

## No.11

## 実験と数値解析による内球回転2球間クエット流の 層流—乱流遷移に関する研究

中 林 功 一\*, 余 偉 明\*

### Study on the Laminar-Turbulent Transition in Spherical Couette Flow by Laboratory Experiment and Numerical Analysis

Koichi NAKABAYASHI, Weiming SHA

*Nagoya Institute of Technology*

The laminar-turbulent transition of spherical Couette flow for case of clearance ratio  $\beta = 0.14$  was investigated by laboratory experiment. Calculating the correlation dimension and drawing the Poincaré section, it is revealed that the flow field traces a scenario as follows ; steady state  $\rightarrow$  periodic state  $\rightarrow$  quasi-periodic state  $\rightarrow$  chaos  $\rightarrow$  periodic state  $\rightarrow$  steady state  $\rightarrow$  periodic state  $\rightarrow$  chaos. A finite-difference method for solving three-dimensional, time-dependent, incompressible Navier-Stokes equations in spherical polar coordinates is also presented. Based on a new algorithm, a higher accurate numerical code has been developed, and it is demonstrated that the initial-boundary numerical code is valid for studying the spherical Couette flow problems.

**Key Words :** spherical Couette flow, laminar-turbulent transition, chaos, experiment and numerical analysis

#### 1. はしがき

内球回転2球間クエット流は、内外球が同心状態に置かれた内球回転、外球静止の流れである。レイノルズ数の増加に伴い、流れは最初、基本層流を形成し、その後臨界レイノルズ数において外力不安定により赤道付近に環状TG(テイラー・ゲルトラー)渦を発生する。更にレイノルズ数が増加すると準周期運動を経てカオスに至る。特にすき間比 $\beta = 0.14$ の場合にはレイノルズ数6000付近で速度変動の消滅現象がNakabayashiら<sup>(1)(2)</sup>によって報告されている。この時の遷移過程は通常の流れのそれとは全く相違しており、流れの安定性や分岐理論の観点から非常に興味深いものであるが、その詳細については実験的にも理論的にも不明である。一方、数値計算手法による回転2球間クエット流の研究では最近、NiとNigro<sup>(3)</sup>、DumasとLeonard<sup>(4)</sup>、Zikanov<sup>(5)</sup>等があるが、有限差分法を用いた非定常3次元の非圧縮性ナビエ・ストークス方程式に対する数値解析が行われていない。

著者らは速度変動の消滅現象が生じる $\beta = 0.14$ の内球

回転2球間クエット流に注目し、実験、数値計算と理論によりこの現象の解明に取り込んでいるが、本報では、まず、実験で得られた乱れの実効値と相関次元を用いて遷移過程を定量的に特徴づける。この遷移過程に伴う特徴的な流れの構造の変化については、ポアンカレ断面と一次元再帰写像を用いて考察する。ここでは、新しい数値アルゴリズムを考案し、球面座標における非圧縮性ナビエ・ストークス方程式の高精度な差分値解析コードを開発したので、それを用いて $\beta = 0.14$ の内球回転2球間クエット流を計算し、数値解析コードを検証する。

#### 2. 実験結果から見た相関次元の変化と 遷移のシナリオ

まず、実験結果を示す。実験装置と実験方法についてNakabayashiら<sup>(2)</sup>と同じであるので省略する。図1に、相関次元 $d$ と基本周波数の $R^*$ (レイノルズ数比 $Re/Re_c$ ,  $Re$ はレイノルズ数,  $Re_c$ は臨界レイノルズ数)に対する変化、及び速度変動の消滅に至るまでのシナリオを示す。速度変動の消滅までのシナリオは流れ場のアトラクターに関連づけて以下のように説明できる。まず、 $1.00 < R^* < 1.20$ においてアトラクターは固定点(S, 定常状態)である。これは定常な環状TG渦に対応して

