

下面加熱矩形ダクト内混合対流の不安定性と遷移

山田 純* 宮 寄 武* 細 川 巖*

Instability and Transition of Mixed Convection in a Rectangular Duct Heated from below

Jun YAMADA, Takeshi MIYAZAKI and Iwao HOSOKAWA

The University of Electro-Communications

ABSTRACT

The linear stability of mixed convection in a rectangular duct heated from below is investigated numerically by a collocation method. The eigenvalue problem obtained by making use in the double expansion method in Chebyshev polynomials and the resulting generalized eigenvalue problem is solved numerically. It is found that the traveling transverse roll is the most unstable disturbance when the Reynolds number is less than a certain critical value, while the longitudinal roll is most dangerous when the Reynolds number is larger the critical value.

Keywords : mixed convection, rectangular duct, linear stability, pattern formation

1. はじめに

下面を加熱した水平矩形ダクト内の自然対流では、レイリー数が臨界レイリー数より大きくなると定常なパターンを持った対流が現れ、さらにレイリー数を上げると、対流が非定常化し、カオスを経て乱流へと遷移していく。 x 軸をダクトの軸方向に、 y 軸をスパン方向に、そして鉛直方向に z 軸を選ぶと、ダクト内に現れる定常な対流として、 x 方向に平行な軸を持つ縦ロール対流と x 方向に垂直で y 方向に平行な軸を持つ横ロール対流の2つのロールのどちらかが生じる。*Lee*ら¹⁾は2次元流れの線形安定性を調べ、縦ロールの構造と臨界レイリー数を明らかにした。*Luijckx*ら²⁾は、ダクト内の自然対流の3次元的な理論解析を行い、横ロールが縦ロールより低いレイリー数で生じることを示した。複合対流の場合、縦ロールに関しては、*Lee*らによると側壁が完全伝導壁（温度変化がリニア）のとき、アスペクト比1, 2, 4に対して臨界レイリー数は4946.8, 2347.5, 1837.9で、ロールの数はそれぞれ1, 2, 4と与えられているが、横ロールが形成される臨界レイリー数はまだ調べられておらず、複合対流の臨界レイリー

数と対流のパターンについては、十分な知識は得られていない。

加藤ら³⁾はアスペクト比2のダクト内の複合対流の3次元数値シミュレーションにより、縦ロールの臨界レイリー数より低いレイリー数での不安定性を見出し、対流の発生に3次元性の影響が存在することを指摘した。ここでは、矩形ダクト内の複合対流について、線形安定性理論を用いて3次元の理論解析を行い、横ロールを中心としたダクト内流れのパターン形成の様子を検討する。

2. 線形攪乱方程式と解析法

水平矩形ダクトを考える。ダクト内には定常な主流が存在する。下面は上面より高温で、側壁の温度変化はリニアで固定される。このときダクト内の複合対流を支配するパラメータは、レイノルズ数 Re 、レイリー数 Ra 、プラントル数 Pr の3つの無次元数となる。無次元化の際の代表長さとしてダクトの高さ、代表速度は主流の平均流速を選んだ。流速 u 、圧力 P 、温度 θ とすると、無次元化した線形攪乱方程式は、ブシネ近似を用いて次のように書く

ことができる。

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + (\bar{u} \cdot \nabla) \hat{u} + (\hat{u} \cdot \nabla) \bar{u} = -v \hat{p} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \hat{u} + \frac{Ra}{PrRe^2} \hat{\theta} e_z$$

$$\nabla \cdot \hat{u} = 0$$

$$\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial t} + (\bar{u} \cdot \nabla) \hat{\theta} + (\hat{u} \cdot \nabla) \bar{\theta} = \frac{1}{PrRe} \nabla^2 \hat{\theta}$$

ここで変数のバーは定常成分，ハットは攪乱成分を示す。

主流 $\bar{u} = (U_x(y, z), 0, 0)$ は次式で与えられる。

$$U_x(y, z) = \frac{1}{c} \left[\frac{A^2}{4} - y^2 + \frac{8}{A} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{m^3} \operatorname{sech} \frac{m}{2} \cosh mz \cos my \right]$$

$$m = (2n+1)\pi \quad A$$

$$c = \frac{A^2}{6} - \frac{32}{A^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tanh m}{m^5} \quad 2$$

