

# 差分法による流路内非圧縮性乱流のDNS

- 河村 洋<sup>†</sup> 近藤 芳行<sup>\*</sup> 佐々木 潤一郎<sup>\*</sup> 清水 康弘<sup>\*</sup>  
 † 東京理科大学 理工学部 機械工学科 教授  
 \* 東京理科大学 大学院 理工学研究科 機械工学専攻

## DNS of Incompressible Turbulent Channel Flow by Finite Difference Method

- Hiroshi KAWAMURA<sup>†</sup> Yoshiyuki KONDO<sup>\*</sup> Jun-ichiro SASAKI<sup>\*</sup> Yasuhiro SHIMIZU<sup>\*</sup>  
 † Department of Mechanical Engineering Science University of Tokyo Professor  
 \* Department of Mechanical Engineering Science University of Tokyo Graduate-Student

Direct numerical simulations(DNS) of turbulence are now increasingly performed. The present study describes some numerical tests on the accuracy of the DNS of the turbulent channel flow with upwind-biased schemes and proposes a new scheme consistent with the analytical difference operation, with which a good turbulent energy budget has been obtained even with a level of the second-order central scheme.

*Key Words* : Computational Fluid Dynamics, Finite-Difference Method, Turbulent Flow

### 1 緒言

近年の大型計算機の発達に伴い、乱流の直接数値シミュレーション (Direct Numerical Simulation, DNS) が可能となり、実験的、理論的手法と共に乱流現象の解明に大きく貢献している。DNSの計算手法は、スペクトル法と有限差分法に大別される。スペクトル法によるDNSは、信頼性の高い結果を得ることができるが、その手法による制約から、扱える乱流場は単純な形状・境界条件の場合に限られる。一方、有限差分法は複雑な形状・境界条件を扱うことができるため、実用問題に対する計算手法として期待が寄せられている。

しかし、有限差分法は離散化方法に対する依存性が強いため、高精度な数値シミュレーションの要請から、数値精度に関する多くの検証計算<sup>[1]~[7]</sup>が行われてきた。これまでの主たる計算例をTable 1及び2に示す。本稿では、スペクトル法による多くの計算<sup>[8]</sup>も行われている十分発達した平行平板間乱流 (Fig.1) について、研究の現状を展望する。

従来行われてきた差分法DNSの検証の観点は、主として二点あり、まず第一の観点は、

#### (1) 差分化に伴い導入される数値粘性の評価

である。特に、計算の安定化のために、いわゆる風上バイアス型のスキームを用いる場合には、その評価が重要な課題であり、何次精度の差分式を用いればスペクトル法の結果を十分良く再現できるかが、検討されてきた。

第二の観点は、

#### (2) レイノルズ応力輸送方程式の収支の評価

である。すなわち、レイノルズ応力の輸送方程式の各項の和は、元来ゼロになるべきであるにもかかわらず、単に数値計算上の打切り誤差とは見なし得ない残差が消えなかった。これは、従来は、数値粘性の付加による主として散逸項の過小評価によると考えられてきた。しかし、筆者ら<sup>[9]</sup>は、運動方程式とレイノルズ応力輸送方程式の差分式の整合性について再検討の必要があると考えた。

本稿は、以上の二点について検討の結果を報告するものである。

### 2 基礎式及び解法

Fig.1に示す系について、計算の基礎式は、

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re_\tau} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \quad (2)$$

と、表される。Table 1及び2の計算例では、計算格子にはStaggered格子が用いられている。

対流項に風上バイアスを導入する差分式は、次のように表される。

$$f \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{x=i} = f_i \frac{-\phi_{i+2} + 8\phi_{i+1} - 8\phi_{i-1} + \phi_{i-2}}{12\Delta x}$$

$$+ \alpha |f_i| \frac{\phi_{i+2} - 4\phi_{i+1} + 6\phi_i - 4\phi_{i-1} + \phi_{i-2}}{12\Delta x} \quad (3)$$

