

流体力学とマルチフラクタル

細川 巖*

Fluid Dynamics and Multifractals

Iwao HOSOKAWA

University of Electro-Communications

ABSTRACT

How the concept of multifractals has been applied to fluid dynamics is described. Particularly the multifractal nature of the dissipation field of isotropic turbulence is explained together with the deep implication of intermittency exponents, which embody a stochastic multifractal in themselves.

Key Words : multifractal, stochastic multifractal, isotropic turbulence, dissipation, intermittency exponents

1. フラクタル次元とは

先ず手始めに用語の解説から入る。単位立方体を辺 r の小立方体に分割して r を無限に小さくして行ったとき、 r^{-D} の小立方体が或る性質を持ち続けると、その性質の空間分布は D 次元であるという¹⁾。これがユークリッド次元の自然の拡張になっていることはよく知られている。

もう少し進んで、 q 次Hausdorff次元を説明しよう。 r_i の大きさのdisjoint cellで空間を覆ったとき、cellの中の測度が p_i として

$$\lim_{\max(r_i) \rightarrow 0} \left[\sum_i p_i^q r_i^{-\tau(q)} \right] \rightarrow \text{finite} \quad (1)$$

であるならば、この $\tau(q) = (q-1)D(q)$ において、 $D(q)$ をHausdorffの一般次元 $D(q)$ という。上に述べた D は、この場合の $D(0)$ と思えばよい。[]は状態和と呼ばれ、統計力学の状態和のアナロジーである。 Σ' は $p_i=0$ の項は除いた和であることを示し、 $q < 0$ でも意味をもつようにしてある。特に $r_i \equiv r$ として定義されたものがHentschel-Proccacia²⁾の一般次元 $D(q)$ と呼ばれ、これは前考の $D(q)$ に等しいか又はより大きいことが分ってい

る。このとき、(1)は

$$\Sigma' p_i^q \sim r^{q-1-Dq} \quad (r \rightarrow 0) \quad (2)$$

と書かれる。

この $D(q)$ はかなり抽象的な印象を与えるが、すべてのマルチフラクタル測度をもたなければならない基本量である。ではマルチフラクタル測度とは何かというと、次のような自己相似性をもった測度を考えればよい。測度となる物理量 p が(cellの大きさを $0 < r < 1$ としたとき) r^α のようなスケール変化をし、 d 次元空間での α を支える集合が $f(\alpha)$ (フラクタル)次元のフラクタルを構成するようなものである。したがって α の空間分布確率は大体 $r^{d-f(\alpha)}$ となる。 d 次元空間には異なる α の集合が入り交って分布するので極めて複雑な様相を呈するが、これが $f(\alpha)$ という単一関数によってその統計的構造を記述されるということは一寸驚異的である。

Hentschel-Proccaciaの $D(q)$ と $f(\alpha)$ は、Legendre変換によって一意的に関連づけられる³⁾。(2)式の右辺を上記の確率を使って表現し、計算の結果

* 電気通信大学

$$\alpha(q) = d \, dq \tau(q), \quad f(\alpha) = \alpha(q) \, q^{-\tau(q)} \quad (3)$$

が得られる。従って $D(q)$ と $f(\alpha)$ は等価の基本量である。

$D(q)$ は単調非増加であること², $\tau(q)$ は *non-concave* であること¹ などは、現在知られている普遍的な性質である。後者から、 f の *non-concavity* がいえる。

最小限この程度のマルチフラクタルの概念を前提として、流体力学の方に話を移したい。

2. 相空間内のStrange Attractor

流体が遷移を起し、乱れ始めるとき、小数自由度のカオスが生ずる場合がある。*Lorentz*⁵ が示したいわゆる *Lorentz model* 中のカオス発見以来、この方面の研究はいろいろと行われて来た。

列挙すると、

Rayleigh-Benard Flow (Jensen et al.⁶)

Taylor-Couette Flow

Duct Flow Heated from Below (Kojumi et al.⁷)

Curved Duct Flow

などなどである。いずれも乱れた温度場又は速度場の局所観測時系列より、有限次元の相空間に埋め込みの作業を行い、その相空間内で *strange attractor* の分布状況を調べようというものである。*Jensen et al.* の実験は⁶, *strange attractor* の相空間内の密度から $f(\alpha)$ を実際に算出している点で、異色の点である。

