

No. 10

超音速境界層における T-S 波動の挙動と変曲点不安定

坂上昇史*, 西岡通男*

A Numerical Study of Tollmien-Schlichting Waves
in Supersonic Laminar Boundary Layer and Inflectional Instability

Shoji SAKAUE and Michio NISHIOKA

Osaka Prefecture University

The stability of supersonic boundary layer flow past a flat plate/compression ramp combination and the behavior of Tollmien-Schlichting waves are investigated using direct simulation and linear stability analysis. At Mach number 2.2, the two-dimensional periodic disturbances are introduced into the flow as the upstream boundary conditions and the boundary layer responses are studied through directly solving the 2D Navier-Stokes equations using a TVD scheme. Results are presented for a range of corner angles, including separated cases. We find that the increase in $\rho(\partial u/\partial y)$ at the so-called generalized inflection point gives rise to the increase in the spatial amplification rate considerably as the ramp angle increases.

Key Words : supersonic flow, boundary layer stability, Tollmien-Schlichting waves, linear stability theory, TVD scheme, inflectional instability

1. はじめに

次世代の超音速輸送機の開発における技術的課題の1つに翼境界層の層流化による空気抵抗の低減がある。その実現のための基礎研究として、乱流遷移の第1段階である微小振幅増幅攪乱の生成条件（受容性）や、種々の条件下における微小攪乱の挙動を調べることが重要である。筆者らは、微小攪乱の挙動を数値計算により調べることに、この層流制御に必要な基礎知識を得ることを目的として研究を続けており、圧縮性 N-S 方程式に対する計算コードを作成、T-S 波の構造・挙動に関して数値解と線形安定性解析の結果を比較することによる計算精度の検証をおこなった¹⁾。また、圧縮斜面周りの超音速流れに注目し、斜面による T-S 波動の構造や挙動の変化を調べた結果、斜面の傾斜角が増加すると攪乱の増幅率が增大し、斜面下流において特にその傾向が顕著であること、また、その変化が一般化変曲点における $\rho(\partial u/\partial y)$ の増加に伴って生じることを明らかにした²⁾。

本研究では、これら微小攪乱の挙動や境界層の不安定要因の解析を目的として、数値計算で得られた圧縮斜面

周りの境界層分布を局所的に平行流を仮定して線形安定性解析を行い、数値解との比較を行った。その結果、流れ方向の変化に関してずれがあるものの、線形安定性解析により微小攪乱の挙動を捉える得ること、一般化変曲点における $\rho(\partial u/\partial y)$ の大きさ、すなわち、変曲点不安定の寄与が T-S 波の挙動を支配していることを明らかにした。

2. 計算モデル

計算モデルとしては、斜面を有する壁面上に形成される主流マッハ数 $M_1=2.2$ の 2 次元層流境界層を含む領域を考え、壁面に沿って x 軸、壁面と垂直な方向に y 軸をとる（図 1）。支配方程式は、2 次元圧縮性 N-S 方程式を用い、数値計算は、Chakravarthy と Osher³⁾ による 3 次精度の TVD スキームに基づく計算コードを用いて行った^{1, 2)}。計算領域は、数値計算における無次元化の基準量、主流密度 ρ_1 、主流音速 c_1 、長さ L 、主流粘性係数 μ_1 をもとに次のように設定する²⁾。

$$Re = \rho_1 c_1 L / \mu_1 = 4500$$

$$\text{平板前縁からの距離} : x = 30L \sim 90L$$

$$\text{壁からの距離} : y = 0 \sim 5L$$

$$\text{斜面の傾斜角} : \theta = 0.0^\circ \sim 4.0^\circ$$

$$\text{格子数} : x \text{ 方向} \times y \text{ 方向} = 500 \times 160$$

*大阪府立大学工学部

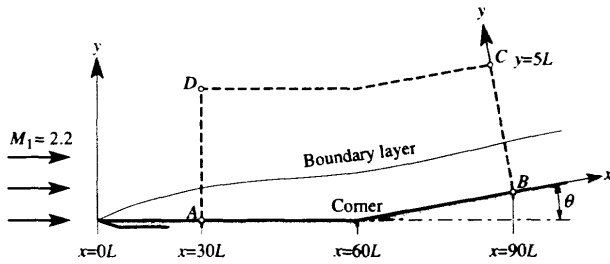


図1 計算領域

格子間隔： $\Delta x=0.1250L, \Delta y=0.0125L$

計算領域上流境界での境界層厚：約 $0.55L$

$$= 10x / Re_x^{1/2}$$

下流境界での境界層厚：約 $0.95L$

この計算領域を通例の吸い込み式風洞を用いた実験に対応させると、平板前縁から約 $23\sim 70\text{mm}$ ($L=0.78\text{mm}$)の領域に相当し、斜面は前縁から約 47mm の位置にある。