ここで、 $\alpha$ は、付加項の大きさをコントロールするパラメーターで、 $\alpha = 0$  のとき 4 次精度中心差分、 $\alpha = 1$  のとき UTOPIA に帰着する。なお、K-K スキーム例は、 $\alpha = 3$  に対応するが、Non-Staggered 格子上で計算を行う点で異なる。

筆者ら[2][4][6][7]の計算におけるその他の条件を Table 3 に示す。

### 3 数値粘性の評価

一般に、計算の安定化を計るため、対流項には三次精度風上スキームが広く用いられる。そこでまず、 $\alpha = 1.0$  を試みたのが Case1 (Fig.2) である。Fig.2 は、実際には収束値ではなく、乱れはさらに減衰して、統計的に安定な乱流を得ることはできなかった。

そこで、 $\alpha$ を低くし、風上バイアス差分 ( $\alpha = 0.1$ ) と中心差分 ( $\alpha = 0$ ) の比較を行ったのが Case4 と 5 である。Fig.3,4 は、Case4( $\alpha = 0.1$ ) の結果を示しており、この場合には、統計的に安定した乱流が得られる。しかし、結果の精度は良好

ともいえるが、十分ではない。特に、乱れの変動成分は流れ方向  $u'$  がスペクトル法に比べて大きく、壁垂直方向  $v'$  が小さい。まず、Case4 の乱流エネルギー収支を Fig.5 に示す。スペクトル法による結果と比較すると、特に、 $y^+ < 20$  で散逸が過小である。さらに、散逸のみならず、生成項にも有意な差が見られる。以上の結果、エネルギー収支には有意な残差(点線)が残る。これらの傾向は Satake ら[4]によるさらに高次(5次風上-4次中心)のスキームを用いた結果にも同様に現れている。また、Satake ら[4]によれば、2次中心差分による方が、かえって良いエネルギー収支が得られているのも興味深い。次に、Case4 の格子間隔で中心差分 ( $\alpha = 0$ ) とした場合 (Case5) を、Fig.6,7 に示す。結果は、 $\alpha \neq 0$  の場合に比べて、明らかに改善が見られる。以上の結果から、3次精

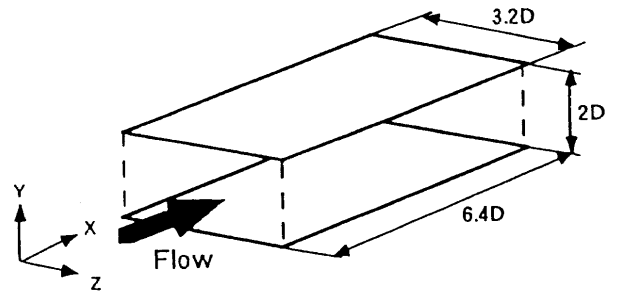


FIG. 1 Calculation Domain

TABLE 1 DNS of Turbulent Channel Flow by FDM

	$Re_\tau$	Convective terms
		Viscous terms
Rai[1]	180	5th upwind 6th central
Satake[3]	100	5th upwind 4th central
Satake[5]	150	2nd central
	150	5th upwind 4th central

TABLE 3 Calculation Condition

Grid	Staggered Grid
Coupling Algorithm	Fractional Step Method
Time Advancement	Adams-Bashforth Method
Boundary Conditions	Periodic (x, z direction)
	Non-Slip (y direction)
Reynolds Number	$Re_\tau = u_\tau \delta / \nu = 180$
Initial Condition	DNS Data-base

TABLE 2 DNS of Turbulent Channel Flow by FDM (by Author's group[2][4][6][7])

Case	Convective terms	Grid num. (x × y × z)	Comp. vol. (x × y × z)	Spatial resolution		
	Viscous terms			$\Delta x^+$	$\Delta y^+$	$\Delta z^+$
case1	3rd upwind( $\alpha=1.0$ )	128 × 66 × 128	12.86 × 26 × 6.46	18	0.8 ~ 11.5	9
	2nd central					
case2	3rd upwind( $\alpha=0.1$ )	32 × 40 × 32	6.46 × 26 × 3.26	36	1.4 ~ 18.9	18
	2nd central					
case3	3rd upwind( $\alpha=0.1$ )	128 × 66 × 128	12.86 × 26 × 6.46	18	0.8 ~ 11.5	9
	2nd central					
case4	3rd upwind( $\alpha=0.1$ )	128 × 66 × 128	6.46 × 26 × 3.26	9	0.8 ~ 11.5	4.5
	2nd central					
case5	4th central( $\alpha=0.0$ )	128 × 66 × 128	6.46 × 26 × 3.26	9	0.8 ~ 11.5	4.5
	2nd central					
case6	2nd central(consistent)	128 × 66 × 128	6.46 × 26 × 3.26	9	0.8 ~ 11.5	4.5
	2nd central					