流れが複雑になると励起された自由度が増加するので、十分な情報量を時系列から得ることは困難になる。現在では、たかだか10次元以下の埋め込み相空間でのリアプノフ指数のスペクトルを計算し、 $D(1)$ に相当するカプラン・ヨーク次元を推定するのがこの方面の主要な技術となっている⁷。とも角、これらの研究によって、カオスを示す *strange attractor* の相空間内密度が自己相似性を持ちマルチフラクタルを形成することは確立されたといつてよい。

とすれば、発達した乱流が高次元カオスを構成し、そこにマルチフラクタルの *strange attractor* が存在することは疑いが無いが、残念ながらこれを正確に捕えた研究はまだない。然し、*Keefe, Moin & Kim*⁸ の研究は2次元 *Poiseuille Flow* の乱流を取り扱ってリアプノフ指数のスペクトルを算出し、今の所最も興味のあるものの一つである。

3. 乱流エネルギーの散逸の空間分布

最近、発達した3次元等方性乱流のエネルギー散逸量を

測度とすると、これが3次元空間内のマルチフラクタルを近似的に構成することが、実験⁹ 及び *direct numerical simulation (DNS)*¹⁰ によって判明した。このことの力学的根拠としては、*Frisch & Parisi*¹¹ のいう、オイラー方程式における自己相似解の存在が有力である。これは、粘性に関係のない、そして境界の影響を殆ど受けないスケール、いわゆる慣性領域での流れの速度差 v_r のスケール則、 $v_r \sim r^{\alpha}$ を保証し、更に *Kolmogorov* の第2仮説 (1962)¹² によりスケール r での散逸率 ($\epsilon_r \sim v_r^3 / r$) のスケール則、 $\epsilon_r \sim r^{-1}$ を保証するのである。

第1図にこの場合の $D(q)$ を示す。点線の p モデルは *Meneveau & Sreenivasan*⁹ の実験に最もよく合うように調整された2項コントロール集合モデルである。但し、この実験は速度場の固定点における時系列の解析であるから、3次元乱流の1次元カットの構造を見ていることに注意したい。これに比べて、サークルは減衰乱流の3次元 *DNS*¹⁰ で得られたものである。これに対応する $f(\alpha)$ を第2図に示す。 ϵ_r はスケール r の小さい体積の中での平均散逸量であるから、そこでの測度となるべき散逸量は $\epsilon_r r^d \sim r^{\alpha-1-d} \sim r^{\alpha}$ となり、第1節に導入したのはこの α_1 であるので、混同を避けてほしい。最近ロス・アラモスで行われた強制乱流の3次元 *DNS* (512³ の格子を使用) でも、ほぼ同様の (レイノルズ数によらない) 結果が得られている。従って、乱流の形成のされ方の如何に拘らず、等方性乱流の散逸を測度とするマルチフラクタル構造は普遍的であると考えられる。

4. 負のフラクタル次元 ($f < 0$) の存在

第2図では、サークルは僅かに $f < 0$ の部分の存在を示すが、これは誤差の程度と思われる。何故なら、この $f(\alpha)$ は (2) 式で示される状態和の関係から $D(q)$ を求め、その *Legendre* 変換として計算されており、状態和の中に存在する測度 p_i の最も稀薄な項は少なくとも1項は存在する筈で、それは空間の中の1点として存在する以上ここで $f=0$ の集合が現れるだけで、それ以下のことは起りようがないからである。

状態和から出発すれば、従って、負のフラクタル次元は容認しがたい。然し、状態和を1つに限定せず、そのアンサンブルを考えたらどうだろう。こうすると、たとえばアンサンブルにおける p_i の最大値又は最小値はサンプル状態和の中に存在したりしなかったりするであろう。従って、最も稀薄な項は状態和の中に確率的に存在することになり、空間の中の最小次元0では表せない状況が発生する。この状況を $f < 0$ によって定量的に解釈しようというのが、*Mandelbrot*¹³ の発想である。実際彼は、*lognormal model* の $f < 0$ に無限に続く曲線をこのように考えているよ