微小攪乱としては、

$$[\bar{\rho}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{p}, \bar{T}]^T(x, y, t) = [\rho', u', v', p', T']^T(y) \times \exp[i(\alpha x - \omega t)] \quad (1)$$

の形で与えられる空間増幅型の攪乱を考え、Mack⁴⁾の方法に基づいて線形安定性解析を行った。今回解析の対象とした攪乱の固有値は、上流境界において線形安定性解析の基準量 ρ_1 、主流流速 U_1 および長さ δ ($\delta = x / Re_x^{1/2}$)を用いて無次元化すると次のようになる。

$$R = \rho_1 U_1 \delta / \mu_1 = 544.98 \quad (U_1 = M_1 c_1, \delta = 0.05505L)$$

$$\omega = 0.03120$$

$$\alpha = 0.514093706167 \times 10^{-1} - i 0.994804359750 \times 10^{-3}$$

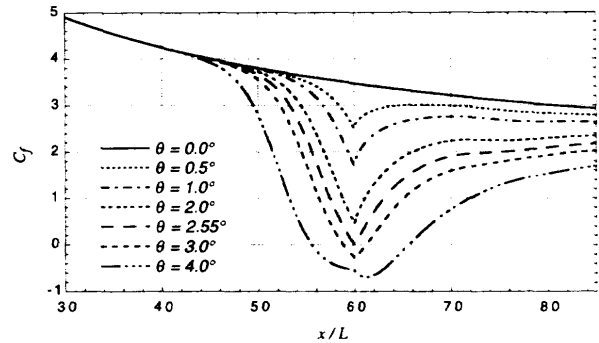
数値計算における基準量 L, c_1 で無次元化するとき、これらの固有値は上流境界において次の値をとる：

$$\omega = 1.2469, \alpha = 0.93390 - i 1.8072 \times 10^{-2}$$

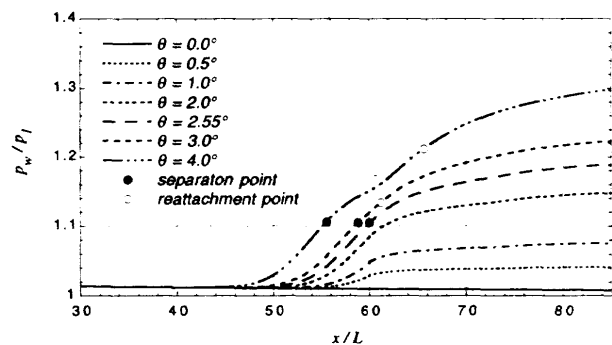
3. 計算結果

まず、数値計算によって得られた平均流の結果を示す。図2(a)は圧縮斜面周りの壁面における摩擦応力係数 C_f 、(b)は壁面の圧力の流れ方向の変化を示したものである。Triple-deck理論⁵⁾による結果と比較すると、それぞれほぼ一致した結果を示しており、また、臨界剥離の傾斜角 (incipient separation angle) は、本計算では $\theta = 2.55^\circ$ 、triple-deck理論によると $\theta = 2.61^\circ$ であった。

このような平均流を局所的に平行流と仮定して線形安定性解析を行い、微小攪乱を導入したときの数値計算の結果と比較した。平板 ($\theta = 0.0^\circ$) の場合、数値計算と線形安定性解析の結果はよい一致を示す¹⁾ので、傾斜角 $\theta = 4.0^\circ$ の場合について変動の振幅と位相の y 方向分布を比較した結果を図3に示す。図3(a)は平均流の流れ方向



(a)



(b)

図2 圧縮斜面を過ぎる超音速境界層 ($M_1=2.2$) の(a) 摩擦応力係数 C_f と(b)壁面上の圧力 p_w/p_1 。圧縮斜面のコーナー位置： $x/L=60$ 、図1参照。

