

## No. 12

## 一様等方性圧縮性乱流の位相幾何学的構造

絵山 貴志\*, 前川 博\*, 松尾 裕一\*\*

## A Study of the Geometry of Flow Patterns in Compressible Isotropic Turbulence

Takashi HIYAMA\*, Hiroshi MAEKAWA\*, and Yuichi MATSUO\*\*

\*The University of Electro-Communications, Chofu, Tokyo

\*\*National Aerospace Laboratory, Chofu, Tokyo

The geometry of flow patterns in a numerically simulated compressible isotropic decaying turbulent flow at  $M_t=0.6$  was studied using three-dimensional critical point theory. The solution trajectories for three first-order linear differential equations are used to classify the elementary three-dimensional flow patterns defined by instantaneous streamlines. Fluid motions characterized by high rates of kinetic energy dissipation and/or high enstrophy are of particular interest. It is found that motions corresponding to high rates of dissipation are characterized by a 3-D rate-of-strain topology which are of the types saddle-saddle-unstable-node and stable-focus-stretching.

Key Words : compressible turbulence, critical point theory, dissipation

### 1. まえがき

古典的 Kolmogorov 法則が示す乱流エネルギーのカスケードプロセスによる低波数から高波数領域へのながれの中で、乱流エネルギーを受取る側の高波数領域の微細渦の振舞いは従来ほとんど明らかにされていない<sup>1)</sup>。圧縮性乱流における散逸運動は圧縮性 ( $\text{div} \mathbf{u} \neq 0$ ) による膨張散逸過程が存在することが知られているが、その散逸機構は明らかではない。

数値シミュレーションや計測機器の発達により、膨大なデータを得ることが可能になっている。そのような非常に多くのデータによって与えられる流れ場を解析する手法として位相幾何学的分類法は有益である。流れの解軌跡の位相幾何学（トポロジー）は流体の運動形態を分類するものであり、圧縮性、非圧縮性流れの局所運動における微細構造の位相幾何学的分類は複雑な3次元乱流構造に新しい流体力学的考察を与え乱流の数理モデルを構成するのに重要な手法になることが期待される<sup>2, 3)</sup>。

本研究の目的は、一様等方性圧縮性乱流について微細

構造の統計的状态と流れ場における局所運動を位相幾何学的に明らかにすることである。

### 2. 解析方法

#### 2.1 三次元特異点のトポロジー

流体運動における相対速度  $\mathbf{u}$  は流体に局所の変形をもたらす。Taylor 展開して一次の項まで考慮すれば

$$\delta u_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \delta x_j \quad (1)$$

と書ける。速度勾配テンソル  $\partial u_i / \partial x_j$  において  $u_i$  は瞬間的な速度場を表わし、解軌跡は瞬間的な流線である。微分方程式(1)に対する特性方程式

$$\det[A - \lambda I] = 0 \quad (2)$$

の固有値と固有ベクトルが解軌跡を位相平面で定義する。速度勾配テンソル  $A_{ij}$  を対称部分  $S_{ij}$  と反対称部分  $R_{ij}$  に分けると

$$A_{ij} = S_{ij} + R_{ij}, S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), R_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3)$$

変形速度テンソルと回転テンソルの和で表わされる。二次元位相面上で与えられる不変量と同様に、三次元の運動においてはスカラー不変量

\* 電気通信大学

\*\* 航空宇宙技術研究所

$$P = -\text{trace}[A], \quad (4)$$

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{2} (P^2 - \text{trace}[A^2]) \\ &= \frac{1}{2} (P^2 - S_{ij} S_{ji} - R_{ij} R_{ji}), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} R &= -\det[A] \\ &= \frac{1}{3} (-P^3 + 3PQ - S_{ij} S_{jk} S_{ki} - 3R_{ij} R_{jk} S_{ki}), \end{aligned} \quad (6)$$

に関する不変量  $P$ - $Q$ - $R$  空間において固有値の判別が可能になる。

実根と虚根は特性方程式における判別式

$$27R^2 + (4P^3 - 18PQ)R + (4Q^3 - P^2Q^2) = 0 \quad (7)$$

によって与えられる。  $\text{div } \mathbf{u} \neq 0$  においては  $P > 0$  または  $P < 0$  面ではそれぞれ16種類の流線パターンが形成される。圧縮性条件に特徴的な SF/C や UF/S のトポロジーを示す流線パターンが存在する。詳細は文献(2, 3)を参照されたい。

### 3. 解析結果

#### 3.1 不変量空間におけるトポロジー

図1は全流れ場の不変空間におけるプロットを示す。また、図2は全流れ場の中から最大エンストロフィーの60%以上の高エンストロフィー領域を不変量空間にプロットした結果を示す。この領域は  $P < 0$  で虚根をもつ安定渦状点 (stable-focus-stretching) と一部は  $P > 0$  で渦状点 (stable-focus-stretching/unstable-focus-compressing) の流れパターンを示す。いっぽう、図3は散逸が最大値の60%以上の領域が  $Q$ - $R$  空間において

