

圧縮性乱流の直接計算とモデリング

藤原 仁志^{*1} 荒川 忠一^{*2}

Direct numerical simulation and modeling of compressible turbulence

Hitoshi FUJIWARA and Chuichi ARAKAWA

Experimental results show that the growth rate of compressible mixing layer is critically reduced due to compressibility effect on turbulence. In this study, Direct numerical simulation was performed to clarify the effect of compressibility on turbulence in shear layers. The results of the simulation show that the growth of kinetic energy of turbulence is suppressed with increasing turbulent Mach number. Moreover, the anisotropy of turbulence in compressible shear flows is shown to be increase with increasing turbulent Mach number.

Key Words: Compressibility, Turbulent Kinetic Energy, pressure-strain correlation

1. 緒 言

平均速度が音速と同じオーダーになる高速流では、乱れ速度もまた音速と同じオーダーとなる可能性がある。このような流れの計算では、乱流における圧縮性の影響、つまり密度の変動や乱れ速度の発散($\nabla \cdot \mathbf{u}'$)が0でないことによる影響を原則として考慮する必要がある。しかし、現在では圧縮性流れの計算にも非圧縮性を仮定した乱流モデルをそのまま用いることが多く、それなりの成果をあげている。一方、超音速燃焼器内に生じる混合層の拡大率の数値計算では、非圧縮性を仮定した乱流モデルを用いても実験値と一致する結果が得られない。このため、圧縮性を考慮した乱流モデルを構築し、それを組み込んで計算を行なおうとする試みが多数なされている(1, 2, 3)。また、近年では乱流における圧縮性の影響を調べるために、圧縮性乱流の直接数値計算(DNS)が盛んに行なわれている(4, 5, 6)。本研究では圧縮性の一様せん断乱流のDNSを行ってマッハ数が増加する事により、乱流の強度や非等方向がどのように変化するの

かを調べたのでそれについて報告する。また、この乱流における圧縮性の影響が、実際的高速混合層においてどのような変化を引き起こすのかを考察する。

2. 計 算 方 法

圧縮性を考慮した等方性ニュートン流体の基礎方程式は次の通りである。ただし、動粘度・熱拡散係数は温度によらず一定とし、体積粘性(bulk viscosity)は0とする。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j u_i)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u_a \frac{\partial p}{\partial x_a} + \gamma p \frac{\partial u_a}{\partial x_a} = \lambda(\gamma - 1) \frac{\partial}{\partial x_a} \left(\frac{\partial T}{\partial x_a} \right) + (\gamma - 1) S_{jk} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}, \quad (3)$$

$$S_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_a}{\partial x_a} \delta_{ij} \right), \quad (4)$$

$$p = \rho RT, \quad (5)$$

$$R = C_p - C_v, \quad (6)$$

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v}. \quad (7)$$

一様せん断乱流については、従来から移動座標上でスペクトル法を用いるという手法が有力であるが、Remeshの際に発生する alias 誤差の問題があることは

^{*1}航空宇宙技術研究所

^{*2}東京大学大学院工学系研究科

説明した。これに対し、Gerzら⁽⁷⁾は差分法による定式化を行ない、全方向に2次の中心差分を用いて計算することにより Remesh を回避している。

本研究では、せん断方向に6次のPáde scheme、流れ方向とスパン方向にスペクトル法を用いて一様せん断圧縮性乱流のDNSを行なった。その結果、スペクトル法の精度を保ちながら remesh をしない高精度の計算を行なうことができた⁽⁸⁾。

3. 乱流エネルギーの変化

マッハ数の影響のみを調べるため、マッハ数以外の条件を固定した初期条件(表1)を設定した。初期条件では、エネルギースペクトルの形はすべて同じで、圧力と密度の乱れは0、初期の速度乱れは $\nabla \cdot \mathbf{u}' = 0$ を満たしている。S1, S2, S3の順に乱流マッハ数を大きくした。プラントル数は0.72で固定している。

	M_t	Re_T	S^*
S1	0.200	218	4.1
S2	0.267	218	4.1
S3	0.401	218	4.1

表1. 乱流マッハ数を変えた初期条件(S1,S2,S3)

初期値で無次元化した乱流エネルギー k/k_0 の変化を示す(図1)。乱流マッハ数以外の条件はすべて同じだから、各ケースでの k の成長率の違いは純粋に M_t の影響と考えることが出来る。図1より「 M_t が大きいほど k の成長が抑えられている」ことがよく分かる。

さらに詳しく調べるために、レイノルズ応力の各成分についても調べてみる。ここでは、S1とS3のレイノルズ応力の非等方テンソル $(b_{11}, b_{22}, b_{33}, b_{12})$ の変化を比較する。

$$b_{ij} \equiv \frac{\overline{u'_i u'_j}}{k} - \frac{2}{3} \delta_{ij}. \quad (8)$$