\*名古屋工業大学

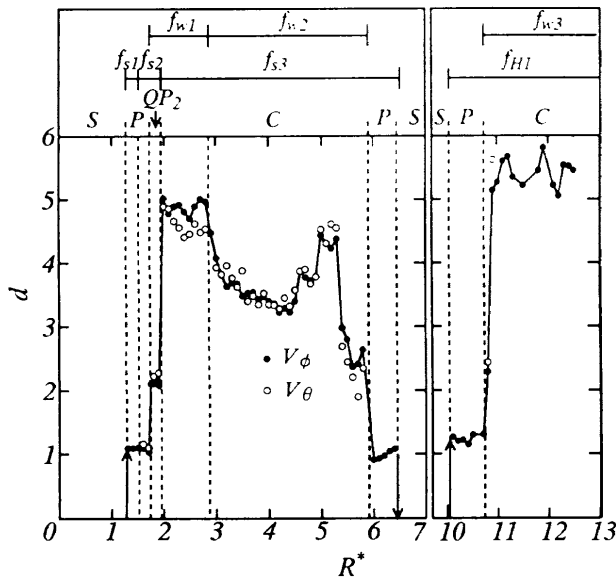


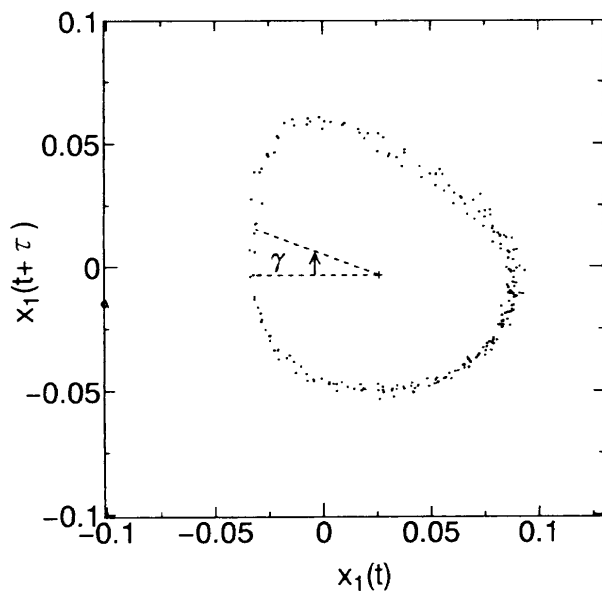
Fig. 1 Evolution of correlation dimension and scenario of the transition.

いる。 $R^* = 1.20$ での最初のホップ分岐 ( $f_{s1}$ が生じる)の後、 $1.20 < R^* < 1.74$ の間でアトラクターはリミット・サイクル ( $P$ , 変動は周期的)となる。この間に、 $R^* = 1.60$ で  $f_{s1}$ から  $f_{s2}$ への遷移が起こる。 $R^* = 1.74$ での2番目のホップ分岐 ( $f_{w1}$ が生じる)が起こり、準周期状態 ( $QP_2$ )となる。赤道上のすき間中央部での方位角の速度  $V_\phi$  のデータから時間遅れ法<sup>(6)</sup>により再構成したトラジェクトリのポアンカレ断面を図2に示す。図2(a)の  $R^* = 1.74$ におけるポアンカレ断面は滑らかな環状となっており、このレイノルズ数でのトラジェクトリが  $T^2$  トーラスを形成していることがわかる。図2(b)に