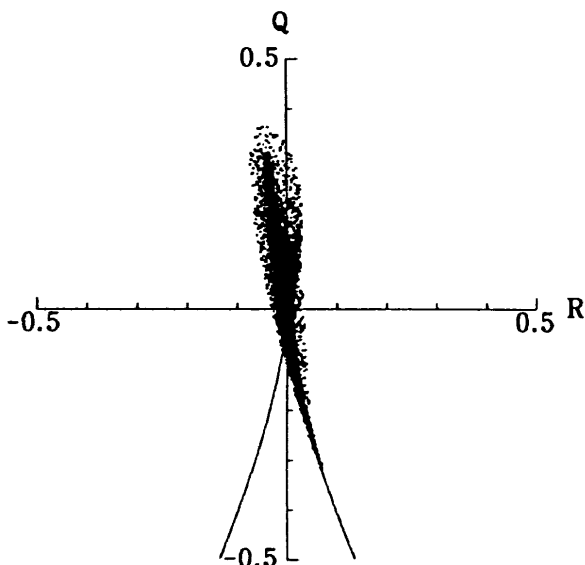


Fig. 1 Scatter plot of  $Q$  versus  $R$

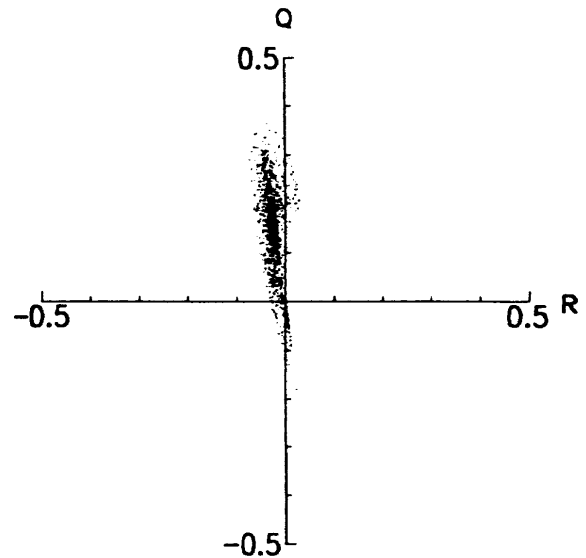


Fig. 2 Scatter plot of  $Q$  versus  $R$  for high enstrophy field

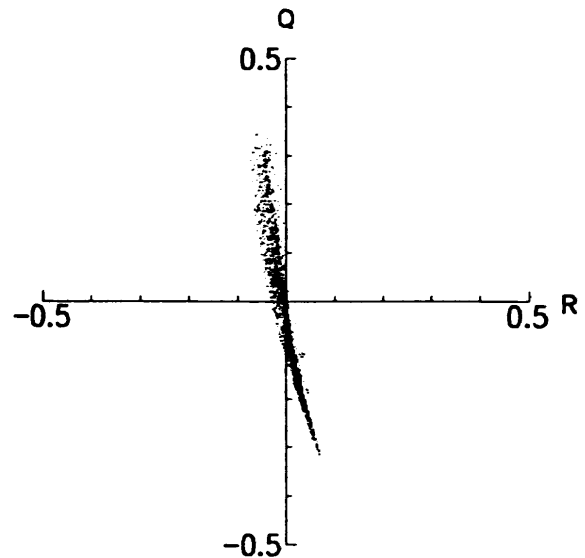
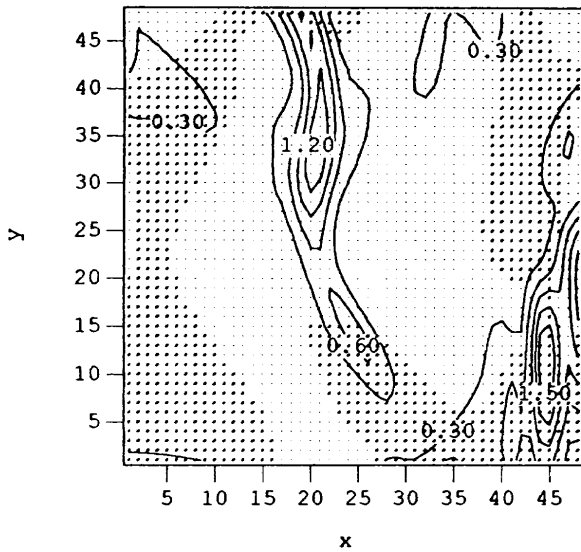
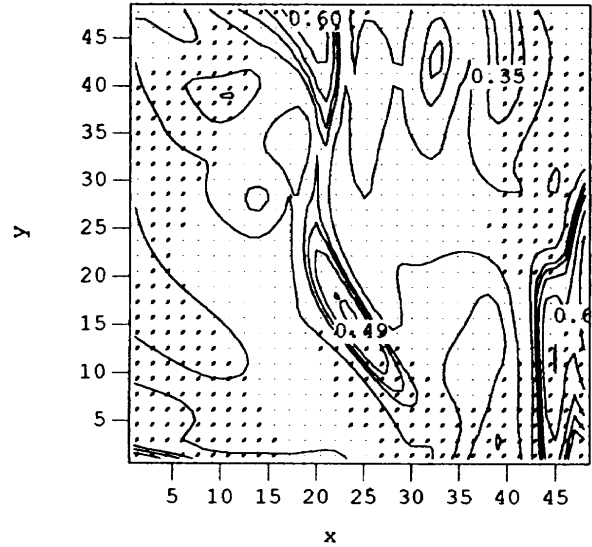
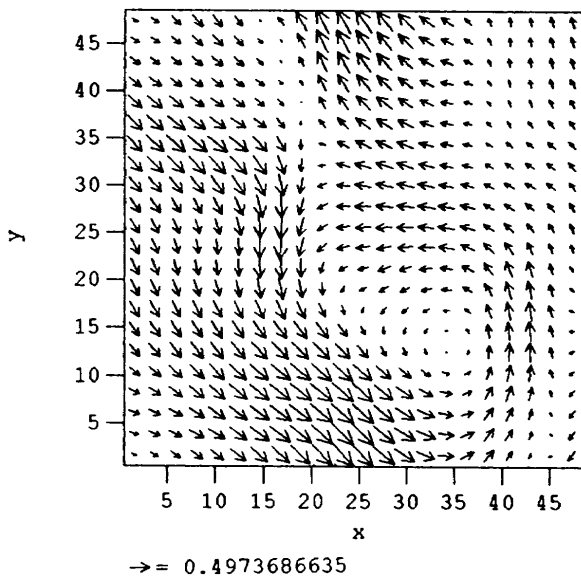


Fig. 3 Scatter plot of  $Q$  versus  $R$  for high dissipation field

プロットされている。  $P < 0$  ではトポロジーは渦状点 (stable-focus-stretching/unstable-focus-compressing) と不安定結節鞍状点 (unstable-node-saddle-saddle) であり、  $P > 0$  では渦状点 (stable-focus-stretching/unstable-focus-compressing) を示す流れパターンが対応していることが観察される。

#### 3.2 物理空間における高散逸構造

図4, 5はそれぞれ  $(x-y)$  平面から観察した高散逸領域の様子と流速ベクトルを示している。  $(x-y)$  平面におけるトポロジーと流れ場を重ね合わせてみると、散逸が大きい流れは高ひずみ領域で発生する不安定結節鞍状点 (unstable-node-saddle-saddle) のトポロジー