図2に b_{11}, b_{22}, b_{33} の変化を示す。一見して分かるのは M_t が大きいS3では「スパン方向の変動 u'_3 が最も抑えられ、その分 u'_1 が大きくなっている」ということである。 u'_2 も計算終期で少し減っているが u'_3 程ではない。図3に b_{12} を示し、 u'_1 と u'_2 の相関係数 f_{12} を図4に示す u'_1 と u'_2 の相関も圧縮性の影響が大きくなると悪くなっていることがわかる。これらのことから、高マッハ数では「 b_{11} は増加しているものの、 u'_1 と u'_2 の相関が悪くなった上に b_{22} 自体も若干減っているため k の生産項にあたる b_{12} が減少した」と言える。

さらに詳しく調べるために、レイノルズ応力の各成分についても調べてみる。ここでは、S1とS3のレイノ

ルズ応力の非等方テンソル $(b_{11}, b_{22}, b_{33}, b_{12})$ の変化を比較する。

$$b_{ij} \equiv \frac{\overline{u'_i u'_j}}{k} - \frac{2}{3} \delta_{ij}. \quad (9)$$

図2に b_{11}, b_{22}, b_{33} の変化を示す。一見して分かるのは M_t が大きいS3では「スパン方向の変動 u'_3 が最も抑えられ、その分 u'_1 が大きくなっている」ということである。 u'_2 も計算終期で少し減っているが u'_3 程ではない。図3に b_{12} を示し、 u'_1 と u'_2 の相関係数 f_{12} を図4に示す u'_1 と u'_2 の相関も圧縮性の影響が大きくなると悪くなっていることがわかる。これらのことから、高マッハ数では「 b_{11} は増加しているものの、 u'_1 と u'_2 の相関が悪くなった上に b_{22} 自体も若干減っているため k の生産項にあたる b_{12} が減少した」と言える。また、図5にはレイノルズ応力非等方テンソルの不変量 $A(\equiv 1-9/8(b_{ij}b_{ij}-b_{ij}b_{jk}b_{ki}))$ (Lumley 1978)の変化を示す。 A はFlatness Parameterと呼ばれ、等方性乱流で $A=1$ 、2次元乱流で $A=0$ となるためしばしば壁面の影響を示すパラメータとして応力方程式モデルなどでよく用いられる。図より、初期マッハ数の高いS3の方が非等方度が大きくなっていることが分かる。乱れの成長が抑制される度合や応力の非等方度がマッハ数によって異なる原因を、レイノルズ応力の輸送方程式を用いて調べてみることにする。圧縮性一様せん断乱流におけるレイノルズ応力の輸送方程式は次のようになる

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\overline{u_1'^2}}{2} \right) = -\overline{u_1' u_2'} S + \frac{1}{\rho} \overline{p' \frac{\partial u_1'}{\partial x_1}} - \frac{1}{2} \epsilon_{11}, \quad (10)$$

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\overline{u_2'^2}}{2} \right) = 0 + \frac{1}{\rho} \overline{p' \frac{\partial u_2'}{\partial x_2}} - \frac{1}{2} \epsilon_{22}, \quad (11)$$

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\overline{u_3'^2}}{2} \right) = 0 + \frac{1}{\rho} \overline{p' \frac{\partial u_3'}{\partial x_3}} - \frac{1}{2} \epsilon_{33}, \quad (12)$$

$$\frac{D \overline{u_1' u_2'}}{Dt} = -\overline{u_2' u_2'} S + \frac{1}{\rho} \overline{p' \left(\frac{\partial u_1'}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2'}{\partial x_1} \right)} - \epsilon_{12}, \quad (13)$$

$$\epsilon_{ij} = \overline{\sigma'_{ik} u'_{j,k}} + \overline{\sigma'_{jk} u'_{i,k}}, \quad (14)$$

$$\sigma'_{ij} = \nu \left(u_{i,j} + u_{j,i} - \frac{2}{3} d \delta_{ij} \right). \quad (15)$$

まずレイノルズ応力の対角成分の輸送方程式について調べる。 $\overline{u_1' u_1'}$ の生産項についてはすでに k のところで比較した。各成分の圧力歪み相関項についてS1, S2, S3の3つの場合での値を比較する。まず $\overline{p' u'_{1,1}} / (\rho S k)$ (図6)だが、圧縮性の影響が大きいほど絶対値が小さくなっており、他の成分への供給が細っていることがわかる。次に $\overline{p' u'_{2,2}} / (\rho S k)$ (図7)だが、圧縮性の影響があまりない。最後に $\overline{p' u'_{3,3}} / (\rho S k)$ (図8)だが、これも圧縮性の影響が大きいほど絶対値が小さくなっている。マッハ数を上げた場合の $\overline{p' u'_{1,1}} / (\rho S k)$ の減少分と $\overline{p' u'_{3,3}} / (\rho S k)$ の減少分がほぼ同じであることから、「圧力歪み相関項による $\overline{u_1'^2}$ から $\overline{u_3'^2}$ へのエネルギー変換が圧縮性の影響で抑制されている」といえる。

