察・議論する。

離散時間発展の繰返しによる定常解への収束について理論的な証明は与えられない⁵が、スカラー保存則における衝撃波捕獲では数値的に生じる中間状態(衝撃波両側の値 u_L, u_R ではない値で厳密解には存在しないが数値計算では出現する値)に対する自由度の制約⁶がないことから、自然な仮定としてよいと思われる。

5. 静止衝撃波の数値解の挙動

衝撃波と格子の位置関係を徐々に変化させていくときの静止衝撃波の数値解の変化を観察する。本稿の興味は数値解における衝撃波面の捕獲であるから、衝撃

⁴実際の数値計算では丸め誤差程度の変化のみの状態になれば定常状態と解釈する。

⁵特定の差分近似については縮小写像の方法で証明が可能

⁶Euler 方程式の様な系の場合には、変数が複数個であっても中間状態の自由度は変数の個数分はない為に状況が異なってくる。

波面の位置の変化に応じての数値的衝撃波面(図1)の様相の変化、特に内点となる有限体積の位置・分布とその移動に注目して観察する。いくつかの p, q の値の例での結果を示す。ここで白と灰色は衝撃波の両側のそれぞれの値をとっている有限体積であり、斜線が内点を取る有限体積を表す。衝撃波の位置が徐々に右上に変化する(C が徐々に増加する)ときの様相の変化を左から右に並べている。

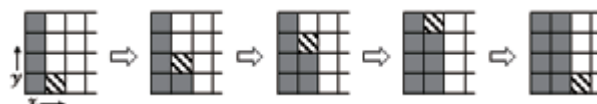


図 6: $p = 4, q = 1$ の場合

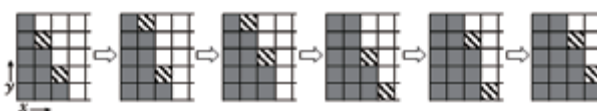


図 7: $p = 5, q = 2$ の場合

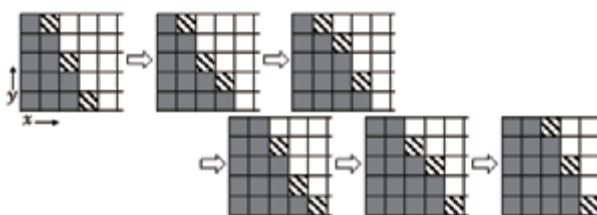


図 8: $p = 5, q = 3$ の場合

示された図はいずれも衝撃波が x - 軸方向に有限体積 q 個分移動する際のパターンの変化を表しており、それぞれの場合の数値解での衝撃波進行パターンの1周期分と言えるものである。その他の p, q の値の場合も観察することで、数値解における衝撃波面の捕獲について次の主張を得る。

主張 1 内点をとる有限体積は互いに隣接しない。ここで2つの有限体積が隣接するとは、1つの有限体積境界の両側にあることをいう。

主張 2 内点をとる有限体積は、 x, y のどちらの軸の方向で見ても、衝撃波両側それぞれの値をとる有限体積に挟まれている。ただし、 y - 軸方向の場合は、シフト付循環境界条件を考慮し、 $D_{i,p}$ と $D_{i+q,1}$ が隣接すると解釈する。

主張 3 衝撃波が徐々に移動するに従い、内点をとる有限体積は順次 y - 軸方向に移動する。ただし、端の $D_{i,p}$ から移動する先はシフト付の循環境界条件により $D_{i+q,1}$ となる。

主張 4 各 i について、内点をとる有限体積は $D_{i,1}$ から $D_{i,p}$ までの p 個の有限体積のうち高々 1 個である。また計算領域全体では高々 q 個である。

これらの主張をまとめると、主張 1,2 については下の定理 1 として記述し、主張 3,4 はその定理の系として理解するのが適当であると考えられる⁷。また、Godunov スキーム、Murmman-Roe スキームは 1 次元の静止衝撃波の数値解における内点の個数が高々 1 個である TVD スキームという形に一般化される。更に、流束関数 $h(u)$ は $\frac{1}{2}u^2$ に限らず $h''(u) > 0$ である関数としても定理は成立する。

定理 1 空間 2 次元のスカラー保存則初期値問題 (1) において $u_L + u_R = 0, u_L > u_R$ とし、その静止衝撃波解

$$u = \begin{cases} u_L, & px + qr < C \\ u_R, & px + qr > C \end{cases} \quad (14)$$

の有限体積近似を格子軸が x, y - 各軸に平行する直交格子を以って行う。まず、空間 1 次元スカラー保存則 (6) の有限体積近似のスキーム (7) について、数値粘性係数 $a(u_-, u_+)$ がいわゆる TVD 条件

$$\left| \frac{f(u_+) - f(u_-)}{u_+ - u_-} \right| \leq a(u_-, u_+) \leq C \quad (15)$$