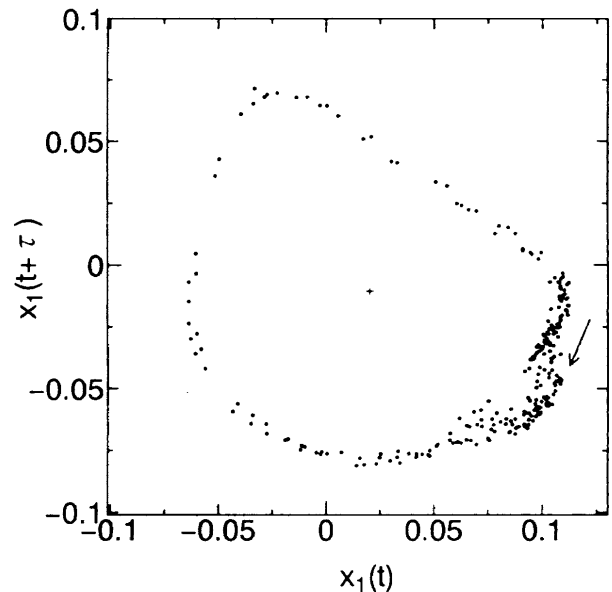
示す  $R^* = 1.90$ では図中に示す矢印の部分にトラジェクトリの引き延ばしと折り畳み構造が見られ、図2(a)の状態と比べて非線形性が強まっている<sup>(7)</sup>。

さらに、図2(a), (b)のポアンカレ断面に対応する一次元再帰写像を図3(a), (b)に示す。 $R^* = 1.74$ の場合の図3(a)は線形写像で可逆であるが、レイノルズ数を  $R^* = 1.90$ と増加させた図3(b)では写像上に平坦な部分が現れ不可逆となっている。これは、レイノルズ数の増加によりこの力学系の持っている非線形性が強まることを示している<sup>(7)</sup>。 $R^* = 1.95$ 付近で生じる分岐により基本周波数  $f_{s2}$ は  $f_{s3}$ へと変化し、相関次元  $d$ は2から5へと増加する。従って、この時のアトラクターはカオス ( $C$ )に対応するストレンジ・アトラクターとして特徴づけられる。また、この分岐は3番目のホップ分岐と見なされるが、この分岐の直後において準周期運動 ( $QP_3$ )は観察することができなかった。 $R^* = 2.95$ における  $f_{w1}$ から  $f_{w2}$ の遷移 (4番目の分岐)の後、 $R^*$ の増加に伴い  $d$ は減少する。次に、 $R^* = 6.0$ 付近の分岐でカオスが基本周波数  $f_{w3}$ の周期運動へと変化する。ここでのアトラクターはリミット・サイクルである。 $R^* = 6.5$ で  $d$ はほぼ0となり、そのアトラクターは固定点 ( $S$ )となる。以後  $6.50 < R^* < 10.02$ の間で速度変動の消滅現象が生じる。

その後、 $R^* = 10.02$ でのせん断波動  $f_{H1}$ の発生によりアトラクターはリミット・サイクルとなり、相関次元  $d$ の値は約1となる。 $R^* = 10.79$ で進行波動の基本周波数  $f_{w3}$ が加わり2周期運動となるが、その相関次元  $d$ が一気に5程度まで増加してカオス状態となる。 $R^* = 12.8$ 以上の領域では、埋め込み次元に対する相関次元の



(a)  $R^* = 1.74$



(b)  $R^* = 1.90$

Fig. 2 Poincaré section of  $u_\phi$ .

