

濃密気体中の衝撃波の数値解析

石井 隆 次

Numerical Analysis of Shock Waves in a Dense Gas

By

Ryuji ISHII

Department of Aeronautics, Kyoto University

ABSTRACT

In this paper, shock waves propagating in a van der Waals gas are studied analytically and numerically. First the thermodynamic characteristics of the van der Waals gas are briefly discussed and then the Rankine-Hugoniot relations are obtained by using the Rayleigh line and the shock adiabat. It was proved that both the compression and the expansion shocks can exist in the gas whose conditions are close to those at the critical point on the saturation curve. Although this fact has already been well known, several interesting shock characteristics were newly found. Next a TVD-scheme is applied to solve numerically the corresponding Euler equations. It was shown that the numerical results are partly consistent with the analytical predictions. The shock instability, however, was not always well simulated by the TVD scheme.

1. はじめに

すべての気体は非常に高圧な状態では濃密気体と呼ばれ、もはや理想気体の状態方程式には従わない。高圧状態では、平均分子間距離に比べて分子の大きさが無視できないため、分子間力が気体の熱力学的状態に与える寄与が無視できない。

しかし比較的大気圧に近い圧力でもこのような挙動を示す気体が存在する。それは例えばフロン、ペンタン、オクタンのような大きな熱容量をもつ多原子分子気体である。これらの気体はいわゆる「逆行性」という、通常の気体とは全く異なった挙動を示すことがある。まず第一は“Degradicity”と呼ばれる性質で、膨張衝撃波を形成する。次は“Retrogradicity”と呼ばれる性質で、断熱圧縮に対して凝縮し、断熱膨張に対して蒸発する。

フロン、プロパン、オクタン、ヘキサン等の多分子気体は、日常的にも工業的にも様々な分野で利用されている気体であるが、その気体力学的特性は必ずしも十分に解明されてはいない。本研究では大きな熱容量を持つ多原子気体の Degradicity に着目して、これらの気体中を伝播する衝撃波を理論的・数値的に解析する。解析では、状態方程式として van der Waals の式を用い、流れの支配方程式としてはオイラー方程式を用いる。その結果、衝撃波の厚さは無視できるものとし、不連続面と仮定されている。

まず気体の「基本微分係数」 Γ の定義と説明を行い、それを用いて一次元衝撃波の特性についての一般的な議論がなされ、具体的に流れ場の中に形成される一次元衝撃波のパターンとその分類がなされる。その際、発展性条件の適用により、実際に存在できるであろう安定な衝撃波が選別される。TVDスキームを用いて

実際に数値計算を行い、解析的に得られた結果との比較・検証がなされる。発展性条件を満足しない不安定衝撃波の時間発展についても詳細に調べられる。

次に、クサビを過ぎる2次元超音速流の、流れの曲がり角と衝撃波角との関係が求められ、理想気体の場合の関係との比較がなされる。数値解析により、解析的予測の検証が行われる。

2. 支配方程式

気体の熱力学的状態を規定するためには、二つの状態式、即ち熱的状态式と熱量的状態式が必要である。ここではそれぞれを次のように与える。

$$p = \frac{T}{3V-1} - \frac{3}{V^2}, \tag{1}$$

$$C_v = \text{const} > 0, \tag{2}$$

ここに $V=1/\rho$ は比体積である。以下の解析の都合上 p, V, T はそれぞれ臨界点での値 p_c, V_c, T_c 、また比熱は気体定数 R で無次元化されている。式 (1), (2) を用いると、熱力学よりつぎの関係式が得られる。

$$e = \frac{8}{3} C_v T - \frac{3}{V}, \tag{3}$$

$$s = C_v \ln T + \ln(3V-1), \tag{4}$$

$$C^2 = \left(1 + \frac{1}{C_v}\right) \frac{24TV^2}{(3v-1)^2} - \frac{6}{V}, \tag{5}$$

ここに e, s, C は比エネルギー、比エントロピー及び音速で、それぞれ $p_c V_c, R, (p_c V_c)^{1/2}$ で無次元化されている。

気体の「基本微分係数」 Γ は

$$\Gamma = \frac{C^4}{2V^3} \frac{\partial^2 V}{\partial p^2}, = 1 - \frac{V}{C} \frac{\partial C}{\partial V}, \tag{6}$$