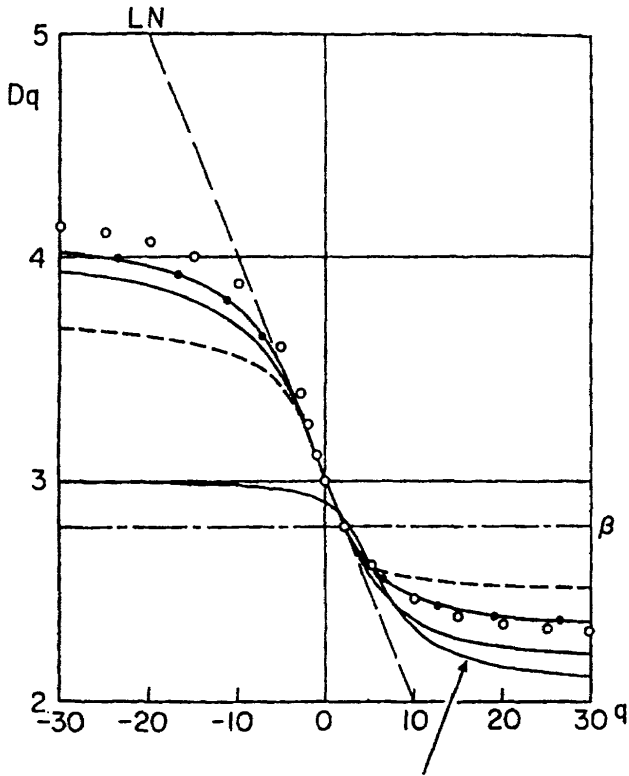


図1 Generalized dimensions for the 3D dissipation field of isotropic turbulence. Open circles denote a direct numerical simulation¹⁰; the plain solid line denotes the binomial generalized Cantor set model proposed by the author¹⁵; the solid line with solid circles denotes a modified version of that model^{15'}; the dashed line denotes the 3D version of the p model⁹; the long-dashed line denotes the lognormal model¹²; the long-dashed-short dashed line denotes the β model¹⁶; and the solid line pointed by an arrow denotes the random β model¹⁷. (I. Hosokawa: J. Phys. Soc. Jpn. 62 (1993) 3347より転載.)

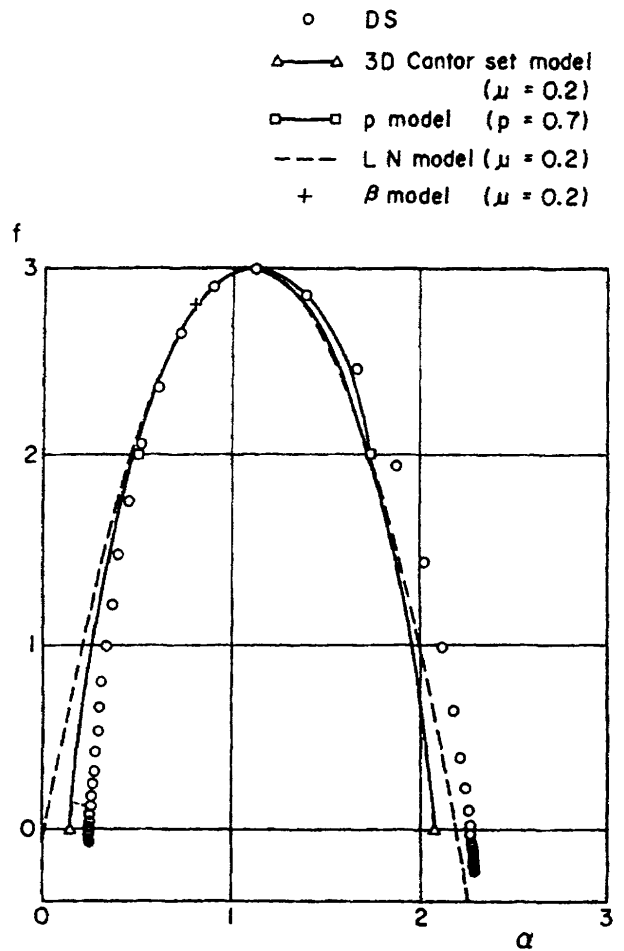


図2 $f(\alpha)$ spectra of dissipation field in isotropic turbulence obtained using various models (LN means lognormal) and DNS of decaying isotropic turbulence at the fully-developed state¹⁰. (I. Hosokawa: J. Phys. Soc. Jpn. 62 (1993) 2204より転載.)

