

超音速圧縮・膨張斜面境界層における T-S 波動の挙動

坂上昇史*, 西岡通男*

Tollmien-Schlichting Waves in Supersonic Laminar Boundary Layers
under the Effects of Compression and Expansion

Shoji SAKAUE and Michio NISHIOKA

Dept. of Aerospace Eng., Osaka Prefecture University, 1-1 Gakuen-machi, Sakai-shi, Osaka 593, Japan

The instability of a supersonic flat-plate boundary-layer flow under the effects of compression or expansion is investigated through linear stability calculations and direct numerical simulations. We find that the results of the linear stability theory based on the local parallel flow approximation agree well with those of the DNS for the behavior of small amplitude Tollmien-Schlichting waves. In addition to the viscous stability calculation, we have made the inviscid calculations to clarify that the inflectional instability really governs the behavior of Tollmien-Schlichting waves even at such a low Mach number as 2.2 which is far below the often cited value $M_1 = 4.0$ for the inviscid instability.

Key Words: Supersonic flow, Linear stability theory, Boundary-layer stability, Inflectional instability, Tollmien-Schlichting waves, Compression and expansion ramp

1 はじめに

次世代超音速旅客機の空気抵抗の低減や超音速風洞の低騒音化において、境界層の層流化が重要な課題である。そのための基礎知識として、超音速境界層における微小振幅増幅攪乱の生成条件（受容性）や、壁面の粗度や曲率、熱伝達等の種々の条件下での挙動を知ることが必要である。

微小攪乱の挙動を調べる方法として、線形安定性理論がよく用いられる。LeesとLin¹⁾は非圧縮流の安定性理論を低マッハ数領域の圧縮性流れに拡張し、DunnとLin²⁾はそれを3次元攪乱を含むように拡張した。これら初期の圧縮性流れの安定性解析に対し、Mack^{3, 4)}はNavier-Stokes方程式から導きだした安定性方程式を数値的に解く手法を提案し、高マッハ数領域における圧縮性境界層の3次元安定性解析を行った。超音速境界層は速度分布に

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\bar{\rho} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) = 0 \quad (1)$$

で定義されるいわゆる一般化変曲点を有し、非粘性攪乱に対し不安定であること、粘性はこの変曲点不安定を安定化する方向に働くこと、主流マッハ数が増すと一般化変曲点が壁から離れて粘性の影響が弱まり、 $M_1 \geq 4$ となる領域では、変曲点不安定が攪乱の増幅を支配するようになることなど、今日知られている超音速境界層の不安定性を明らかにしたのもMackである。しかし、安定性問題の定式化は一般に平行流近似に依存しており、壁面の曲率や傾斜による圧縮・膨張過程など急激な流れ方向の変化を伴う場合の解析結果

の妥当性については慎重な判断が求められる。

一方、超音速平板境界層の安定性を調べた実験として、LauferとVrebalovich⁵⁾やKendall⁶⁾による研究が知られているが、超音速境界層中の微小攪乱は風洞側壁の乱流境界層から放射される変動に影響されること、熱線流速計により100kHz程度の変動を正確に計測しなければならぬこと等の困難があり、微小攪乱の生成過程を実験的に明らかにすることは容易ではない。

また、最近では数値流体力学による圧縮性流れの研究が増しつつあるが、T-S波動のような層流制御に絡む微小攪乱の挙動については2次元攪乱の場合でさえ十分な知識が得られていると言えない。

そこで、筆者らは超音速輸送機の巡航速度に相当するマッハ数領域における超音速境界層に注目し、層流制御を行うための基礎知識を得ることを主な目的として研究を行っている。本論文では、主流マッハ数 $M_1 = 2.2$ の2次元層流境界層に注目し、圧縮および膨張の影響によりその構造や挙動がどのように変化するか、TVD法に基づく数値シミュレーションと局所平行流近似の線形安定性解析により調べた。

2 解析対象の流れ場

圧縮・膨張過程の影響下にある流れ場として、図1のような斜面を有する壁面上に形成された主流マッハ数 $M_1 = 2.2$ の2次元層流境界層流れを考える。T-S波動も2次元的であるとし、支配方程式として主流密度 ρ_1 、主流音速 c_1 、主流粘性係数 μ_1 を用いて無次元化された2次元圧縮性N-S方程式を用いる。

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

*大阪府立大学工学部(〒593 堺市学園町1-1)

$$Q = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p - Re^{-1} \tau_{xx} \\ \rho uv - Re^{-1} \tau_{xy} \\ (e+p)u - Re^{-1} q_x \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv - Re^{-1} \tau_{yx} \\ \rho v^2 + p - Re^{-1} \tau_{yy} \\ (e+p)v - Re^{-1} q_y \end{pmatrix}$$

$$Re = \frac{\rho_1 c_1 L}{\mu_1}, \quad Pr = \frac{c_p \mu^*}{\kappa^*}$$

ここで、 Re はレイノルズ数、 Pr はプラントル数、 γ は比熱比を表す。応力成分については、 $(x, y) = (x_1, x_2)$ 、 $(u, v) = (u_1, u_2)$ としてテンソル表示すると