境界条件は，アスペクト比をAとすると， $y = \pm A$ で，

$$\hat{u} = 0, \quad \hat{p} = \theta = 0$$

$$\frac{\partial \hat{v}}{\partial y} = 0$$

$z = \pm 1$ では，

$$\hat{u} = 0, \quad \hat{p} = \theta = 0$$

$$\frac{\partial \hat{w}}{\partial z} = 0$$

となる。

速度，圧力，温度をx方向にフーリエ級数展開する。基本流がx方向に一様であることから，1つのフーリエ成分だけを取り出して考えることができるので，波数k，線形増幅率σのフーリエ成分，

$$e^{ikx - \sigma t}$$

について考える。速度のx方向成分と圧力を消去し，残りの未知数のフーリエ係数をy，z方向に2重チェビシェフ多項式展開する。

$$\tilde{v}(y, z) = \left\{ 1 - \left(\frac{y}{A} \right)^2 \right\}^2 \left\{ 1 - z^2 \right\} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} V_{mn} T_m \left(\frac{y}{A} \right) T_n(z)$$

$$\tilde{w}(y, z) = \left\{ 1 - \left(\frac{y}{A} \right)^2 \right\} \left\{ 1 - z^2 \right\}^2 \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} W_{mn} T_m \left(\frac{y}{A} \right) T_n(z)$$

$$\tilde{\theta}(y, z) = \left\{ 1 - \left(\frac{y}{A} \right)^2 \right\} \left\{ 1 - z^2 \right\} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \Theta_{mn} T_m \left(\frac{y}{A} \right) T_n(z)$$

V_{mn} , W_{mn} , Θ_{mn} は展開係数である。これらは境界条件を自動的に満足する。

ダクト断面のコロケーションポイントは，

$$y = A \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \left(\frac{\pi(2i-1)}{2M} \right) \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, M$$

$$z = \cos \left(\frac{\pi(2j-1)}{4N} \right), \quad j = 1, 2, \dots, N$$

とした。これにより，問題は一般化固有値問題

$$Ax = \sigma Bx$$

$$x = [V_{11}, \dots, V_{MN}, W_{11}, \dots, W_{MN}, \Theta_{11}, \dots, \Theta_{MN}]^T$$

に帰着する。各展開を $M = N = 12$ 程度で打ち切ると， 430×430 程度の行列の固有値を求めることになり，σの有効数字は6~7桁が得られた。プラントル数は0.71とした。

3. 結果と検討

線形攪乱方程式は，y-z面内での流れの対称性に注目すると4つのモードに分けて考えることができる。このモードを対称性のモードと呼ぶ。Leeら¹⁾やLuijckxら²⁾によると，wがy軸に対して非対称となるモードが臨界レイリー数を与えることはないので，これらを考察の対象から外す。実際に検討するのは2つの対称性のモードで，次のとおりである。

モード1: $\{\tilde{v}^{00}, \tilde{w}^{EE}, \tilde{\theta}^{EE}\}$

モード2: $\{\tilde{v}^{EO}, \tilde{w}^{OE}, \tilde{\theta}^{OE}\}$

ここで， \tilde{v}^{EO} とはvがy，zに対して偶関数，奇関数であることを意味し，

$$\tilde{v}^{EO} = \left\{ 1 - \left(\frac{y}{A} \right)^2 \right\}^2 \left\{ 1 - z^2 \right\} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} V_{mn} T_{2m} \left(\frac{y}{A} \right) T_{2n-1}(z)$$

の関係がある。

図1に中立曲線を示す。(a)，(b)，(c)はそれぞれアスペクト比Aが1，2，4の結果である。波数kが0のとき流れは2次元の縦ロールとなり，臨界レイリー数はLeeら¹⁾の結果に従うのでこれを白点で示す。波数が0に近い領域では，このアルゴリズムでの計算は精度が低いため，白点までを補間し点線で示す。この部分の計算は今後の課題である。レイノルズ数が小さいときには，Leeらの結果より低いレイリー数でも不安定となっている。このとき臨