うである。 $f < 0$ の領域をもつマルチフラクタルは、彼によって *stochastic multifractal* と命名された。

こうなると、状態和よりももっと柔軟な概念によってマルチフラクタルを構成したいものである。次にその方法を示す。

5. Intermittency exponentsの導入

流体力学の乱流理論には *intermittency exponents* $\mu(q)$ の概念がある。これが実は *stochastic multifractal* を扱うのに最も適していることを示そう。Novikov¹¹ は、 ϵ_r について

$$\langle (\epsilon_r / \epsilon_l)^q \rangle = (r/l)^{-\mu(q)} \quad (4)$$

のような関係が存在するとき、その散逸は *scale-similar* と定義した。但しく $\langle \rangle$ はアンサンブル平均であり、 $r \leq l$

でスケール r の小体積は常にスケール l の小体積の中に含まなければならない。 $\mu(q)$ は *intermittency exponents* と呼ばれるが、ここではすべてのサンプルを重合するアンサンブルを考えているので、前節に述べた問題は消化されている。

特に $l=L$ と固定し、 $p_r = \epsilon_r L^d / (\epsilon_l L^d)$ とし、スケール L の体積の中で状態和 (2) を作り、この空間平均をアンサンブル平均と等しいとおくと、

$$\mu(q) = -(q-1)(D(q) - d) \quad (5)$$

の関係が導かれる。従って一般に $\mu(q)$ が与えられると、これに対応する広義の $D(q)$ は分り、それから *Legendre* 変換 (3) によって $f(\alpha)$ が求められる。この $f(\alpha)$ は負の領域をもってもよい。ここで (4) 式の中の $(\epsilon_r / \epsilon_l)^q$ は、 $\epsilon_r / \epsilon_l = 0$ のときは常に $(\epsilon_r / \epsilon_l)^q \equiv 0$ と置く必要があることを注意する。それは、状態和 Σ' の定義に合わせ、 $q < 0$ の場合にも意味を与えるためである。

(5) によって、第1節で述べた $\tau(q)$ の *non-concavity*

は $\mu(q)$ の *non-convexity* で置きかえられる。(4) 式は $\mu(q)$ の一般型を与えるのに極めて見通しがよい。今 $\varepsilon_i = y$ とおき、 $r^{-1} = A^{-1}$ と固定すると

$$\mu(q) = \log_A \left[\int_0^{A^d} y^q p(y; A^{-1}) dy \right] \quad (6)$$

が得られる。 p は y の確率分布で一般に r^{-1} に依存する。 A^d が上限になるのは、自明の関係： $\varepsilon_i r^d \leq \varepsilon_i r^d$ による。実際 (6) の右辺が積分可能なら、その範囲間において $\mu(q)$ の *non-convexity* が成立することは直接に証明できる。従って (4) は $\mu(q)$ の可能なすべての形を支えている¹⁵。

2項コントロール集合モデルの一般型は

$$p(y; A^{-1}) = v_1 \delta(y-B) + v_2 \delta(y-C) \quad (7)$$

となる。先に述べた *Meneveau & Sreenivasan* のいわゆる p モデルは $A=2, B=1.4, C=0.6, v_1=v_2=1/2$ の場合である。(7) 式は、*Novikov* モデル¹⁴、 β モデル¹⁶、*random- β* モデル¹⁷、そして著者が *3D DNS* に合うように設定した *3D 2項コントロール集合モデル*¹⁵ もこの中に入る。この最後のモデルは、*lognormal model*¹² と同様に唯一のパラメータとして $\mu \equiv \mu(2)$ を含む。即ち、 $A=2^{1/3}, B, C=1 \pm (2^{1/3}-1)^{1/2}, v_1=v_2=1/2$ 。

(6) 式の中の $p(y; A^{-1})$ はいかなる確率密度関数でもよく、一般にそれから計算される $f(\alpha)$ は、*lognormal model* のように無限に延びる負の部分をもつ筈である。 $f(\alpha)$ の両端の長い尻尾を有限に断ち切るためには、(7) のようなデルタ関数が存在しなければならないことが証明できる。¹⁵ *3D 2項コントロール集合モデル* では、尻尾の端が $f=0$ になるようにしてある。

一般に $p(y; A^{-1})$ が分っていれば、任意の r^{-1} に対して $p(y; r^{-1})$ も計算できる。 $y = (r^{-1})^{\alpha_1}$ とし、 α_1 の対応する確率密度関数 $p_1(\alpha_1; r^{-1})$ を調べると、