速度、(b)は変動の振幅、(c)は位相の各 y 方向分布である。変動の振幅は密度変動の最大値で正規化してある。超音速境界層の特徴として、

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0 \quad (2)$$

を満たす点として定義される一般化変曲点が流れ場中に現れるとそれに起因する非粘性型の不安定性 (変曲点不安定) が生じることがあげられる。今回調べた $M_1=2.2$ の流れにおいても、T-S波の振幅は、密度、温度変動については一般化変曲点近傍に最大値をとり、また、速度 u 変動についてもピークを持っており、変曲点不安定の影響が顕著であると考えられる。この一般化変曲点が斜面の上流側では境界層外縁へ、下流側では壁面へ向かって移動するのに対応して、固有関数におけるこのピークも移動している。線形安定性解析の結果はこの変化を捉えており、T-S波が平均流の各 x 位置での局所的な性質、すなわち、一般化変曲点に伴う不安定性に強く影響されていることがわかる。なお、コーナー近傍において、特に流れ方向速度の振幅分布のずれが顕著であるが、これは、斜面による流れの偏向に伴う非平行性による影響が現れている¹⁾と考えられる。

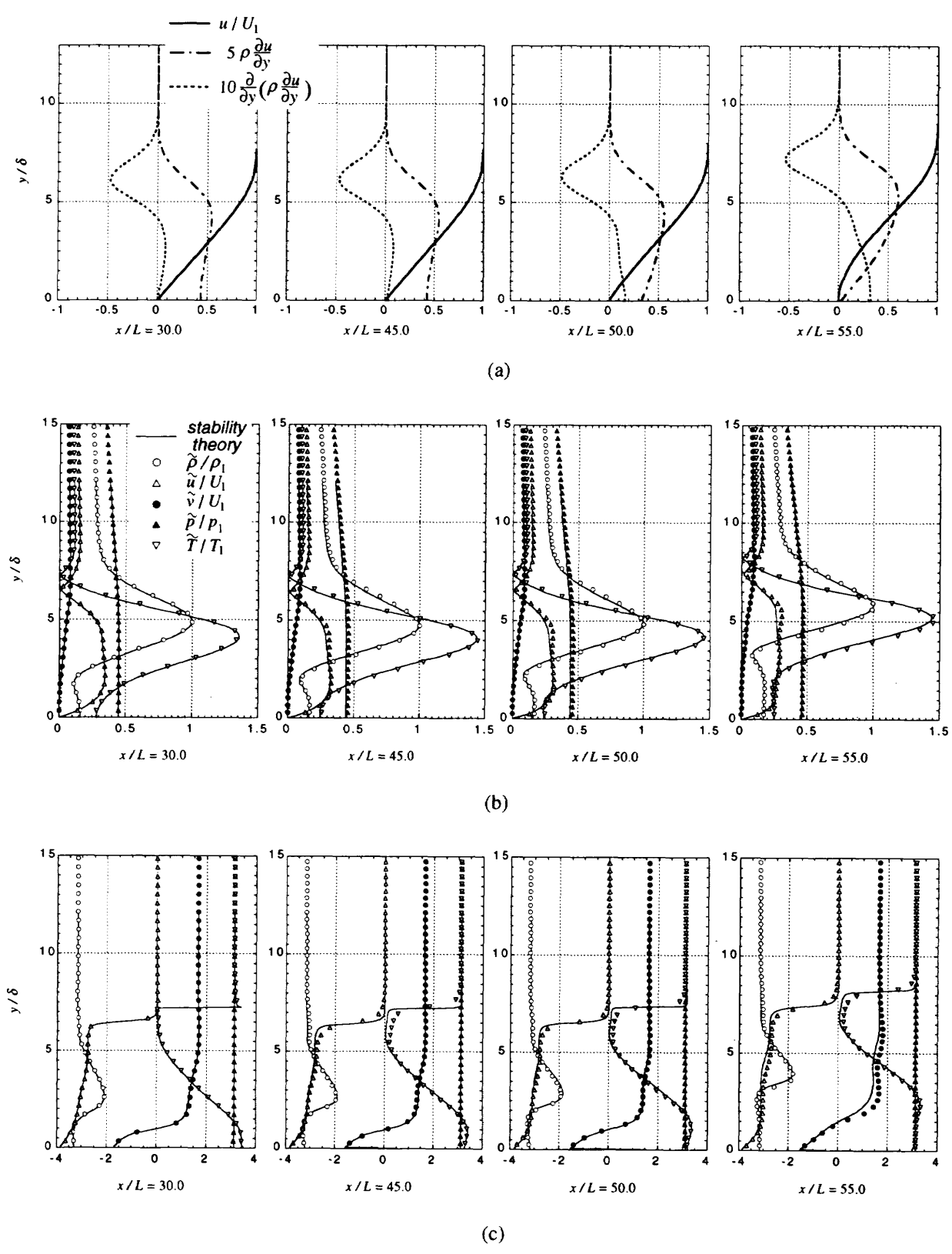


図3 圧縮斜面周りのT-S波動に関する数値解と線形安定性解析との比較 ($M_1=2.2$, $\theta=4.0^\circ$):
 (a)平均流の速度, (b)T-S波動の振幅, (c)位相, のy方向分布。