度風上バイアス項の影響は顕著であるといえる。なお、Raiら<sup>[4]</sup>は、対流項に5次風上、粘性項に4次中心を用いることにより、Case5と同程度の良好な結果を得ており、5次風上-4次中心の組合せを推奨している。Case5の乱流エネルギー収支を、Fig.8に示す。結果は、風上バイアス差分(Fig.5)に比べて顕著に改善されている。しかし、特に生成項と散逸項に誤差が見られ、残差もかなり大きい。この原因については、次節で検討する。

## 4 エネルギー収支の評価

以上のように、高次の中心差分、あるいは風上差分スキームによれば、スペクトル法の結果をかなり良く再現できる。しかし、エネルギー収支については、有意な残差が存在する。元来、差分法においても、運動方程式自体は残差なく解かれているはずであるから、これから導出される乱流エネルギー輸送方程式に残差が残るのは、むしろ不思議であるとも言える。筆者ら<sup>[4]</sup>は、この理由は、運動方程式を解く際の差分式とエネルギー収支を計算する場合の差分式の間で整合性がなかったことによると考えた。

すなわち、一般に運動方程式に高次差分式を用いた場合でも、エネルギー式の各項の計算には、通常の2次中心差分が用いられてきた。Schumann<sup>[10]</sup>は、次のような解析的な微分操作

$$\delta(fg) = f\delta(g) + g\delta(f) \quad (4)$$

が差分式においても成立する必要があることを指摘し、それは、例えば、

$$\delta_x(fg) = \bar{f}^x \delta_x(g) + \bar{g}^x \delta_x(f) \quad (5)$$

によって、実現されることに言及している。ここに、

$$\delta_x(f) = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x}, \quad \bar{f}^x = \frac{f_{i+1} + f_i}{2} \quad (6)$$

である。最近、梶島<sup>[11]</sup>も同様の指摘を行っている。また、森西<sup>[12]</sup>も、時間進行も含めた差分化式におけるエネルギー保存性について論じている。このように、解析的微分操作と整合性のある差分式を、ここでは「コンシステント・スキーム」と呼ぶ。このような差分式の整合性は、従来、運動方程式の対流項における勾配型や発散型等の型依存性に関連して議論されていたが、筆者ら<sup>[4]</sup>は、この考えを乱流エネルギー収支の評価にも適用すべきことを指摘し、コンシステント・スキームによる収支各項の離散化式を導出した。

## 5 コンシステント・スキーム

### 5.1 対流項の離散化

対流項の離散化方法は、上述の型依存性やエネルギー収支式の算出において最も重要な課題である。元来、Navier-Stokes方程式の対流項においては、式(7)が解析的に成立している。

$$\frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} = u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \quad (7)$$

この関係は、式(8)のような離散化を施すことにより、差分式においても成立させることができる。

$$\frac{\delta u_i^{x_j} u_j^{x_i}}{\delta x_j} \Big|_{i+\frac{1}{2}\delta_i} = \overline{u_j^{x_i}} \frac{\delta u_i^{x_j}}{\delta x_j} \Big|_{i+\frac{1}{2}\delta_i} + u_i \frac{\delta u_j^{x_i}}{\delta x_j} \Big|_{i+\frac{1}{2}\delta_i} \quad (8)$$

なお、これらの離散化の記号については8章で説明する。

### 5.2 収支式の離散化

レイノルズ応力の輸送方程式は、次式のように表される。

$$\frac{D(\overline{u'_i u'_j})}{Dt} = P_{ij} + T_{ij} + \Pi_{ij} + D_{ij} - \varepsilon_{ij} \quad (9)$$