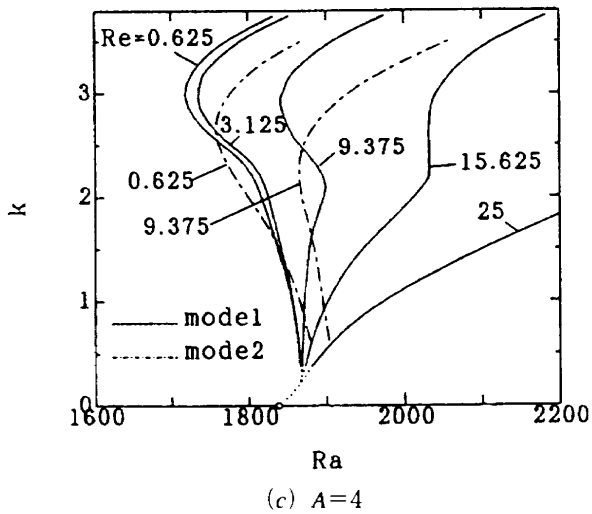
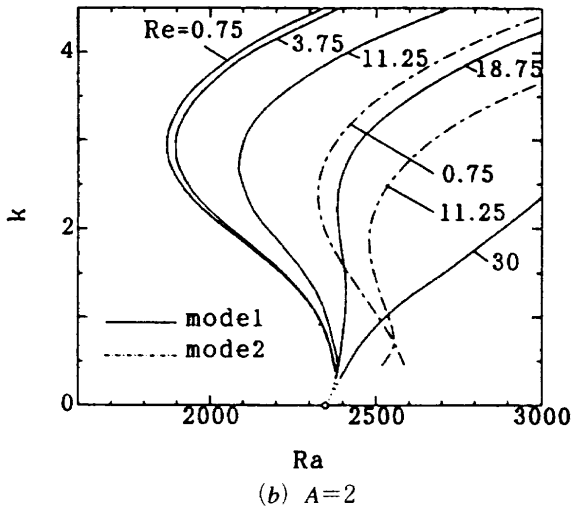
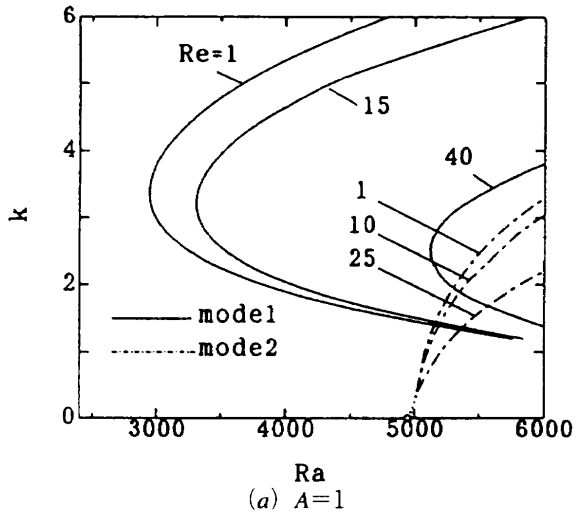


図1 中立曲線

界数 k_c は $k_c \neq 0$ を示し、波数 $k=k_c$ を持つ横ロールが現れる。レイノルズ数の増加と共に、曲線は全体としてレイリー数が大きい方にシフトする。波数が小さいほどシフト量は少なく、波数 $k=0$ ではシフトしない。縦ロールは、レイノルズ数に関らず一定の臨界レイリー数を持つためである。レイノルズ数の増加につれて、曲線の極値部分の臨界レイリー数が、波数 $k=0$ でのレイリー数と一致することが考えられるが、このときのレイノルズ数が臨界レイノルズ数 Re_c となる。レイノルズ数が臨界レイノルズ数を越えた中立曲線では、臨界波数は $k_c=0$ を示し、縦ロールが現れる。臨界レイリー数はレイノルズ数に依らず一定となる。

攪乱の対称性のモードについては、(a)では、臨界波数が $k_c \neq 0$ の臨界点はモード1、 $k_c=0$ の臨界点はモード2により与えられ、臨界レイノルズ数を越えるとき、モードの交代を伴う。(b)、(c)では、モード2はモード1より高レイリー数側にあり、臨界レイリー数は常にモード1が与える。縦ロールについては、モード1はy軸方向に偶数個、モード2は奇数個の縦ロールを与える。アスペクト比に応じて、形成される縦ロールの数が変わるため、それぞれに対応した対称性のモードが臨界レイリー数を与える。横ロールではアスペクト比に関らずモード1が優勢となり、臨界レイリー数は常にモード1が与える。このため(a)と(b)、(c)のような違いが起こる。

図2は臨界レイリー数の変化を示す。破線は、各ロールの臨界点を不安定領域まで追跡したもので、臨界レイリー数を与えるものではない。横ロールが現れるレイノルズ数の領域では、臨界レイリー数の変化は単調増加の曲線となる。曲線の増加率はどのアスペクト比のものも類似している。縦ロールが現れる領域は直線で示される。臨界レイノルズ数は曲線と直線の交点で表わされ、アスペクト比が大きいほど低レイノルズ数側に移動している。アスペクト比が ∞ (平行平板間の流れ) では縦ロールのみ