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \quad (i, j, k = 1, 2)$$

$$q_i = \frac{\mu}{Pr} \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\partial T}{\partial x_i} + u_j \tau_{ij}$$

である。図1において基準長さ L は $Re = 4500$ となるように設定されており、吸い込み式風洞を用いた実験に対応させると $L = 0.78\text{mm}$ である。また、主流速度 U_1 と上流境界での運動量厚さに基づくレイノルズ数は 362、下流境界でのそれは 609 である。平板と斜面の接点は $x = 60L$ の位置に設定し、傾斜角は圧縮を伴う場合を正、膨張となる場合を負とする。計算格子は直交座標系において壁面に沿う方向と垂直な方向にとり、式(2)を一般座標変換することにより計算空間で正方格子とする。格子数は 500×160 、格子間隔は $\Delta x = 0.125L$ 、 $\Delta y = 0.0125L$ である。ただし、境界層外では不等間隔格子を使用する。なお計算結果は図1のように壁面に沿う方向に x 軸、垂直な方向に y 軸をとって表示する。

数値計算は、対流項に対しては Chakravarthy と Osher⁷⁾ による3次精度の TVD スキームを、粘性項は2次の中心差分を、セル境界での物理量は Roe の近似⁸⁾ を用いて評価する。また、時間積分は2次精度の陽解法を用いる。風上差分法である TVD スキームを用いるのは、超音速流を対象としており、衝撃波などの不連続面の発生を念頭においているからである。

境界条件は、壁面については滑りなしで断熱壁とする。上方境界と下流境界は零次外挿とする。下流境界での零次外挿が境界層内の亜音速部分において上流へ伝播する特性波を精密に表現しないときには、その影響が下流境界近傍に現れるが、その影響域は緩衝領域とみなし解析の対象から除くことにする。

上流境界では平均流成分に

$$[\bar{\rho}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{p}, \bar{T}]^t \quad (3)$$

$$= A \times [r(y), f(y), \alpha_0(y), \pi(y), \xi(y)]^t \exp[i(\alpha x - \omega t)]$$

の形(角振動数 ω 、波数 α_r 、空間増幅率 $-\alpha_i$) の微小振幅の2次元波動型攪乱を重ね合わせる。攪乱の固有

値、固有関数は、Mack³⁾の方法に基づく線形安定性解析により得られた結果を採用した。今回解析の対象とする攪乱の固有値は、数値計算の基準量(主流密度 ρ_1 、主流音速 c_1 、長さ L) で無次元化すると、上流境界において

$$\omega = 1.2469, \quad \alpha = 0.93390 - i 1.8072 \times 10^{-2}$$

である。攪乱の初期振幅は上流境界において速度変動 \bar{u} の振幅の最大値が主流流速 U_1 の 0.1% となるように式(3)の係数 A を定めた。

輸送特性は、プラントル数 Pr を定数 (= 1) とみなし、粘性係数 μ の温度依存性のみを考慮する。ここでは数値計算と線形安定性解析の結果を比較することを考慮して、両方で粘性係数が温度に比例するものとして次式により評価する。

$$\frac{\mu}{\mu_0} = b \frac{T}{T_0} \quad (4)$$

$$\left(b = \sqrt{\frac{T_w}{T_0}} \frac{T_0 + S_1}{T_w + S_1} \right) (= 1: \text{for adiabatic wall})$$

なお、添字 0 は貯気槽状態、 w は壁面の状態を表す。

3 圧縮・膨張斜面を過ぎる流れ

圧縮・膨張の影響として、圧縮の場合はコーナー近傍に剥離域が、膨張の場合はコーナーより膨張波が発生する。図2に壁面圧力 p_w と局所摩擦応力係数 C_f の x 方向変化を示す。非粘性流の場合は圧縮斜面のコーナーが斜め衝撃波の発生により不連続点となるが、粘性流の場合はコーナーが壁面近くの逆流域低速流の向きを急変させ、 C_f 分布が図2(b)のように急変するだけであり、平均流に対するコーナーの影響は顕著でない。逆に、膨張斜面の場合、境界層内の亜音速部を通してコーナーで発生する膨張波の影響が上流側へ伝わるが、その影響域は圧縮斜面に比べて狭く、圧縮の場合よりも急な変化となっている。このような平均流に関する結果は、 C_f 分布の急変部分や臨界剥離の傾斜角などについて triple-deck 理論⁹⁾ の結果と比較し、数値計算の信頼性を確認している¹⁰⁾。