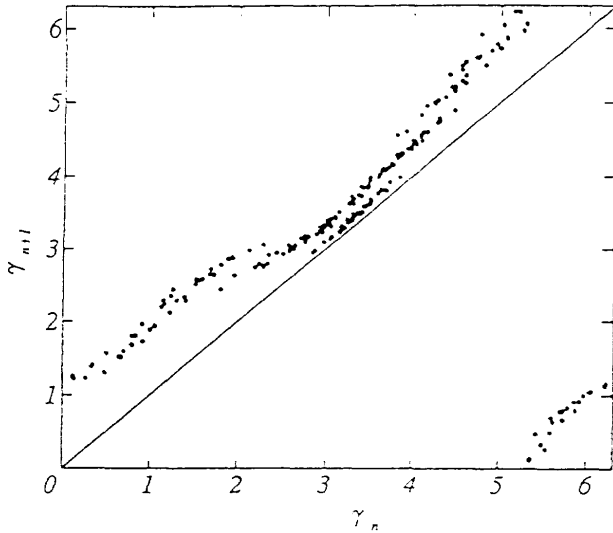
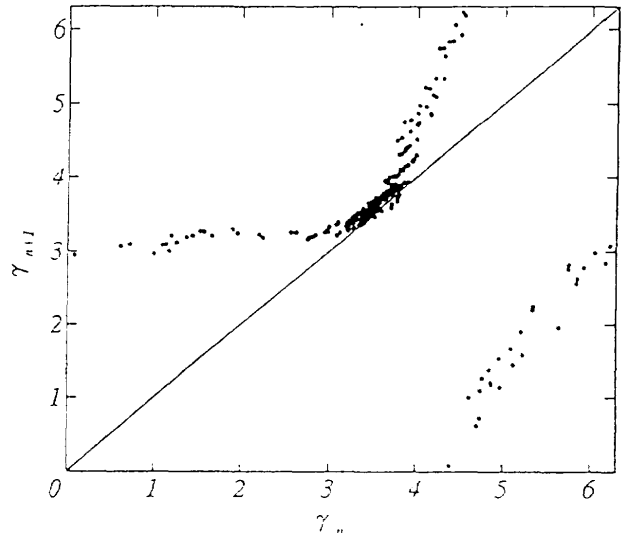
(a)  $R^*=1.74$ (b)  $R^*=1.90$ 

Fig. 3 First return map of Fig. 2.

収束が悪くなりここでは正確な値が得られていないが、少なくとも相関次元が6以上の自由度が励起されており、 $2.95 < R^* < 6.03$ の領域よりもカオスが進行している。

### 3. 数値解析コードの構築

回転2球間クエット流の数値解析の基礎方程式として、球面座標における非圧縮性ナビエ・ストークス方程式を用いる。以下にその連続(1)と運動方程式(2)を示す。

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} \quad (2)$$

ここで、 $\mathbf{u}$  ( $u_r, u_\phi, u_\theta$ ),  $P, t$ はそれぞれ速度ベクトル ( $u_r$ ; 半径方向速度,  $u_\phi$ ; 方位方向速度,  $u_\theta$ ; 天頂方向速度), 圧力, 時間である。 $Re$ はレイノルズ数( $Re = \omega R_1^2 / \nu$ ,  $\omega$ ; 内球回転角速度,  $R_1$ ; 内球半径,  $\nu$ ; 動粘度)である。本解析の回転2球間クエット流の境界条件は内球回転, 外球静止であるため次のように記述される。

$$\text{内球表面上; } u_r = u_\theta = 0, u_\phi = \sin \theta,$$

$$\text{外球表面上; } u_r = u_\phi = u_\theta = 0.$$

基本方程式(1), (2)を時間空間で離散化すると次のようになる。

$$D\mathbf{u}^{n+1} = 0 \quad (3)$$

$$\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n + \frac{\Delta t}{2} [3H\mathbf{u}^n - H\mathbf{u}^{n-1}] = -\frac{\Delta t}{2} [3G\mathbf{p}^{n+1} - G\mathbf{p}^n] + \frac{\Delta t}{2Re} [L\mathbf{u}^{n+1} + L\mathbf{u}^n] \quad (4)$$