で定義され、理想気体では $\Gamma = \frac{1}{2}(\gamma + 1)$ となる。 γ は比熱比である。van der Waals 気体では

$$\Gamma = 1 - \frac{3V}{C^2} \left[\frac{1}{V^2} - \frac{8VT}{(3V-1)^3} \left(1 + \frac{1}{C_v}\right) - \frac{1}{C_v} \left(1 + \frac{1}{C_v}\right) \frac{12TV^2}{(3V-1)^3} \right] \tag{7}$$

のように求められる。式(6)から容易に分かるように $\Gamma < 1$ の場合、音速 C は等エントロピー圧縮に際して減少する。さらに弱い不連続圧力変化 Δp に伴うエントロピー変化 Δs は

$$\Delta s = \frac{\Gamma V^3}{6TC^4} (\Delta p)^3 + O[(\Delta p)^4], \tag{8}$$

で与えられる。これより $\Gamma < 0$ にたいしては $\Delta p < 0$ でなければならない。これは膨張衝撃波の存在を示唆している。

3. ランキン・ウゴニオ関係式

1次元定常衝撃波を考える。質量、運動量及びエネルギー保存則はそれぞれ

$$\frac{u_1}{V_1} = \frac{u_2}{V_2}, \tag{9}$$

$$p_1 + \frac{u_1^2}{V_1^2} = p_2 + \frac{u_2^2}{V_2^2}, \tag{10}$$

$$e_1 + p_1 V_1 + \frac{1}{2} u_1^2 = e_2 + p_2 V_2 + \frac{1}{2} u_2^2, \tag{11}$$

で与えられる。ここに u は $(p_c V_c)^{1/2}$ で無次元化された流速で、添字 1, 2 は衝撃波前方及び後方の流れの状態を表している。式(9)を(10), (11)に代入するとレイリー直線と衝撃波断熱曲線 (Shock Adiabatic) が得られる。

$$p_2 - p_1 = -\left(\frac{u_1}{V_1}\right)^2 (V_2 - V_1), \tag{12}$$

$$e_2 - e_1 + \frac{1}{2} (p_1 + p_2) (V_2 - V_1) = 0. \tag{13}$$

衝撃波上流条件 (p_1, V_1, u_1) が与えられるとランキン・ウゴニオ関係 (p_2, V_2, u_2) は pV -平面でレイリー直線と衝撃波断熱曲線の交点として与えられる。

van der Waals 気体では衝撃波断熱曲線(13)は次のようになる。

$$p_2 = \frac{\frac{C_v}{3} (3V_1-1) - \frac{1}{2} (V_2-V_1) \left[p_1 + 3(C_v-1) \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right) - C_v \left(\frac{1}{V_1^2} - \frac{1}{V_2^2} \right) \right]}{\frac{C_v}{3} (3V_2-1) + \frac{1}{2} (V_2-V_1)}, \tag{14}$$

またエントロピーの変化 $\Delta s_{1,2} = s_2 - s_1$ は

$$\Delta s_{1,2} = (C_v+1) \ln \left(\frac{3V_2-1}{3V_1-1} \right) + C_v \ln \left[\frac{(p_2 + \frac{3}{V_2^2})}{(p_1 + \frac{3}{V_1^2})} \right] \tag{15}$$