4 T-S 波動の挙動

図2に示した平均流に微小攪乱を導入しその下流における挙動を数値計算と安定性解析により追跡した。図3は $\theta = 0.0^\circ$ (平板境界層)、図4は $\theta = -4.0^\circ$ の場合の (a) 平均速度 \bar{u} 、(b) 変動の振幅および (c) 位相の y 方向分布を示す。縦軸は $\delta = x/Re_x^{1/2}$ で定義される長さ δ で無次元化されている。なお、圧縮斜面の場合については文献10,11に詳しいので省略する。密度変動 $\bar{\rho}$ や温度変動 \bar{T} は一般化変曲点位置で最大値をとり、本研究の主流マッハ数 ($M_1 = 2.2$) においても T-S 波動は変曲点不安定の性格を示している。また、数値解

と安定性解析の結果は、圧縮・膨張にかかわらず、コーナー ($x = 60L$) 近傍の非平行流の影響を無視できない領域を除いて流れ場全体でよく一致している。

図5(a)は攪乱振幅が空間増幅する様子を、図5(b)は図5(a)の結果をもとに

$$-\alpha_i = \frac{\ln(A(x + \Delta x)/A(x))}{\Delta x} \quad (\Delta x = 1.25L) \quad (5)$$

として求めた局所増幅率 $-\alpha_i$ を示す。圧縮斜面の場合、一般化変曲点における $\bar{\rho}(\partial\bar{u}/\partial y)$ の増加に伴って(図6参照)、攪乱の振幅・増幅率は増加する^{10, 11)}。一方、膨張斜面の場合は $\theta \leq -2.0^\circ$ においてコーナー下流で一般化変曲点が消滅することにより、T-S波動は減衰に転じている。すなわち、攪乱は変曲点不安定に強く影響されることを示している。

図7は波数 α_r の x 方向の変化を示す。波長は圧縮による減速によっては短く、膨張による加速では長くなる。また、数値解と安定性解析の結果は、コーナー近傍の非平行流の影響が強い領域を除いて、ここでもよく一致している。

以上の結果より、安定性解析は圧縮・膨張に伴うT-S波動の挙動の変化をとらえており、攪乱の挙動予測における理論の有用性を示しているといえる。なお、図5, 7において、膨張斜面下流で数値解と安定解析の結果が大きくずれているが、これは図8のように、T-S波動の流下によりコーナーから発生する膨張波に沿って伝わる新たな攪乱が現れるためである。この攪乱はT-S波動と同じ周波数をもっており、数値解はこの影響を分離できていない。

5 超音速境界層の不安定性

前節の結果より、T-S波動の増幅率は境界層分布の一般化変曲点における $\bar{\rho}(\partial\bar{u}/\partial y)$ の値に追従して増減する。このことは変曲点不安定が攪乱の挙動を支配することを示す証拠である。変曲点不安定は非粘性であるので、非粘性攪乱に対する線形安定性解析を行う。

式(3)の形の非粘性攪乱に対する安定性方程式は、次の圧力変動 π に関する2階の常微分方程式として表される。

$$\pi'' - \left[\frac{2\bar{u}'}{\bar{u}-c} - \frac{\bar{T}'}{\bar{T}} \right] \pi - \alpha^2 \left[1 - \frac{(\bar{u}-c)^2 M_1^2}{\bar{T}} \right] \pi = 0 \quad (6)$$

ここで'は y 方向の微分を表し、複素数 c は $c = \omega/\alpha$ を表す。式(6)に境界条件として

$$\bar{v}(0) = 0, \quad \bar{v}(y) \text{ bounded as } y \rightarrow \infty \quad (7)$$

を適用することにより固有値問題を形成する。

図9は、数値解と同じ角振動数をもつ粘性・非粘性攪乱の(a)波数 α_r と(b)増幅率 $-\alpha_i$ の x 方向変化の比較である。両者の波数 α_r は驚くほどよく一致している。一方増幅率 $-\alpha_i$ は変化の傾向はよく合っているが、

その値は膨張斜面 ($\theta = -4.0^\circ$) の $x = 70L$ 近傍を除くと、非粘性攪乱の方が粘性攪乱より大である。

一般に粘性の影響は壁面近傍に限定され、変曲点不安定に対し境界層を安定化させる方向に働くことを考慮すると、今回調べた $M_1 = 2.2$ の超音速境界層におけるT-S波動の挙動は、本質的には非粘性の変曲点不安定性に由来するといえる。また、非粘性攪乱に対する安定性解析を行うことにより、圧縮・膨張過程による攪乱の挙動(振幅や波長)の変化を十分予測できる(ただし、壁面の境界条件の違いにより、当然ながら固有関数分布については予測できない)。