($u_- = u_+$ の場合、最左辺は $|f'(u_+)|$ と解釈する。また C は格子の空間増分と時間増分から定まる定数) を満たし、衝撃波両側の値が u_L, u_R である静止衝撃波について

- (i) 時間的定常、かつ
- (ii) 内点となる有限体積が高々 1 個

であるような近似解を得られるような任意のスキームとする。次に、この空間 1 次元のスキームから (4),(8) により空間 2 次元のスキーム (1) を定め、これによる近似解で時間的定常であるものが得られたとする。また、近似解の初期値 (初期データ) $\{u_{i,j}^0\}$ は、その全ての値が $[u_R, u_L]$ に属し、 x, y の各軸方向には単調非増加であるとする。

このように得られる静止衝撃波解 (14) の時間定常近似解について、次が成立する。

- (1) 内点となる有限体積が共通の有限体積境界を挟んで隣接することはない。
- (2) 内点となる有限体積は、 x, y のどちらの軸方向で見ても衝撃波両側のそれぞれの値 u_L, u_R をとる有限体積により挟まれる。

⁷主張 1,2 をまとめる定理は直交格子に斜交する衝撃波面を有する静止衝撃波の数値解として一般的なものだが、主張 3,4 においては $p > q$ なる仮定が必要なことに注意する。

定理の証明の概略を述べる。証明は、静止衝撃波の定常近似解で内点になる有限体積が高々 1 個であることの条件の考察と、最大最小原理を組み合わせることにより得られる。

まず、1 次元問題 (6) の数値計算で考える。定常近似解であれば全ての数値流束が等しくその値は $\bar{h}(u_L, u_L) = h(u_L) = \bar{h}(u_R, u_R) = h(u_R)$ である。静止衝撃波なので Rankin-Hugoniot 条件から $h(u_L) = h(u_R)$ でもある事にも注意する。

内点になる有限体積が 2 つ以上存在しないというのは、 $\bar{h}(v, w) = h(u_L) = h(u_R)$, $v, w \in (u_R, u_L)$ となる v, w が存在しないということである。 $u_R < v < u_L$ ならば $\bar{h}(v, v) = h(v) < h(u_L) = h(u_R)$ となることと h の連続性から

$$\bar{h}(v, w) < h(u_L) = h(u_R), \quad v, w \in (u_R, u_L) \quad (16)$$

及び

$$\bar{h}(v, w) \leq h(u_L) = h(u_R), \quad v, w \in [u_R, u_L] \quad (17)$$

を得る。

また、

$$\begin{aligned} \bar{h}(v, w) &= h(w) + \frac{1}{2} \left(a(v, w) + \frac{h(w) - h(v)}{w - v} \right) (v - w) \\ \bar{h}(v, w) &= h(v) + \frac{1}{2} \left(a(v, w) - \frac{h(w) - h(v)}{w - v} \right) (v - w) \end{aligned}$$

なので、(15) から

$$\bar{h}(v, w) \geq h(v), h(w), \quad v > w \quad (18)$$

であり、特に、 $v = u_L$ または $w = u_R$ の場合は $\bar{h}(v, w) \geq h(u_L) = h(u_R)$ となる。これと (17) から、

$$\bar{h}(u_L, v) = \bar{h}(v, u_R) = h(u_L) = h(u_R), \quad v \in [u_R, u_L] \quad (19)$$

次に 2 次元問題の静止衝撃波の定常数値解 $\{u_{i,j}\}$ を考える。

- 各 j について、 i が十分大ならば $u_{i,j} = u_R$ 、 i が十分小ならば $u_{i,j} = u_L$
- 各 i について、 j が十分大ならば $u_{i,j} = u_R$ 、 j が十分小ならば $u_{i,j} = u_L$

であるから、有限体積 $D_{i,j}$ の中に内点になるものがあれば、それらから $u_R < u_{\alpha,\beta} < u_L, u_{\alpha+1,\beta} = u_{\alpha,\beta+1} = u_R$ となる $D_{\alpha,\beta}$ がとれる。数値解が定常なので有限体積 $D_{\alpha,\beta}$ での数値流束の収支

$$\begin{aligned} & [\bar{f}(u_{\alpha,\beta}, u_{\alpha+1,\beta}) - \bar{f}(u_{\alpha-1,\beta}, u_{\alpha,\beta}) \\ & + \bar{g}(u_{\alpha,\beta}, u_{\alpha,\beta+1}) - \bar{g}(u_{\alpha,\beta-1}, u_{\alpha,\beta})] \\ & = p \{ \bar{h}(u_{\alpha,\beta}, u_{\alpha+1,\beta}) - \bar{h}(u_{\alpha-1,\beta}, u_{\alpha,\beta}) \} \\ & + q \{ \bar{h}(u_{\alpha,\beta}, u_{\alpha,\beta+1}) - \bar{h}(u_{\alpha,\beta-1}, u_{\alpha,\beta}) \} \end{aligned}$$