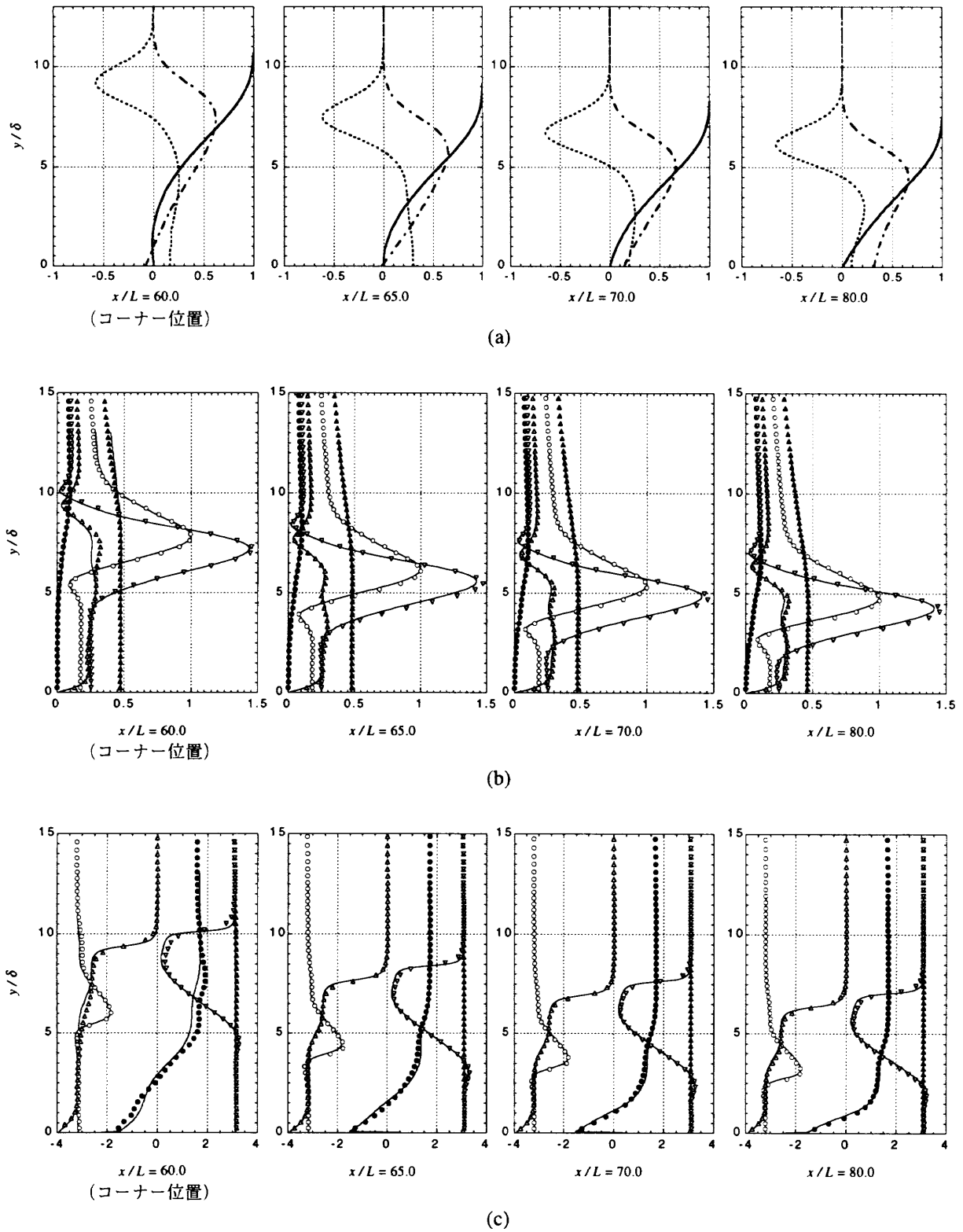


図3 圧縮斜面周りの T-S 波動に関する数値解と線形安定性解析との比較 ($M_1=2.2$, $\theta=4.0^\circ$):
 (a)平均流の速度, (b)T-S 波動の振幅, (c)位相, の y 方向分布 (つづき)