- $P_{ij}$  : 生成項
- $T_{ij}$  : 乱流拡散項
- $\Pi_{ij}$  : 速度圧力勾配項
- $D_{ij}$  : 粘性拡散項
- $\varepsilon_{ij}$  : 散逸項

以下では、対流項に2次精度コンシステント・スキームを、圧力勾配項および粘性項に2次精度中心差分スキームを用いた場合について述べる。なお、これらの諸式の乱流統計量については、アンサンブル平均をとるものではあるが、以下では簡単のためにアンサンブル平均の記号を省略している。

#### 5.2.1 垂直応力 ( $i = j$ ) 収支の離散化

垂直応力の収支式は、各速度定義点において以下のように離散化する。

$$P_{ii} = -2\overline{u'_i u'_k} \frac{\delta U_i^{x_k}}{\delta x_k} \quad (10)$$

$$T_{ii} = \frac{\delta}{\delta x_k} \left( \overline{u'_i u'_k} \overline{u'_k u'_i} \right) \quad (11)$$

$$\Pi_{ii} = -\frac{2}{\rho} \overline{u'_i} \frac{\delta p'}{\delta x_i} \quad (12)$$

$$D_{ii} = \nu \frac{\delta^2 (\overline{u'_i u'_i})}{\delta x_k \delta x_k} \quad (13)$$

$$\varepsilon_{ii} = 2\nu \frac{\delta u'_i}{\delta x_k} \frac{\delta u'_i}{\delta x_k} \quad (14)$$

なお、式(10)~式(14)においては、 $ii$ に関する総和規約は用いないこととする。

5.2.2 せん断応力 ( $i \neq j$ ) 収支の離散化

スタガード格子においては各成分の定義点が異なるため、せん断応力の収支式は、圧力定義点において離散化を行うこととする。

$$P_{ij} = -\overline{u_j^{x_j} u_k^{x_k} \frac{\delta U_i^{x_k}}{\delta x_k}} - \overline{u_i^{x_i} u_k^{x_k} \frac{\delta U_j^{x_k}}{\delta x_k}} \quad (15)$$

$$T_{ij} = \frac{\delta}{\delta x_k} (\overline{u_i^{x_i} u_j^{x_j} u_k^{x_k}}) \quad (16)$$

$$\Pi_{ij} = -\frac{1}{\rho} \overline{u_i^{x_i} \frac{\delta p^{x_j}}{\delta x_j}} - \frac{1}{\rho} \overline{u_j^{x_j} \frac{\delta p^{x_i}}{\delta x_i}} \quad (17)$$

$$D_{ij} = \nu \frac{\delta^2}{\delta x_k \delta x_k} (\overline{u_i^{x_i} u_j^{x_j}}) \quad (18)$$

$$\varepsilon_{ij} = 2\nu \frac{\overline{\delta u_i^{x_i} \delta u_j^{x_j}}}{\delta x_k \delta x_k} \quad (19)$$

ここで、式(16)の  $(\overline{\quad})^{x_i x_k}$  および  $(\overline{\quad})^{x_j x_k}$  において、 $i = k$  もしくは  $j = k$  のときは速度定義点で与えられるため、4点補間を行わない。

5.2.3 エネルギー収支の離散化

乱流エネルギーは、圧力定義面において次のように定義する。

$$k = \frac{1}{2} (\overline{u_1' u_1'} + \overline{u_2' u_2'} + \overline{u_3' u_3'}) \quad (20)$$

6 結果

このスキームによる計算結果 (Case6) を Fig.9,10に示す。2次精度であるにもかかわらず、十分良い結果が得られている。乱流エネルギー収支を Fig.11(a),(b) に示す。このうち (a) はコンシステント・スキームによって各項を計算した場合、(b) は通常の直感的なスキームによる場合である。(b) では、残差が残っているものの、(a) では、残差は  $10^{-4}$  のオーダーで十分に小さい。また、各項の値もスペクトル法の結果と良く一致している。