6 まとめ

主流マッハ数 $M_1 = 2.2$ の圧縮・膨張斜面周りの境界層におけるT-S波動の挙動について、TVD法で計算された数値解と線形安定性解析の結果を比較した。それにより、このマッハ数領域においてもT-S波動は一般化変曲点に由来する変曲点不安定に支配されることがわかった。また、圧縮・膨張過程はこの変曲点不安定に直接影響を及ぼし、圧縮の場合は境界層の不安定化に、膨張の場合は安定化の方向に働くことを明らかにした。圧縮・膨張どちらの場合についても、安定性解析は微小攪乱の挙動を予測でき、理論の有用性が示された。

本研究は部分的に文部省の科学研究費(課題番号08455465)の援助を受けた。

引用文献

- 1) L. Lees and C. C. Lin: Investigation of the stability of the laminar boundary layer in a compressible fluid, NACA-TN1115 (1946).
- 2) D. W. Dunn and C. C. Lin: On the stability of the laminar boundary layer in a compressible fluid, J. Aero. Sci. **22** (1955) 455-477.
- 3) L. M. Mack: Computation of the stability of the laminar compressible boundary layer, *Methods in Computational Physics*, Vol.4 (Academic Press, 1965) 247-299.
- 4) L. M. Mack: Linear stability theory and the problem of supersonic boundary-layer transition, AIAA J. **13** (1975) 278-289.
- 5) J. Laufer and T. Vrebalovic: Stability and transition of a supersonic laminar boundary layer on an insulated flat plate, J. Fluid Mech. **9** (1960) 257-299.
- 6) J. M. Kendall: Wind tunnel experiments relating to supersonic and hypersonic boundary layer transition, AIAA J. **13** (1975) 290-299.
- 7) S. R. Chakravarthy and S. Osher: A new class of high accuracy TVD schemes for hyperbolic conservation laws, AIAA 85-0363 (1985).
- 8) P. L. Roe: Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes, J. Comp. Physics **43** (1981) 357-372.
- 9) D. P. Rizzetta, O. R. Burggraf and R. Jenson: Triple-deck solutions for viscous supersonic and hypersonic flow past corners, J. Fluid Mech. **89** (1978) 535-552.
- 10) 坂上昇史, 西岡通男: 圧縮斜面周りの超音速境界層におけるT-S波動の挙動, ながれ **15** (1996) 124-132.
- 11) 坂上昇史, 西岡通男: 超音速境界層におけるT-S波動の挙動と変曲点不安定, NAL-SP (1996) (to be submitted).

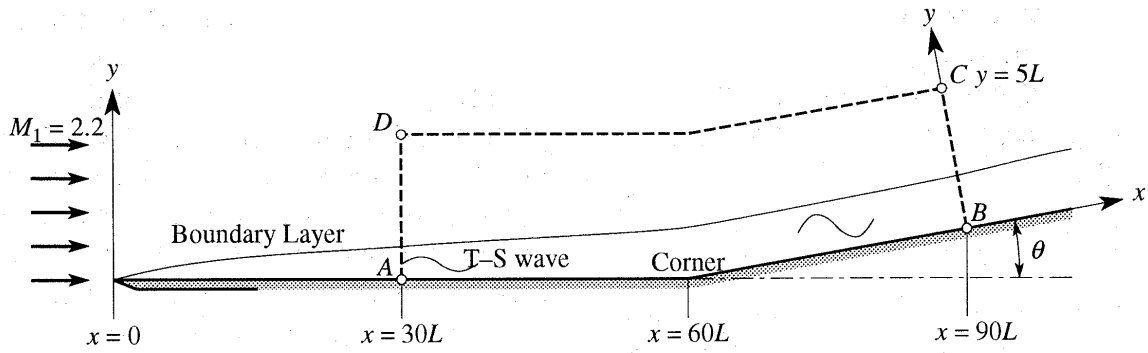


図1 計算領域.