$r^{-1} \rightarrow 0$ の漸近表現として

$$p_1(\alpha_1; r^{-1}) = \left[\frac{|f''(\alpha_1)| |n(r^{-1})|}{2\pi} \right]^{1/2} (r^{-1})^{d-1-\alpha_1} \quad (8)$$

が得られる。これが分ったのは比較的最近のことである。¹⁸ 第1節で α の空間分布確率は大体 $r^{-d-f\alpha}$ であると述べたが、(8) 式はこのことと矛盾しない。

第3図に、いろいろなモデルと実験及び *DNS* から得られた $\mu(q)$ ($q \geq 0$ の部分のみ) を示す。実線が *3D 2項コントロール集合モデル* であり、 $q=6$ までの *Anselmet et al.*¹⁹ の実験値によく一致している。*DNS* にもっとよく合うコントロール集合は作れるけれども、パラメータを増加して更に複雑なモデルを考えるには、*DNS* のサークルはまだ決

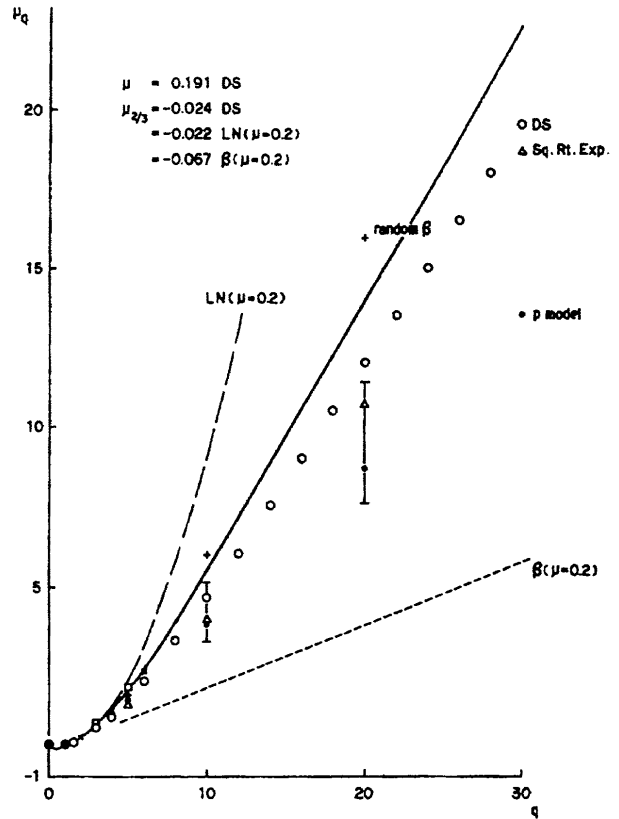


図3 $q \geq 0$ に対する間欠指数 μ 。—— LNモデル、----- β モデル、○DS、+random β モデル、● p モデル、△SREモデル、×Anselmet *et al.* の実験、□Antonia *et al.* の実験、—— Meneveau & Sreenivasan の実験、—— 3D2項コントロール集合モデル。(日本物理学会誌46巻(1991)116より加筆の上転載)

定的な結果とはいえない。

この節の結論として、歴史的にマルチフラクタルとは、無関係に作られた乱流理論の $\mu(q)$ が、実は *stochastic multifractal* の基本量になっているという興味ある事実を指摘しておきたい。

6. マルチフラクタルのシミュレーション²⁰⁾

$p(y; 1/2)$ が分っていると、測度の2分割カスケードを繰り返すことによってマルチフラクタルを発生させることができる。3次元乱流散逸の場合は極めて簡単である。(7) 式より

$$p(y; 1/2) = 2^{-3} \sum_{\alpha=0,1,2} C_\alpha \delta(y - B^{3-\alpha} C^\alpha) \quad (9)$$