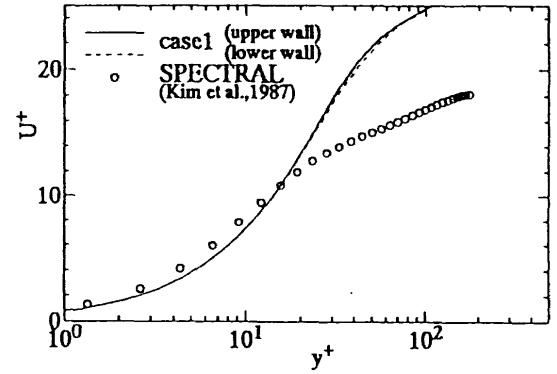


FIG. 2 Mean-Velocity Profile(Case1)

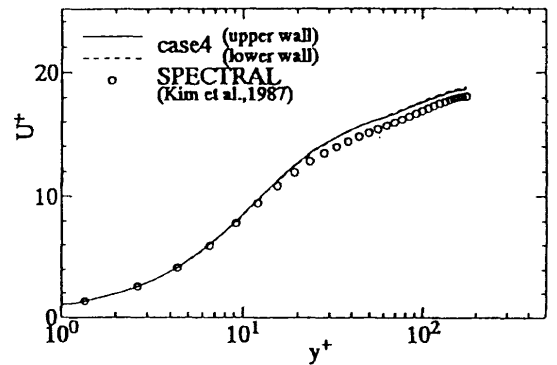


FIG. 3 Mean-Velocity Profile(Case4)

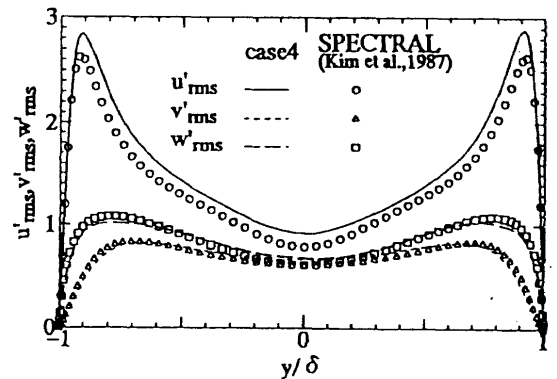


FIG. 4 RMS of Normal Stresses(Case4)

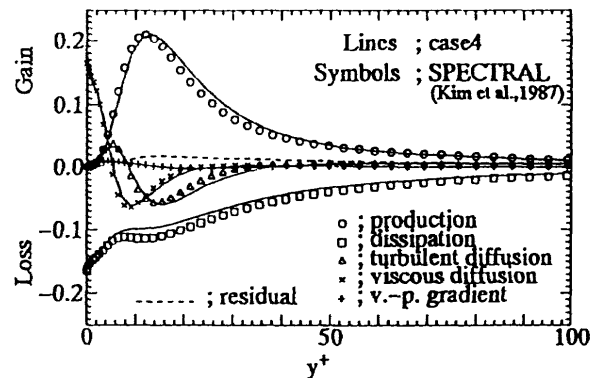


FIG. 5 Budget of the Turbulent Kinetic Energy(Case4)

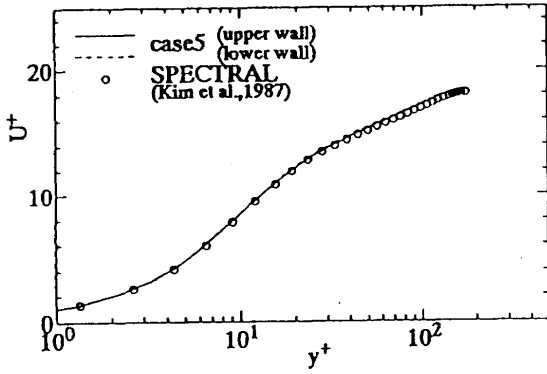


FIG. 6 Mean-Velocity Profile(Case5)