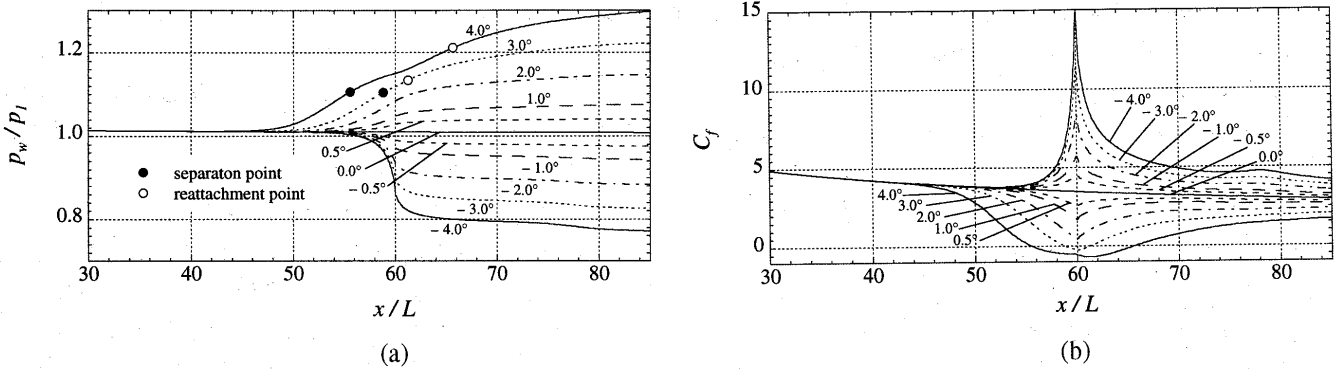


図2 斜面を過ぎる超音速境界層 ($M_1=2.2$) の (a) 壁面圧力 p_w と (b) 局所摩擦応力係数 C_f .

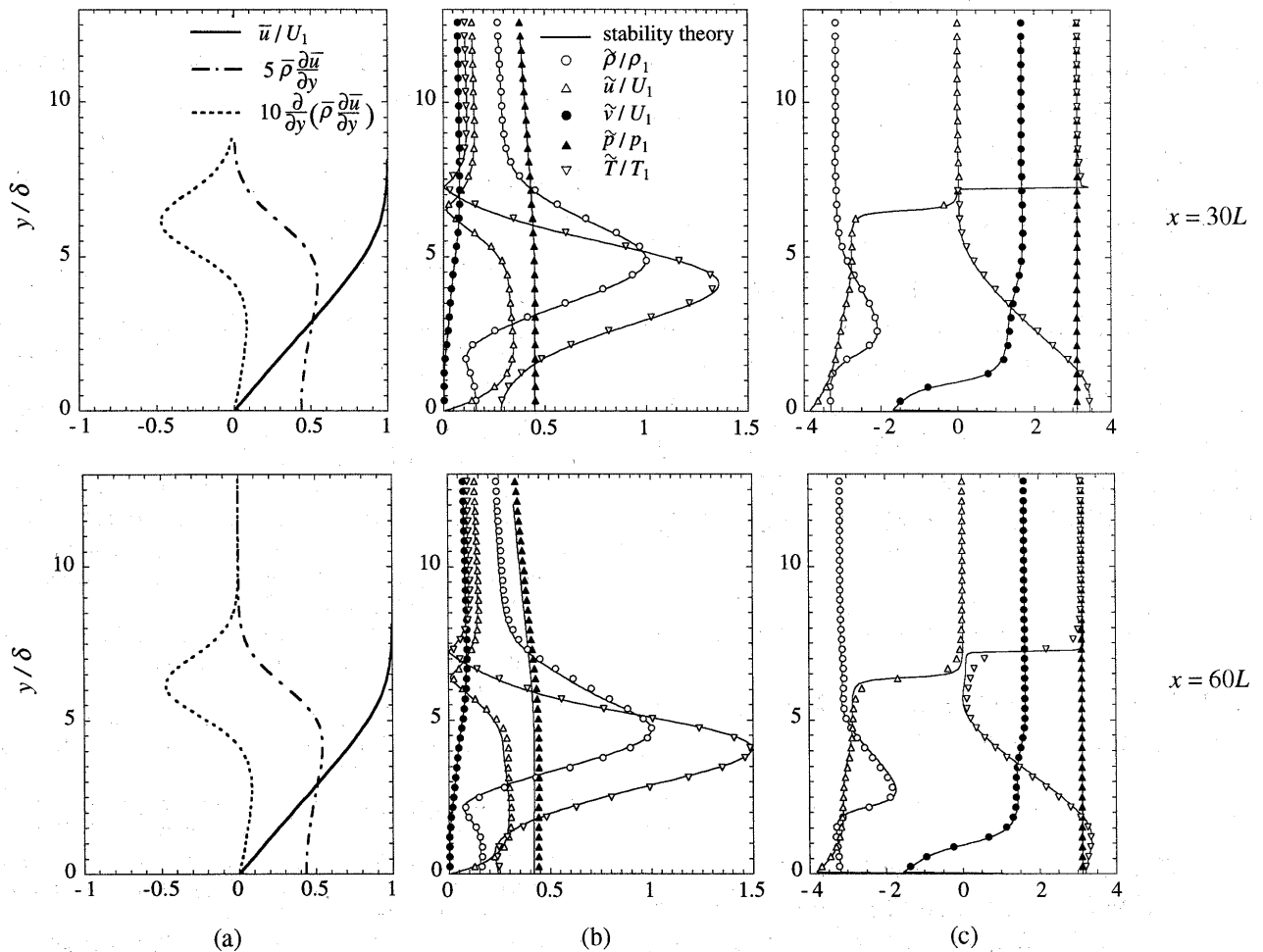


図3 平板境界層におけるT-S波動に関する数値解と線形安定性解析との比較 ($M_1=2.2$)
 (a) 平均流速, (b) T-S波動の振幅, (c) 位相 (rad) の y 方向分布.