が得られ²¹⁾、この確率に従って発生する乱数 y_1, y_2, \dots より

$$\varepsilon_{L/2} = \varepsilon_L \cdot y_1 \cdot y_2 \cdots y_n \quad (10)$$

の3次元の場を構成すればよい。

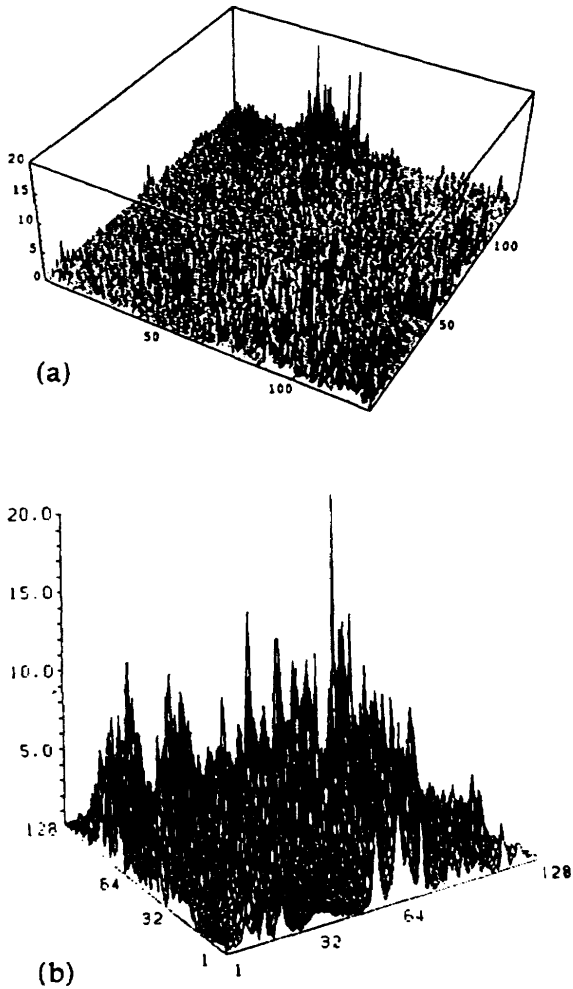


図4 Normalized dissipation fields in a 2D cut in isotropic turbulence obtained (a) by the 3D binomial Cantor set model¹⁵⁾ and (b) by the DNS on a 128³ grid¹⁰⁾. (I. Hosokawa: J. Phys. Soc. Jpn. 62 (1993) 2204より転載.)

第4図 (a) にそのような場の成る2次元断面での $\epsilon_{L/2} / \epsilon_L$ を示した。同図 (b) にDNS¹⁰⁾の対応する $\epsilon_{L/128} / \epsilon_L$ のデータを示す。後者から実際の乱流の散逸場がかなりのintermittencyをもつことが分かるが、マルチフラクタルのシミュレーションとのマイクロな相似はこの程度のものである。鳥瞰図の作り方と縦軸のスケールが違うので、比べるときにはこの点を考慮しなければならない。

3次元散逸場の鳥瞰図は作れないので、 $\epsilon_{L/128} / \epsilon_L \geq 0.76$ の3次元領域のコントロールを第5図に示す。(a) がマルチフラクタル、(b) がDNSで得られたものである。スポンジ状に拡がっている状況が両者に共通である。上の閾値を大きくすると、コントロールは収縮し、空間の中に点在するようになって行く。上の場合、 $y=0.76$ に相当する α は1.05であるから、そのときのフラクタル次元 $f(\alpha)$ は第2図から分るように3に近い。

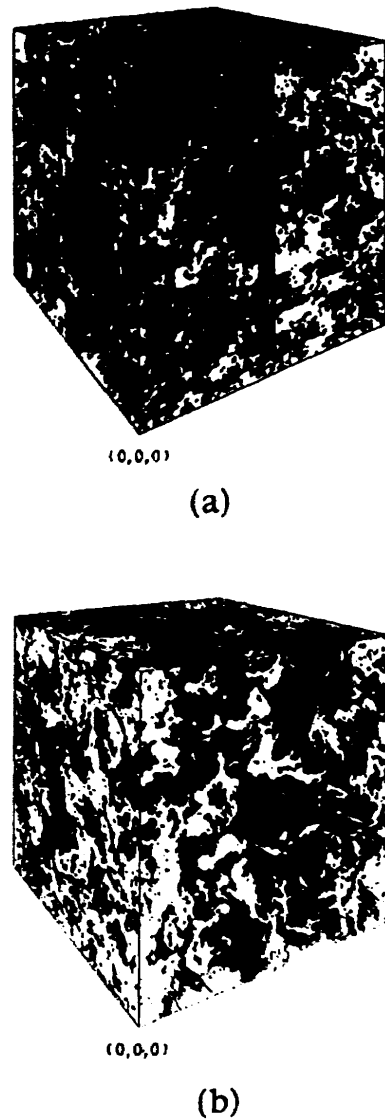


図5 Fig. 3. Domains of dissipation with $\epsilon_{L/128} / \epsilon_L$ larger than 0.76 obtained (a) by the 3D binomial Cantor set model¹⁵⁾ and (b) by DNS of decaying isotropic turbulence at the fully developed state¹⁰⁾. (I. Hosokawa: J. Phys. Soc. Jpn. 62 (1993) 2204より転載.)