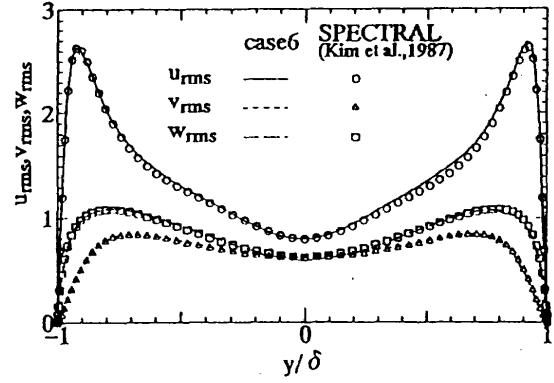


FIG. 10 RMS of Normal Stresses(Case6)

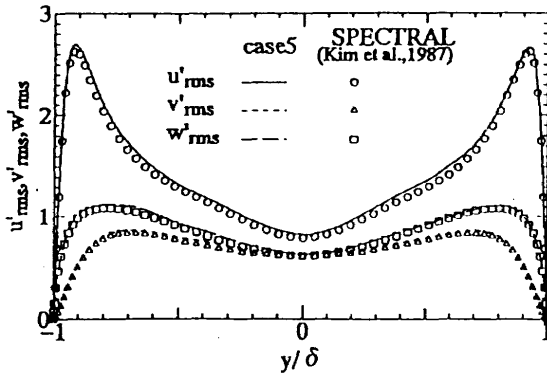
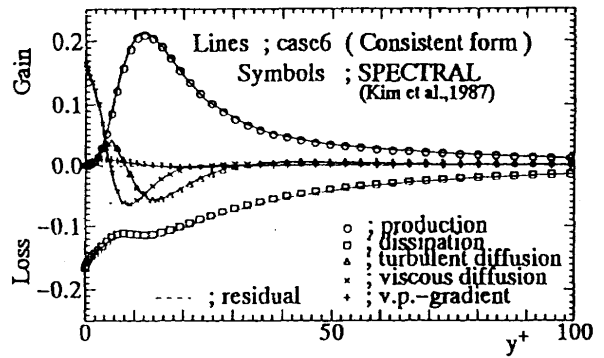
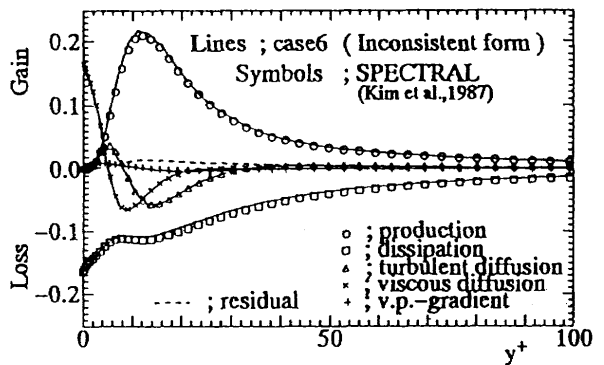


FIG. 7 RMS of Normal Stresses(Case5)



(a) Consistent Scheme



(b) Inconsistent Scheme

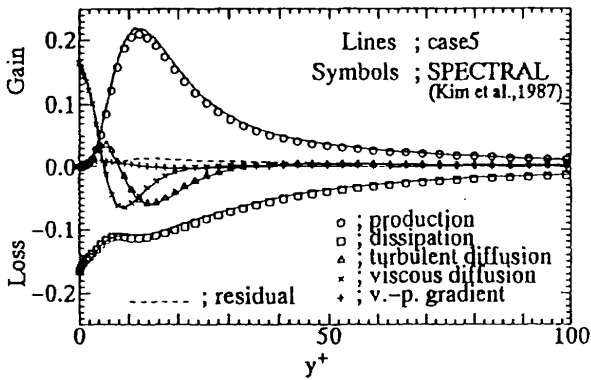


FIG. 8 Budget of the Turbulent Kinetic Energy(Case5)

FIG. 11 Budget of the Turbulent Kinetic Energy(Case6)