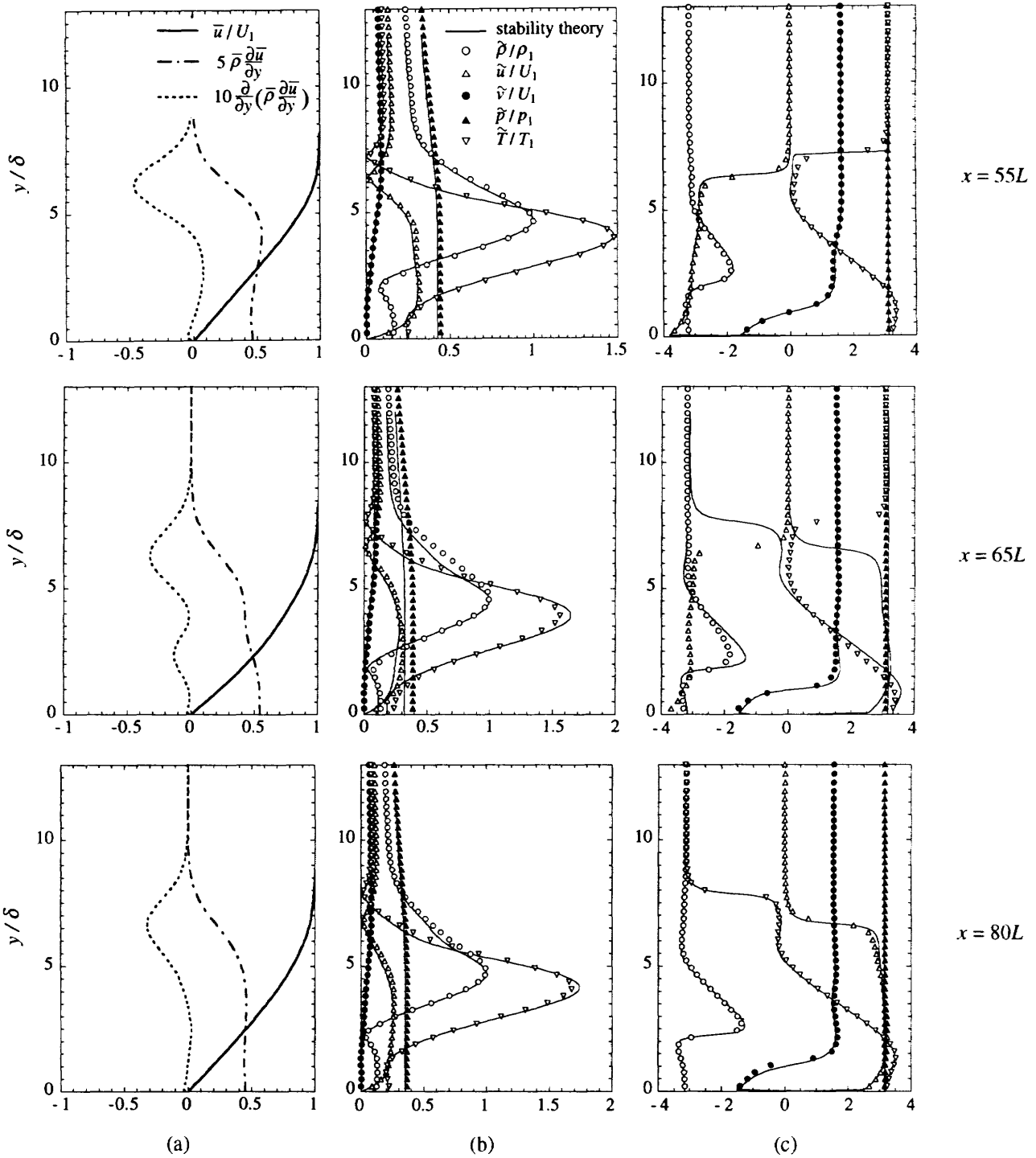


図4 膨張斜面周りのT-S波動に関する数値解と線形安定性解析との比較 ($M_1 = 2.2, \theta = -4.0^\circ$) :
 (a) 平均流速速度, (b) T-S波動の振幅, (c) 位相 (rad) のy方向分布.