7. あとがき

マルチフラクタルと流体力学とのかかわりを簡単に紹介した。その際Intermittency exponents $\mu(q)$ のマルチフラクタル基本量としての重要性について強調した。慣性領域の相対拡散における $\mu(q)$ の重要な働きは論を待たないが、乱流の速度構造関数における $\mu(q)$ と直接に関連する(8)式の重要な働きも興味がある。乱流の速度変動はKolmogorovの第2仮説を通して散逸量の統計とつながっているので、ここでもマルチフラクタル構造が一肌脱いでくれるわけであるが、これについてはRefs.²¹⁻²²⁾を参照されたい。又温度構造関数に及ぶマルチフラクタルの最

近の成果として *Refs.* ²³⁻²⁴ を挙げる。

境界層遷移の従来の視点とは、かなり遠い所の話題で、も一つ迫力が足りなかったものと思うが、遷移及び乱れの中の普遍的構造を探る一つ的手段として、現在注目されつゝあるニュー・フロンティアと理解して頂ければ幸いである。マルチフラクタルは非線型科学に共通する数理的“形象学”ともいえる。

参考文献

- 1) B. B. Mandelbrot : *The Fractal Geometry of Nature* (Freeman, 1982).
- 2) H. G. E. Hentschel and I. Procaccia : *Physica* 8D (1983) 435.
- 3) T. C. Halsey, M. H. Jensen, L. P. Kadanoff, I. Procaccia, and B. I. Shraiman : *Phys. Rev.* A33 (1986) 1141.
- 4) A. Bershadzkii and A. Tsinober : *Phys. Lett.* A165 (1992) 37.
- 5) E. N. Lorentz : *J. Atmos. Sci.* 20 (1963) 120.
- 6) M. H. Jensen, L. P. Kadanoff, and A. Libchaber : *Phys. Rev. Lett.* 55 (1985) 2798.
- 7) H. Koizumi, and I. Hosokawa : *Int. J. Heat Mass Transfer* 36 (1993) 3937.
- 8) L. Keefe, P. Moin, and J. Kim : *J. Fluid Mech.* 242 (1992) 1.
- 9) C. Meneveau and K. R. Sreenivasan : *Phys. Rev. Lett.* 59 (1987) 1424.
- 10) I. Hosokawa and K. Yamamoto : *J. Phys. Soc. Jpn.* 59 (1990) 401 ; *Phys. Fluids A2* (1990) 889.
- 11) U. Frisch and G. Parisi : in *Turbulence and Predictability in Geophysical Fluid Dynamics and Climate Dynamics*, ed. M. Ghil (North-Holland, 1985) p. 84.
- 12) A. N. Kolmogorov : *J. Fluid Mech.* 13 (1962) 82.
- 13) B. B. Mandelbrot : *Physica A*163 (1990) 306.
- 14) E. A. Novikov : *Appl. Math. Mech.* 35 (1971) 231.
- 15) I. Hosokawa : *Phys. Rev. Lett.* 66 (1991) 1054.
- 16) U. Frisch, P. L. Sulem, and M. Nelkin : *J. Fluid Mech.* 87 (1978) 719.
- 17) R. Benzi, G. Paladin, G. Parisi, and A. Vulpiani : *J. Phys.* A17 (1984) 3521.
- 18) I. Hosokawa : *J. Phys. Soc. Jpn.* 60 (1991) 3983.
- 19) F. Anselmetti, Y. Gagne, E. J. Hopfinger, and R. A. Antonia : *J. Fluid Mech.* 140 (1984) 63.
- 20) I. Hosokawa : *J. Phys. Soc. Jpn.* 62 (1993) 2204.
- 21) I. Hosokawa : *J. Phys. Soc. Jpn.* 62 (1993) 10.
- 22) I. Hosokawa : *Fluid Dyn. Res.* to appear.
- 23) I. Hosokawa : *Phys. Rev.* A43 (1991) 6735.
- 24) I. Hosokawa : *Phys. Rev.* E49 (1994) 4775.