は0であるから、(19)を適用して

$$p\{h(u_R) - \bar{h}(u_{\alpha-1,\beta}, u_{\alpha,\beta})\} + q\{h(u_L) - \bar{h}(u_{\alpha,\beta-1}, u_{\alpha,\beta})\} = 0 \quad (20)$$

を得るが、これが成立するためには(16),(17)から

$$\bar{h}(u_{\alpha-1,\beta}, u_{\alpha,\beta}) = \bar{h}(u_{\alpha,\beta-1}, u_{\alpha,\beta}) = h(u_R) = h(u_L)$$

でなければならない。

この議論を帰納的に適用すると、全ての x - 軸方向の流束 $\bar{f}(u_{i,j}, u_{i+1,j})$ は $f(u_L) = f(u_R)$ に等しく、同様に全ての y - 軸方向の流束 $\bar{f}(u_{i,j}, u_{i,j+1})$ は $g(u_L) = g(u_R)$ に等しい。

もしも内点となる有限体積が隣接すれば、それらの有限体積間の境界における数値流束は(16)により $f(u_L) = f(u_R)$ または $g(u_L) = g(u_R)$ より小となり矛盾が生じる。よって有限体積の隣接は起こらない。また、 $u_R < u_{\alpha,\beta} < u_L$ ならば $u_{\alpha+1,\beta} = u_{\alpha,\beta+1} = u_R$ 及び $u_{\alpha-1,\beta} = u_{\alpha,\beta-1} = u_L$ が上記の議論の帰結として得られる。

以上、証明の概略である。

6. まとめ

定理1の意味を考察する。1次元の静止衝撃波を1個の内点で数値的に捕獲する差分近似を2次元に拡張した場合、定理は図1の中央部にあるような内点になる有限体積の隣接を否定する。これが、数値解での衝撃波面の捕獲が鋸歯状(階段状)になる原因である。逆に1次元の静止衝撃波の数値計算で既に鈍化が生じるようなものであれば、2次元の静止衝撃波の数値計算でこのような現象は顕著には起こらないといえる。

このような数値解での衝撃波の鋸歯状化を避けるために、粘性を付加するという修正法が従来から知られているが、かなりの粘性を付加しないと効果が現れない場合もある。数値解の鈍化による鋸歯状化低減機構の本質は、粘性というよりも1次元の静止衝撃波を近似する際の内点の個数であり、粘性を付加してもあまり効果がないのは内点の個数が1個のままで増加しない場合である。実際、1次元の静止衝撃波の数値解の内点の個数が通常2個である Engquist-Osher[1] のスキームを用いると、 p, q の全ての値で鋸歯状化が目立たないようにする。

本考察は、1次元計算での計算法の利点が2次元以上の計算においては欠点となることも有り得る例を示したものとしても興味深い。格子と現象(厳密解)の間の方向性のずれの問題など、2次元以上に特有の問題の考察への端緒でもありと考えられる。本考察をより一般化した圧縮性 Euler 方程式などの系の場合に拡張し

て証明を与えることには相当の困難が予想される。しかし、1次元の静止衝撃波の数値解の内点の個数を増やすことで2次元以上の静止衝撃波の数値解の鋸歯状化を抑制するという方法は実際の計算において適用可能であると考えられる。

参考文献

- [1] B. Engquist and S. Osher. Stable and entropy satisfying approximations for transonic flow calculations. *Math. Comp.*, Vol. 34, pp. 45-75, 1980.
- [2] S. K. Godunov. Finite difference method for numerical computation of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics (in Russian). *Mat. Sb. (N.S.)*, Vol. 47, pp. 251-306, 1959.
- [3] B. van Leer. On the relation between the upwind-differencing schemes of Godunov, Engquist-Osher and Roe. *SIAM J. Sci. Statist. Comput.*, Vol. 15, No. 1, pp. 1-20, March 1984.
- [4] E. M. Murmann. Analysis of embedded shock waves calculated by relaxation methods. *AIAA J.*, Vol. 12, pp. 626-633, 1974.
- [5] P. L. Roe. Approximate Riemann solvers, parameter vectors and difference schemes. *J. Comput. Phys.*, Vol. 43, pp. 357-372, 1981.
- [6] P. L. Roe. The use of Riemann Problem in finite difference schemes. In *Lecture Notes in Physics*, 141, Vol. 141, pp. 354-559. Springer-Verlag, New York, 1981.