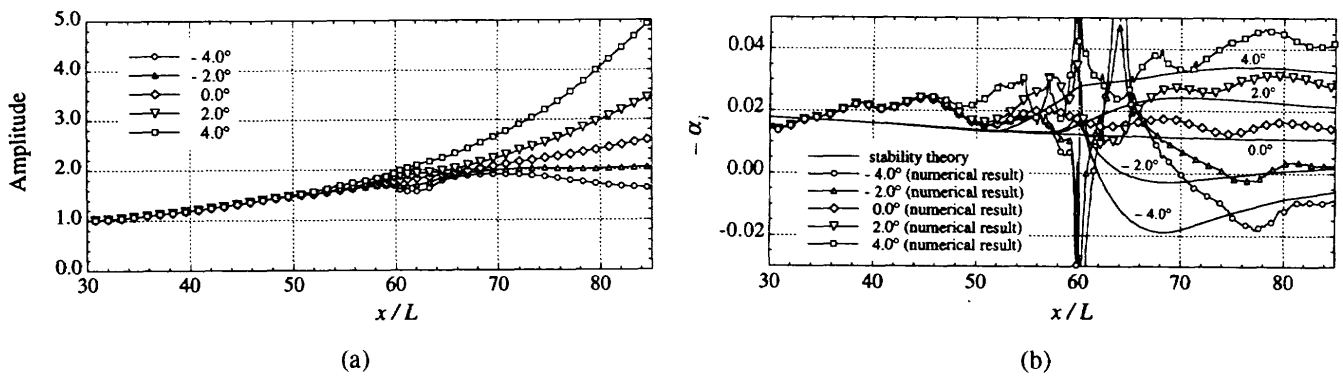


図5 圧縮・膨張過程がT-S波動に及ぼす影響: (a) 振幅比, (b) 空間増幅率 $-\alpha_i$ の流れ方向変化.

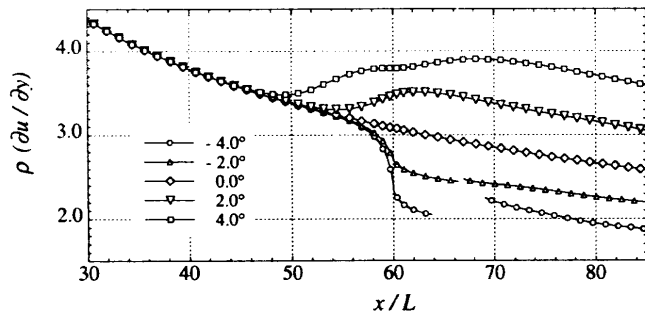


図6 一般化変曲点における $\bar{\rho} (\partial \bar{u} / \partial y)$ の大きさ.

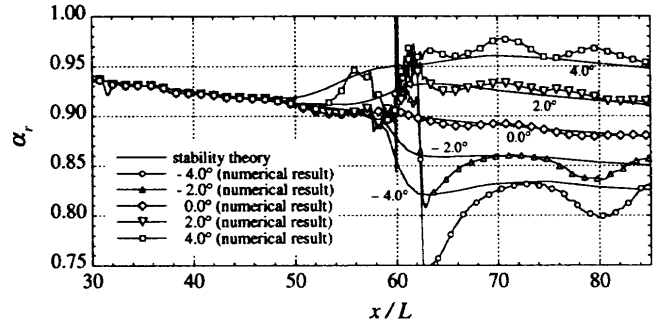


図7 圧縮・膨張過程がT-S波動に及ぼす影響：波数 α_r の流れ方向変化.