で与えられる。

以下では $C_v=50$ (octane) の気体について考える。図1に pV -平面上の Γ の分布が示されている。いま

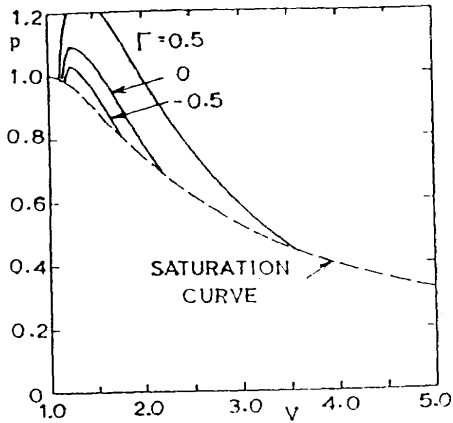


図1 $C_v=50$ の場合の Γ の分布。

p - V 面上、臨界点近傍の気体領域内で Γ が負であるような適当な一点1を取り、さらにこの点を通る衝撃波断熱線 L_1 上に別な点2を取る。このとき点2を通る衝撃波断熱線 L_2 を引くと、この時 L_1 と L_2 は一致せず、二点1と2で交わる。理想気体の場合は L_1 と L_2 の交点はこの2点のみである。しかし van der Waals 気体の場合には、点1を例えば $(p_1, V_1) = (1.0560, 1.1943)$ と選ぶと L_1 上の点2の選び方により L_1 と L_2 は4点で交わる場合がある。この事実は van der Waals 気体の興味ある特性の一つと考えられる。従ってここでは以下に示す二つの場合について考える。

Case 1:

$$(p_1, V_1) = (1.0560, 1.194), (p_2, V_2) = (0.8606, 2.000)$$

$$(p_3, V_3) = (0.9143, 1.778), (p_4, V_4) = (1.1125, 0.9612)$$

Case 2:

$$(p_1, V_1) = (1.0560, 1.194), (p_2, V_2) = (0.7321, 2.606)$$

$$(p_3, V_3) = (1.0147, 1.374), (p_4, V_4) = (1.0985, 1.0090)$$

このとき点3, 4は共に L_1, L_2 上にある。明らかに (p_1, V_1) と (p_j, V_j) ($j=2, 3, 4$) 及び (p_2, V_2) と (p_j, V_j) ($j=1, 3, 4$) はランキン・ウゴニオ関係式を満足する。

衝撃波前方及び下流の条件をそれぞれ添字 i, j で表すと、衝撃波の存在のためにはエントロピー条件

$$\Delta s_{ij} = s_j - s_i > 0. \tag{16}$$

が満足されねばならない。この条件を満足する遷移はそれぞれの場合について

$$\text{Case 1; } 1 \rightarrow 2, 1 \rightarrow 3, 1 \rightarrow 4, 2 \rightarrow 3, 4 \rightarrow 2$$

$$\text{Case 2; } 1 \rightarrow 4, 2 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 4, 3 \rightarrow 1$$

の4通りが可能性である。

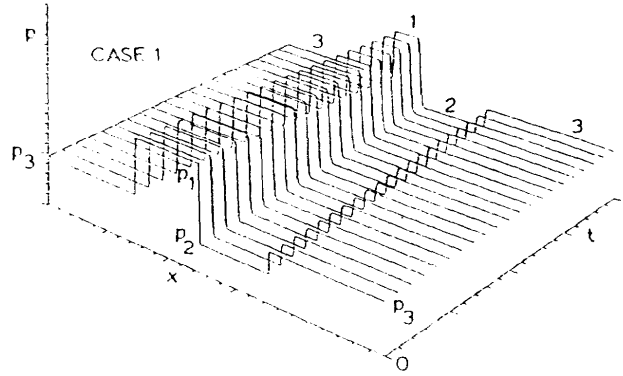


図2 衝撃波の時間発展。

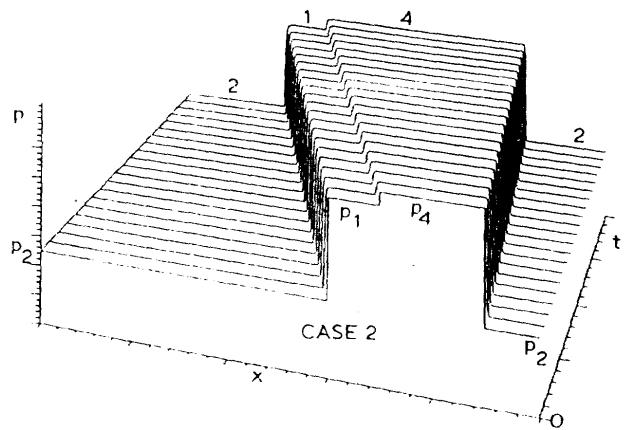


図3 衝撃波の時間発展。

4. 発展性条件²⁾

最終的に実現可能な衝撃波は、これまでの①ランキン・ウゴニオ関係式: ②エントロピー条件: 以外に、さらに③発展性条件を満足しなければならない。この発展性条件としては、少なくとも