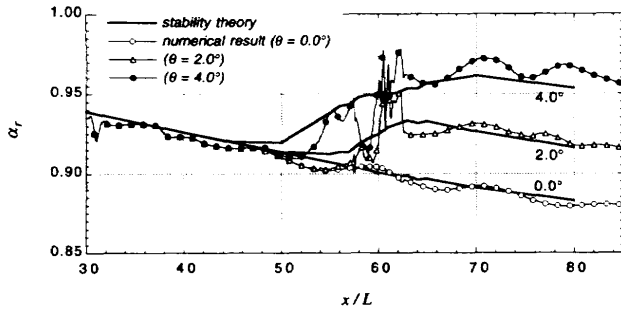


図4 圧縮斜面周りのT-S波動に関する数値解と線形安定性解析との比較：波数 α_r ， $M_1=2.2$ 。

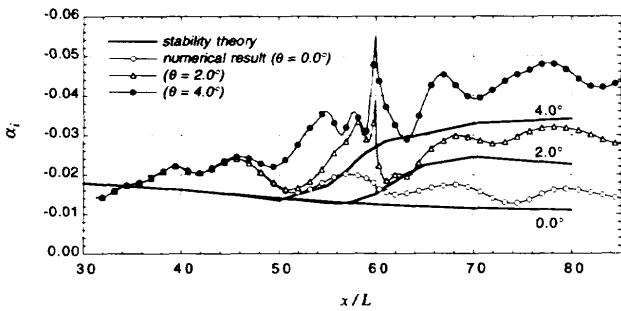


図5 圧縮斜面周りのT-S波動に関する数値解と線形安定性解析との比較：増幅率 α_i ， $M_1=2.2$ 。

図4は、波数 α_r の流れ方向の変化について、数値計算と安定解析の結果を比較したものである。コーナー近傍の斜面による流れの非平行性が顕著である領域を除いて両者の一致は極めて良好である。

図5は、増幅率 α_i の流れ方向の変化について、同様に比較したものである。斜面の傾斜角による増幅率の変化する傾向やその割合はほぼ捉えられているが、波数に比べるとずれが大きい。また、数値計算の結果は流れ方向に波打ちがみられる。この波打ちは、攪乱のエネルギーに寄与する成分として微小な変動が存在するためであり、増幅率を計算すると明確に現れてくる。この波打ちは周期的であることから誤差とは考えにくい。線形安定性解析は純粋にT-S波成分のみを扱うのに対し、本数値計算は流れの非平行性に伴う攪乱の変化などをすべて計算しているはずであるから、T-S波動モード以外の周期攪乱も現れる可能性が考えられる。このような周期攪乱としては非粘性モードなどがその候補であり、予備的な安定解析の結果はこの推論を支持しているが、これについてはより詳細な検討を行う予定である。

図6は、T-S波動を増幅させる要因の1つとして考えられる、一般化変曲点における角運動量に比例する量である $\rho(\partial u / \partial y)$ と増幅率を比較したものである。図6(a)，(b)は図5の増幅率を平板の場合の局所値で正規化したもの、(c)は各 x 位置における一般化変曲点での $\rho(\partial u / \partial y)$ の値を示したものである。線形安定

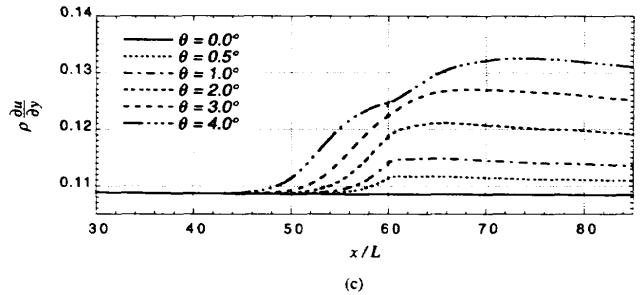
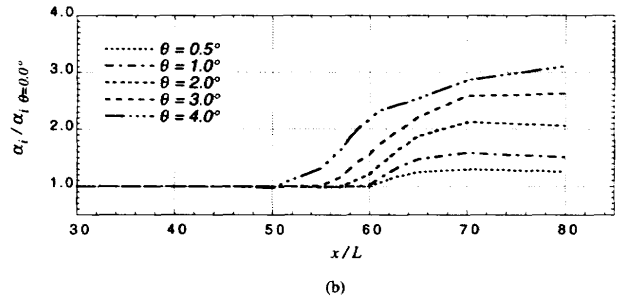
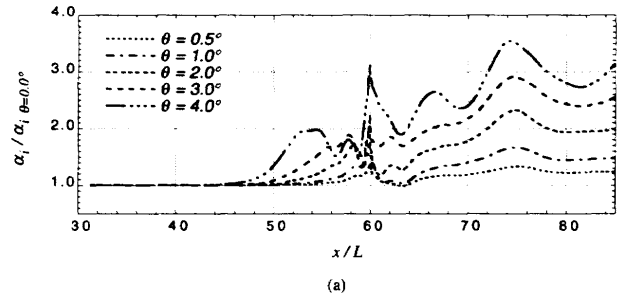