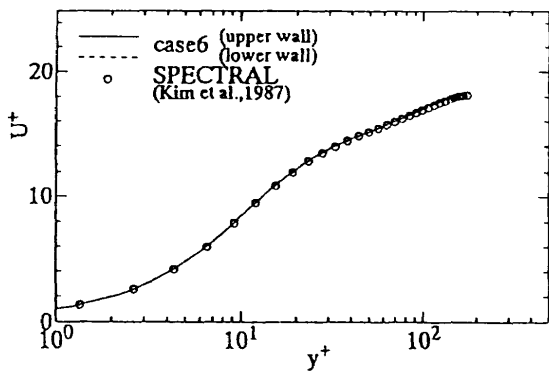


FIG. 9 Mean-Velocity Profile(Case6)

## 7 あとがき

以上、平行平板間乱流を対象に、風上バイアス差分の精度を評価した。さらに、解析微分操作とコンシステント・スキームを用いることにより、2次精度差分でも十分に良い結果の得られることを示した。計算は、IBM スーパーコンピュータシステム GSAP による。記して、感謝する。

### 8 記号説明

Fig. 12 に、各変数の定義点を示す。

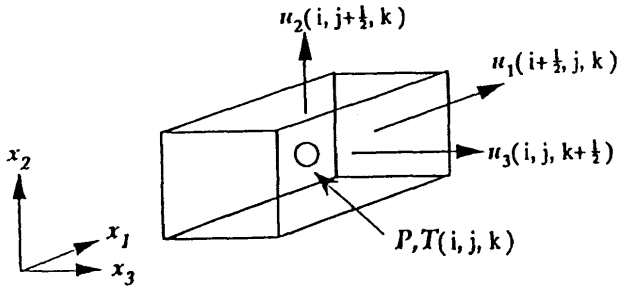


FIG. 12 Staggered Mesh

まず、

$$\vec{i} = (i, j, k) \tag{21}$$

$$\vec{\delta}_i = (\delta_{1i}, \delta_{2i}, \delta_{3i}) \tag{22}$$

$\delta$ : クロネッカーの $\delta$

として、変数を、

$$\phi(\vec{i}) = \phi(i, j, k) \tag{23}$$

2点補間を、

$$\bar{\phi}^{x_j} \Big|_{\vec{i}} = \frac{\phi(\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{\delta}_j) + \phi(\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{\delta}_j)}{2} \tag{24}$$

4点補間を、

$$\bar{\phi}^{x_i x_j} \Big|_{\vec{i}} = \frac{\bar{\phi}^{x_j} \Big|_{\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{\delta}_i} + \bar{\phi}^{x_j} \Big|_{\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{\delta}_i}}{2} \tag{25}$$

と表す。例えば、これらによれば、1階微分において通常用いられる2次精度の中心差分式は、

$$\frac{\delta\phi}{\delta x_j} \Big|_{\vec{i}} = \frac{\phi(\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{\delta}_j) - \phi(\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{\delta}_j)}{\Delta x_j} \tag{26}$$

と、定義できる。

### 参考文献

- [1] Rai, M.M. and Moin, P., *J. Comput. Phys.*, 96(1991), 15.
- [2] 鈴木・河村, JSAE 春季学術講演会前刷集, 931(1993), 1.
- [3] 佐竹・笠木, 第6回数値流体力学シンポジウム論文集, (1992), 333.
- [4] 鈴木・河村, 機講論 No.930-71, (1993), 265.
- [5] Satake, S. and Kasagi, N., *Proc. 5th Int. Symp. Comput. Fluid Dyn.*, Vol.3(1993), 63.
- [6] 鈴木・河村, 機論 No.60-578, (1994), 3280.
- [7] 近藤・鈴木・河村, 第8回数値流体力学シンポジウム論文集, (1994), 273.
- [8] Kim, J., Moin, P. and Moser, R.D., *J. Fluid Mech.*, 177(1987), 133.
- [9] Kawamura, T. and Kuwahara, K., *AIAA*, 84-0340(1987), 133.
- [10] Schumann, U., *J. Fluid Mech.*, 18(1975), 376.
- [11] Kajishima, T., *Proc. 5th Int. Symp. Comput. Fluid Dyn.*, Vol.1(1993), 414.
- [12] 森西, 第9回生研 NST シンポ講演論文集, (1994), 131.