$$M_i > 1 \tag{17-1}$$

$$M_i < 1 \tag{17-2}$$

が要求されると考えられる。条件(22-1)は不連続面形成のための必要条件であり、条件(22-2)は不連続面安定のための必要条件である。条件(22)を用いると、最終的に以下の衝撃波遷移が許されることになる。

$$\text{Case 1; } 1 \rightarrow 3, 1 \rightarrow 4, 2 \rightarrow 3,$$

$$\text{Case 2; } 1 \rightarrow 4, 2 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 4,$$

理想気体では点1から引いた衝撃波断熱線上の任意の点2に対しては、 $1 \rightarrow 2$ か $2 \rightarrow 1$ のいずれかの衝撃波遷移が必ず可能であるが、van der Waals 気体の場合には、必ずしもこれらの2点間の衝撃波遷移は可能

とは限らない。

5. 数値解析

実験座標系に対して、上に求めた各点の条件を初期値として、流れ場の時間発展をTVD-スキームでシミュレートした結果が図2, 3に示されている。図2の場合、1→3, 1→4, 2→3は安定な衝撃波であるが1→3は膨張衝撃波、1→4, 2→3は圧縮衝撃波である。

1→2は超音速・超音速膨張衝撃波で、不安定衝撃波と考えられる。しかし、図に示すように、数値的には不連続面1→2は時間的に全く安定であった。一般に衝撃波不安定には2種類あり、一つは2次元的不安定で、波面に凹凸が発生するいわゆる Corrugation Instability, もう一つは衝撃波が進行方向に分解する Wave Splitting である。一次元計算では Corrugation Instability は解析不可能であり、図2の結果は少なくとも Wave Splitting は起こっていないことを示している。

図3には1→4, 2→1, 2→3, 2→4の4つの衝撃波の時間発展が示されている。この場合にも2→1は超音速・超音速膨張衝撃波で不安定と考えられるが、図2の場合と同様、時間的不安定は見られない。

図4, 5には $M_1 < 1$ の不安定衝撃波の時間発展が示されている。明らかにこれらの結果は一種の Wave Splitting の不安定現象を示している。

以上の数値結果はある意味で特殊な場合であると考えられる。図6には低圧室、高圧室に様な静止気体をつめた衝撃波管問題の数値結果が示されている。この場合、高圧室中を伝播する連続膨張波の後ろに膨張衝撃波がみられる。

最後に図7に、2次元ダクト内超音速流れの数値結果が、比較のため図8には $\gamma=1.4$ の理想気体の結果がそれぞれ示されている。³⁾ 明らかに van der Waals 気体中の波の構造は理想気体の場合に比べて、はるかに複雑であることがわかる。

6. 結論

van der Waals 気体中の圧縮衝撃波と膨張衝撃波の存在が数値的に確認された。これは解析的予測と完全に符合する。しかし衝撃波不安定については、数値解析結果は理論的予測とは必ずしも一致しなかった。Corrugation Instability についてはさらに数値的な解析が今後の問題として残された。