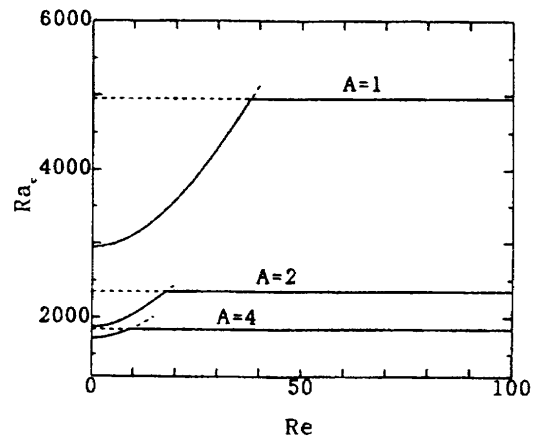


図2 Ra_c の Re に対する変化

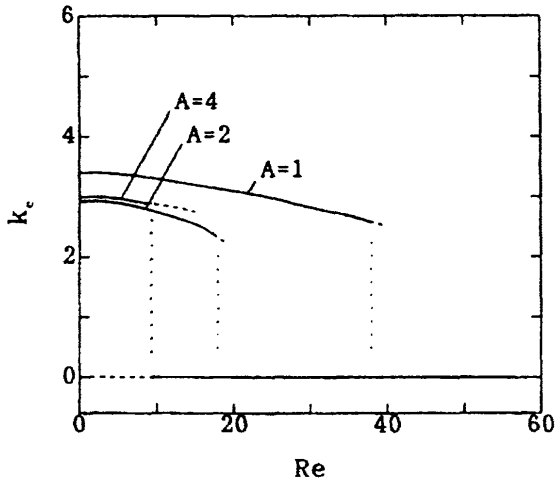
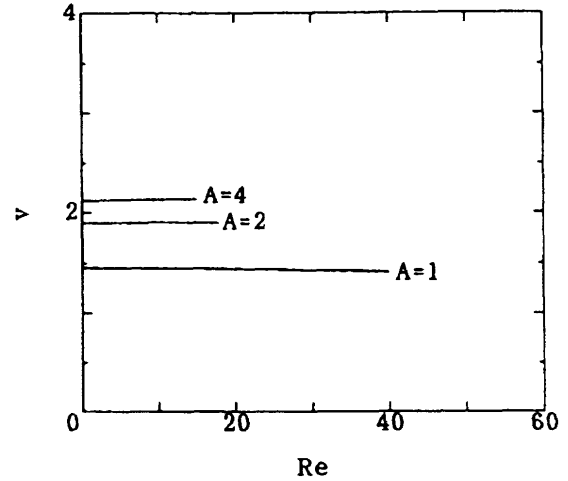
図3 k_c の Re に対する変化

図4 横ロールの位相速度

が現れる (Fujimuraら⁴, 1987) ので, アスペクト比を大きくするにつれて臨界レイノルズ数が0にまで移動することが予想される。

図3は波数の変化を捉えたもので, 臨界レイノルズ数で曲線は不連続で, $k_c \neq 0$ から $k_c = 0$ への臨界波数の跳躍が起こる。臨界レイノルズ数より低いレイノルズ数領域での横ロールの波数は, 大きな変動がなく, どのレイノルズ数でもほぼ同じ大きさの横ロールが発生している。この横ロールは, 有限の位相速度で移動する進行波であり, 図4のようにその位相速度はほぼ一定でレイノルズ数の変化の影響を受けない。

4. おわりに

矩形ダクト内複合対流の3次元線形不安定性を2重チェビシェフ多項式展開を用いたコロケーション法で調べた。臨界レイノルズ数より小さいレイノルズ数で横ロールが

現われ, これによる臨界レイリー数の低下が確認された。臨界レイノルズ数より大きいレイノルズ数では縦ロールが現われた。臨界レイノルズ数は, アスペクト比によって変化し, アスペクト比が大きいほど低レイノルズ数側へ移動した。またアスペクト比1では, この臨界レイノルズ数の前後で攪乱の対称性のモードも変化した。

参考文献

- 1) N. Y. Lee, W. W. Schultz and J. P. Boyd: Int. J. Heat Mass Transfer. Vol. 32, No. 3, pp. 513-520, 1989
- 2) J. M. Luijkx and J. K. Platten: J. Non-Equilib. Thermodyn. Vol. 6, No. 3, PP. 141-158, 1981
- 3) 加藤智子: 電気通信大学修士論文, 1993
- 4) K. Fujimura and R. E. Kelly: Fluid Dynamics Research 2, pp. 281-292, 1988