Fig. 4 High dissipation region in the  $(x-y)$  planeFig. 6 High enstrophy region in the  $(x-y)$  planeFig. 5 Velocity vectors in the  $(x-y)$  plane

を示す局所運動と安定伸張渦状点 (stable-focus-stretching) であることがわかる。いっぽう、図4と図6を比較すると、高エンストロフィー構造が安定/不安定渦状点のトポロジーを示す流体運動より形成され、 $x-y$ 面においては高エンストロフィー領域の間に高散逸領域が存在していることも観察される。

#### 4. まとめ

乱流マッハ数 $M_t=0.6$ における一様等方性圧縮性乱流をトポロジー的観点から調査することによりトポロジーの指向性と高散逸領域の関係が明らかになった。

(1) 初期条件から十分時間が経過した状態では、高エンストロフィー領域は $P < 0$ で虚根をもつ安定渦状点 (stable-focus-stretching) と一部は $P > 0$ で渦状点 (stable-focus-stretching/unstable-focus-compressing) の流れパターンを示す。

(2) 高散逸領域は、流体運動のトポロジーの中で不安定結節鞍状点 (unstable-node-saddle-saddle) を示す流れパターンが支配的である。さらに、トポロジーが渦状点 (unstable-focus-compressing/stable-focus-stretching) の流体運動を示す高散逸領域も存在する。

#### 参考文献

- (1) Frisch, U. & Orzag, S., Physics Today 43, No.1 (1990), 24.
- (2) 前川, 藤田, 第7回数値流体力学シンポジウム講演論文集, (1993), 347.
- (3) Perry A. E. & Chong M. S., Ann. Rev. Fluid. Mech., 1987, 19 (11), 125-155.