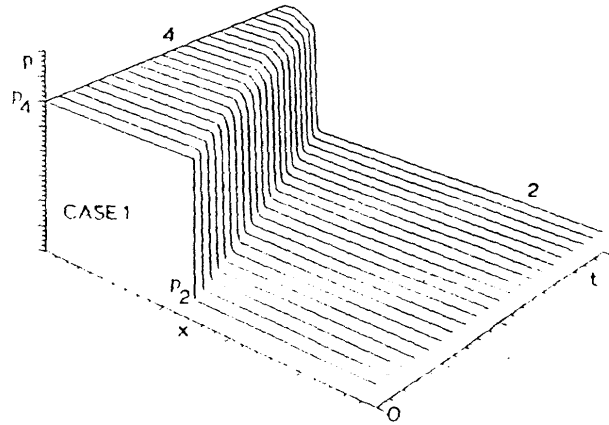


図4 不安定不連続面の時間発展。

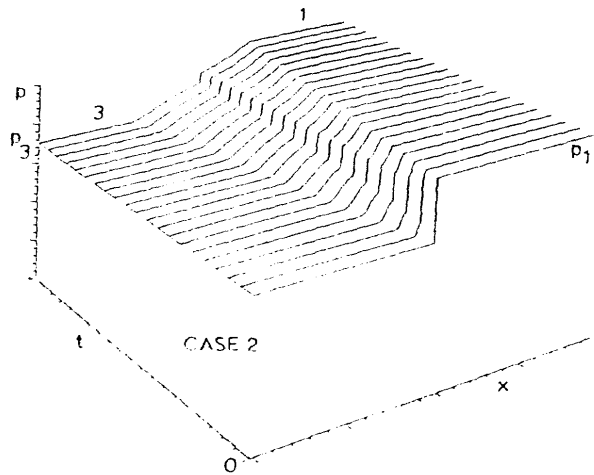


図5 不安定不連続面の時間発展。

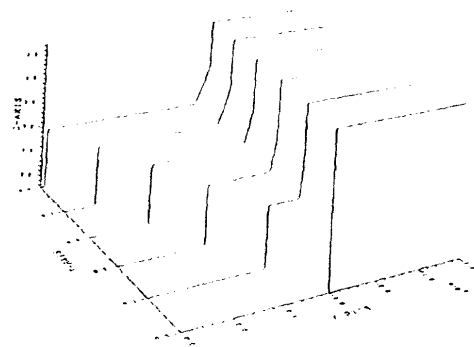


図6 衝撃波管問題: $p_4=0.965, V_4=1.3, T_4=0.9933$
 $p_1=1/6 p_4, T_1=T_4$.

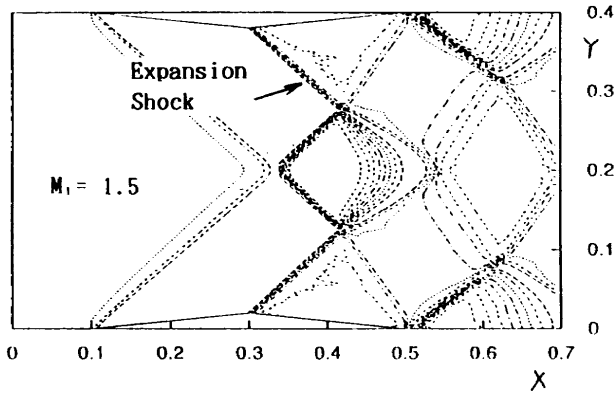


図7 2次元ダクト内の超音速流：
van der Waals 気体, $M_1 = 1.5$.

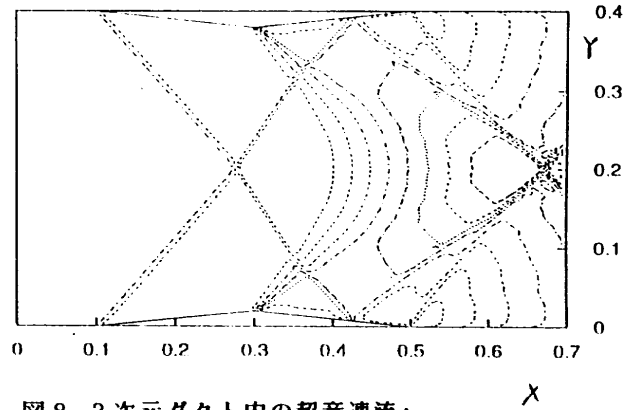


図8 2次元ダクト内の超音速流：
理想気体, $\gamma = 1.4$, $M_1 = 1.5$.

7. 参考文献

- 1) Thompson, P.A. Phys. Fluids 14, (1971), pp. 1843-1849.
- 2) Foules, G.R. & Houwing, A.F.P. Phys. Fluids 27 (1984), pp.1982-1990.
- 3) 坂元康郎 1995 京都大学工学部航空宇宙工学修士論文.