ここで、 $D, H, G, L$ はそれぞれ空間差分の離散化因子で、2次精度の中心差分を用いる。時間差分に関して

粘性項のラプラス成分には2次精度の陰解法 (Crank-Nicholson法)を、対流項と粘性項の他の成分には2次精度の陽解法 (Adams-Bashforth法)を、圧力項には変形した2次精度のCrank-Nicholson法を用いる。また、上の(3), (4)式を次のようなマトリックス形式に書き直す。

$$\begin{bmatrix} I - \frac{\Delta t}{2Re} L & \frac{\Delta t}{2} G \\ \frac{\Delta t}{2} D & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n \\ 3\mathbf{p}^{n+1} + \mathbf{p}^n \end{bmatrix} = \Delta t \begin{bmatrix} \frac{1}{Re} L & G \\ -\frac{1}{2} D & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^n \\ \mathbf{p}^n \end{bmatrix} + \Delta t \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(3H\mathbf{u}^n - H\mathbf{u}^{n-1}) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

さらに、(5)式を次のように近似する (Dukowicz と Dvinsky<sup>(8)</sup>)。

$$\begin{bmatrix} I - \frac{\Delta t}{2Re} L & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & \frac{\Delta t}{2} G \\ \frac{\Delta t}{2} D & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n \\ 3\mathbf{p}^{n+1} + \mathbf{p}^n \end{bmatrix} = \Delta t \begin{bmatrix} \frac{1}{Re} L & G \\ -\frac{1}{2} D & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^n \\ \mathbf{p}^n \end{bmatrix} + \Delta t \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(3H\mathbf{u}^n - H\mathbf{u}^{n-1}) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

(6)式には時間的にも、空間的にも離散の2次精度が維持されることがわかる。

(6)式を展開すると、次のようになる。

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^n + \frac{\Delta t}{2} G\mathbf{p}^n \quad (7)$$

$$\left(I - \frac{\Delta t}{2Re} L\right) \tilde{u} = \left(I + \frac{\Delta t}{2Re} L\right) \hat{u} - \frac{\Delta t}{2} [3Hu^n - Hu^{n-1}] \quad (8)$$

$$u^{n+1} = \tilde{u} - \frac{3\Delta t}{2} Gp^{n+1} \quad (9)$$

$$Du^{n+1} = 0 \quad (10)$$

(9)と(10)式から、次のような圧力に関する離散ポアソン方

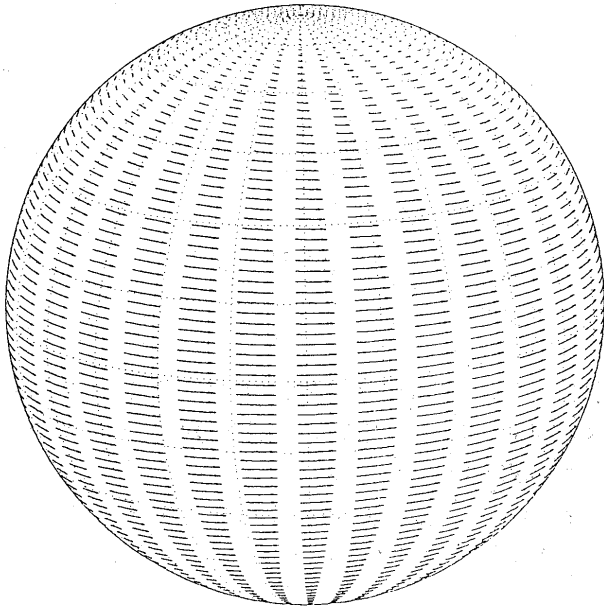


Fig. 4 Velocity vectors on  $(\phi, \theta)$  Plane for  $Re=505$ .

程式が得られる。

$$\frac{2}{3} \frac{D\tilde{u}}{\Delta t} = DGp^{n+1} = Lp^{n+1} \quad (11)$$

上述の式に適切な境界条件と初期条件を与え数値積分をすることによって、その数値解を求めることができる。以下にはその結果の一例を示す。図4はレイノルズ数  $Re=505$  における  $(\phi, \theta)$  球面での速度ベクトルを示すものである。その速度は方位角方向に一様であり、赤道から両極に向かって減少することがわかる。図5には図4と同じレイノルズ数  $Re=505$  における  $(r, \theta)$  断面での速度ベクトルと流線が示されている。内球壁に沿って極から赤道に向かい、外球壁に沿って赤道から極に戻る二次流れが生じている。以上の計算結果には低レイノルズ数での内球回転2球間クエット流の性質がよく現されている (Ni と Nigro<sup>(3)</sup>, Dumas と Leonard<sup>(4)</sup>)。