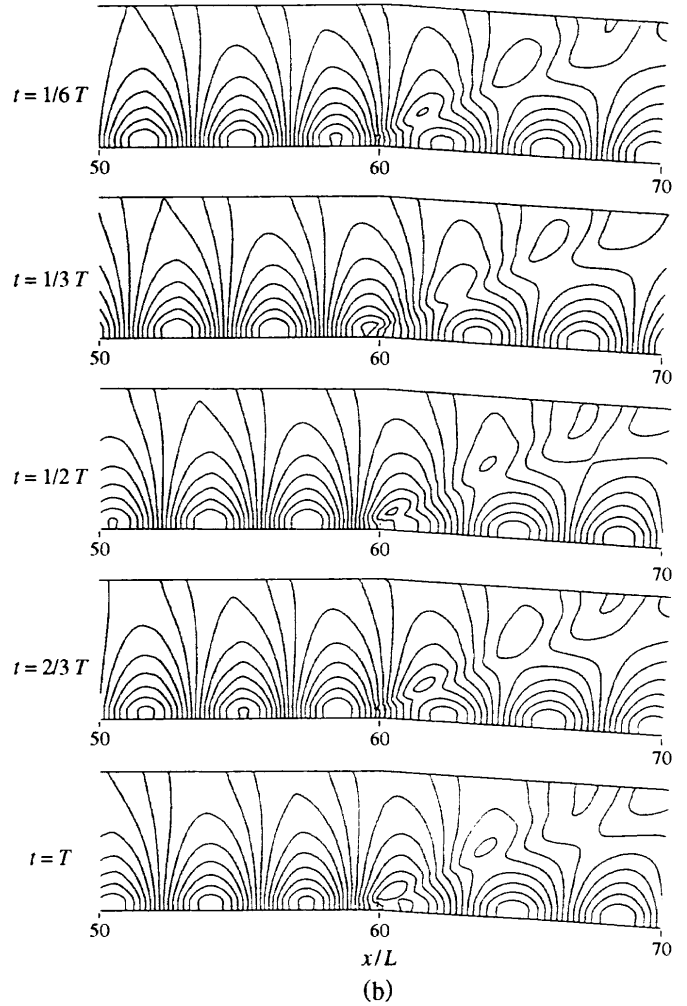
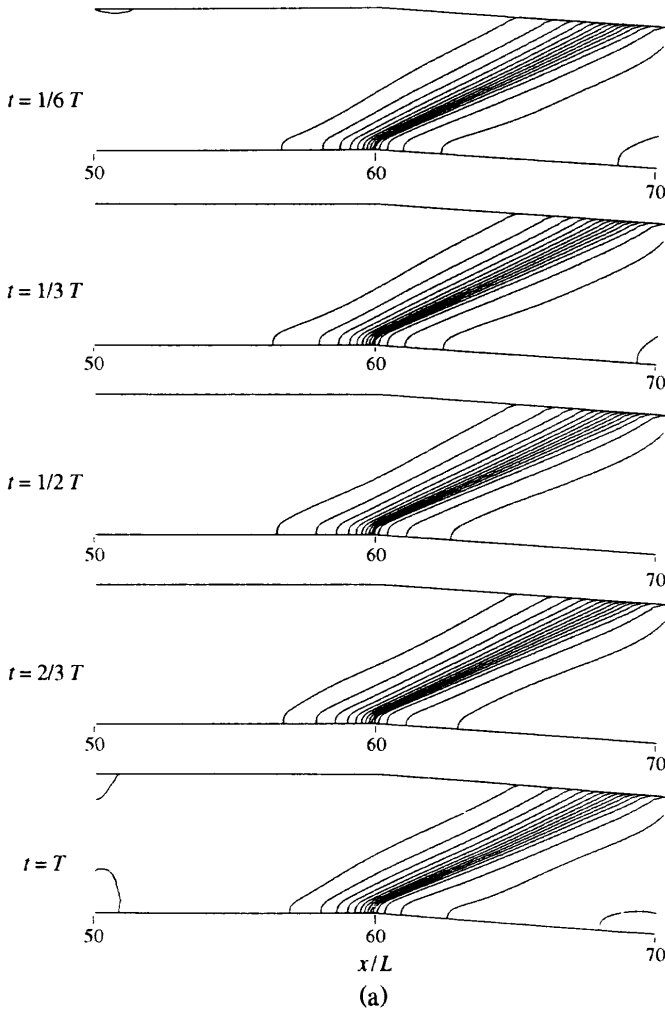


図8 膨張斜面を過ぎる流れ場：(a) コーナーで生じる膨張波，(b) 圧力変動 (\tilde{p}) の等値線図.

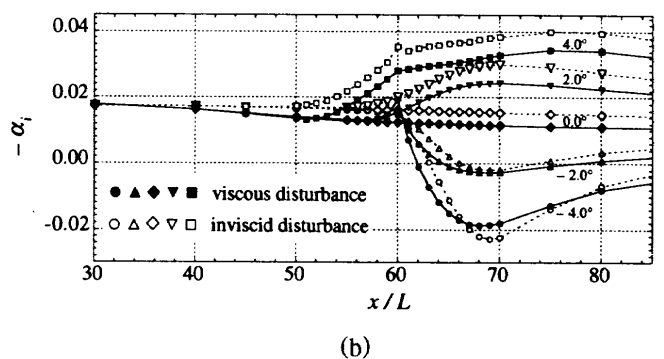
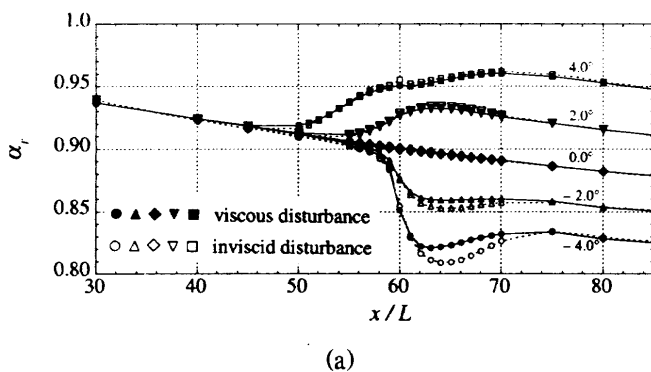


図9 粘性・非粘性攪乱に対する安定性解析：(a) 波数，(b) 空間増幅率.