図6 攪乱の増幅率と $\rho(\partial u / \partial y)$ の関係：(a) $\theta = 0.0^\circ$ の値で正規化した増幅率（数値解），(b)同（線形安定性解析），(c)一般化変曲点における $\rho(\partial u / \partial y)$ の流れ方向変化。

性解析の結果からも、一般化変曲点における $\rho(\partial u / \partial y)$ が流れ方向に増加するのに伴って攪乱の増幅率が増加すること、すなわち、圧縮斜面による境界層の不安定性は、変曲点不安定の寄与が増大するためであり、この変曲点不安定は変曲点における $\rho(\partial u / \partial y)$ の大きさに強く依存すること、それがT-S波モードの挙動を支配することを明確に示している。また、平均流分布が得られればその一般化変曲点における $\rho(\partial u / \partial y)$ の値をもとに流れの不安定性が、変曲点不安定の寄与として評価できることが、本研究の重要な成果として、明らかにされた。Mack⁸⁾によると、超音速境界層内の微小攪乱の挙動において、変曲点不安定が支配的となるのは $M_1=4.0$ 以上の流れである。これに対し、本研究は、 $M_1=2.2$ の流れにおいても一般化変曲点における $\rho(\partial u / \partial y)$ の大きさ、すなわち、変曲点不安定の寄与が重要であり、それがT-S波モードの挙動を支配することを明確に示している。これは、超音速境界層の層流制御の観点から重要な知見である。また、数値計算に

より得られた境界層分布を局所的に平行流を仮定して線形安定性解析を行い、微小攪乱の挙動について数値計算の結果と比較検討することは、超音速境界層の不安定性の機構を理解する上で非常に有効であることが示された。

4. まとめ

超音速境界層の層流制御に関する研究の1つとして、圧縮斜面が $M_1=2.2$ の超音速境界層中のT-S波の挙動に及ぼす影響について、数値計算と線形安定性解析の結果を比較することにより調べた。その結果、境界層の速度分布における一般化変曲点近傍に攪乱の振幅分布はピークを持ち、この変曲点が斜面による圧縮の影響で移動するのに伴って攪乱の振幅および位相の y 方向分布が変化すること、T-S波は、一般化変曲点における $\rho(\partial u/\partial y)$ の値の増加に伴って強く増幅されることなどが明らかにされた。このことから、今回調べた $M_1=2.2$ の流れにおいても、一般化変曲点に伴う不安定性がT-S波の挙動を強く支配していることが示され、境界層の層流制御の観点から重要な知見が得られた。変曲点不安定は非粘性モードであるので、非粘性モードのみ

の線形安定性解析を行うことにより、変曲点不安定の影響やその詳細について明らかにできると考えられる。

引用文献

- 1) 坂上昇史, 西岡通男: 超音速境界層におけるT-S波動の挙動, ながれ(投稿中)。
- 2) 坂上昇史, 西岡通男: 圧縮斜面周りの超音速境界層におけるT-S波動の挙動, ながれ(投稿中)。
- 3) S. R. Chakravarthy & S. Osher: A new class of high accuracy TVD schemes for hyperbolic conservation laws, AIAA 85-0363 (1985).
- 4) L. M. Mack: Computation of the stability of the laminar compressible boundary layer. Methods in Computational Physics, Vol. 4, Academic Press (1965) 247-299.
- 5) Rizzetta, D. P., Burggraf, O. R. & Jenson, R.: Triple-deck solutions for viscous supersonic and hypersonic flow past corners. J. Fluid Mech. 89 (1978) 535-552.