#### 4. 結 言

速度変動の消滅現象が生じるすき間比  $\beta = 0.14$  の内球回転2球間クエット流の層流-乱流遷移について実験的に調べた結果、 $R^*$  の増加に伴い流れ場は次のようなシナリオ：定常状態→周期状態→準周期状態→カオス→周期状態→定常状態→周期状態→カオス：辿ることが明らかになった。また、新しい数値アルゴリズムにより球面座標における非圧縮性ナビエ・ストークス方程式の高精度差分値解析コードを完成し、その検証を行った。

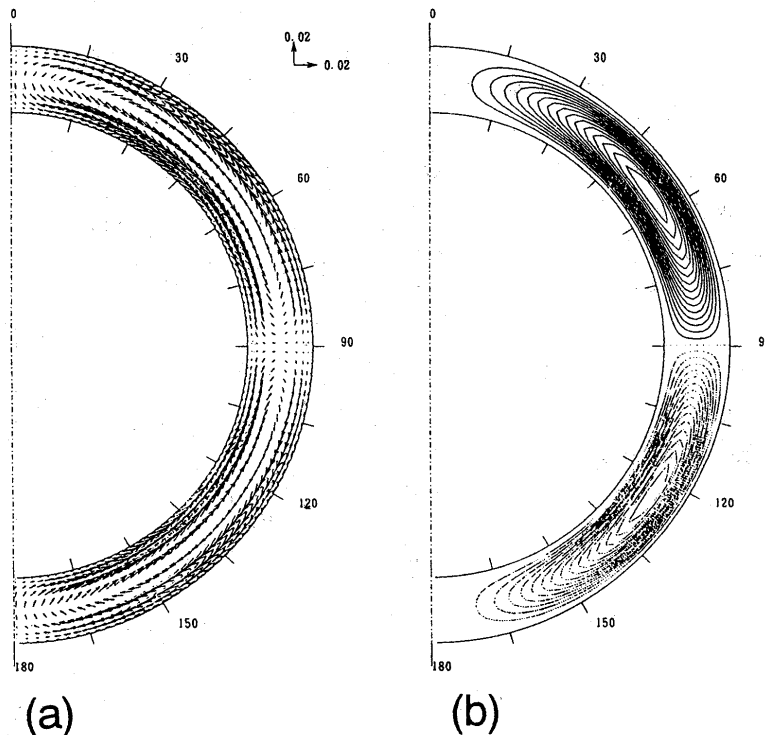


Fig. 5 Same as Fig. 4 but on  $(r, \theta)$  Plane, (a) velocity vectors (b) streamlines.

本研究の一部に平成8年度科学研究費補助金基盤Cが与えられた。ここに記して謝意を表す。

### 文 献

1. K. Nakabayashi; J. Fluid Mech., 132, 209 (1983).
2. K. Nakabayashi and Y. Tsuchida; J. Fluid Mech., 194, 101 (1988).
3. W. Ni and N. J. Nigro; Int. J. Numer. Methods in Fluids, 19, 207 (1994).
4. G. Dumas and A. Leonard; J. Comput. Phys., 111, 205 (1994).
5. O. Y. Zikanov; J. Fluid Mech., 310, 293 (1996).
6. P. Berge, Y. Pomeau, C. Vidal; Order in Chaos, 産業図書(相澤訳), (1992).
7. 沢田, 非平行系の秩序と乱れ, 朝倉書店, (1993).
8. J. K. Dukowicz and A. S. Dvinsky, J. Comput. Phys. 102, 336 (1992).