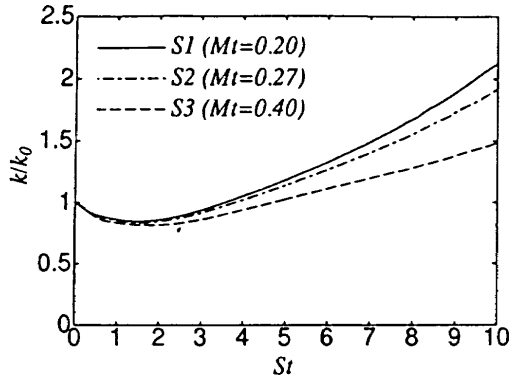


図 1. 乱流エネルギーの k/k_0 の変化 (S1,S2,S3)

圧縮性が大きくなると圧力歪み相関項の乱れの生産に対する割合が減少するが、このことは乱れの非等方性を拡大させ、ひいてはレイノルズ応力の減少を招く。このため、上記の混合層の流れなどでは、圧縮性が大きくなると乱流拡散が不活発になり、成長率の低下をまねく。圧力歪み相関項の働きが小さくなる原因としては、乱流マッハ数の増加と共に圧力変動の乱流エネルギーに対する割合 $p'/(pk)$ が小さくなることあげられる⁽⁹⁾。このことに着目して、応力方程式モデルにおける圧力歪み相関項に乱流マッハ数の影響を組み込めば、計算の予測精度が良くなる。また、その修正した応力モデルを基本に考えると、通常の $k-\epsilon$ モデルでは乱流マッハ数の上昇と共に $\overline{u'v'}/k$ が減少するというダンピングを $C_\mu = 0.09$ に施すのが妥当である。

また、混合層において層流から乱流へ遷移する際にもこのような圧縮性の影響が現れるのではないかと考えられる。

文 献

- (1) Viegas, J.R. & Rubesin, M.W., AIAA 91-1783, 1990.
- (2) Sarkar, S. & Lakshmanan, B., AIAA J., Vol.29, No.5, 1991, pp.743-749.
- (3) Wilcox, D.C., 1992, AIAA J., Vol.30, No.11, 1992, pp.2639-2646.
- (4) Sarkar, S., G.Erlebacher, M.Y.Hussaini & H.O.Kreiss, J. Fluid Mech., vol.227, 1991, pp.473-493.
- (5) Blaisdell, G.A., W.C.Reynolds & N.N.Mansour, Proc. 8th Symp. Turbulent Shear Flows, Vol.1, 1.1, 1991.
- (6) Fujiwara, H., & C. Arakawa, Proc. 9th Symp. Turbulent Shear Flows, Vol.2, 22.2, 1993.
- (7) Gerz, T., U.Schumann and E.Elghobashi, 1989, J. Fluid Mech., Vol.200, pp.563-594.
- (8) 藤原仁志 他 2 人, 日本機械学会論文集 (B), 63-605, 1997, pp. 161-166.
- (9) Vreman, A.W, et al., J. Fluid. Mech, 1996, pp.235-258.

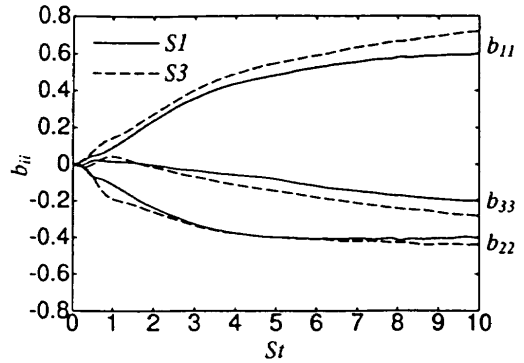


図 2. レイノルズ応力の非等方テンソル b_{11}, b_{22}, b_{33} の比較 (S1,S3)

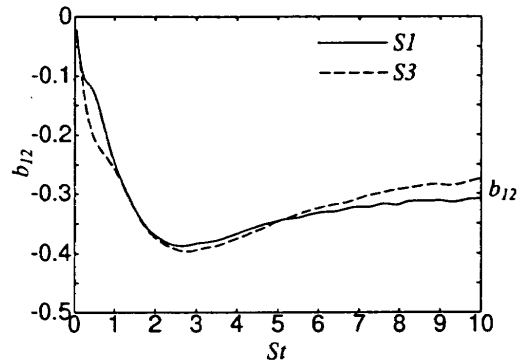


図 3. レイノルズ応力の非等方テンソル b_{12} の比較 (S1,S3)

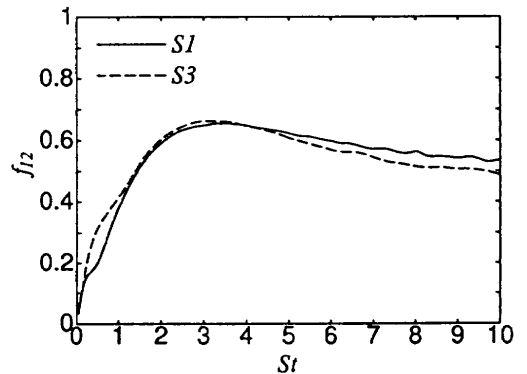


図 4. u'_1 と u'_2 の相関係数 f_{12} (S1,S3)

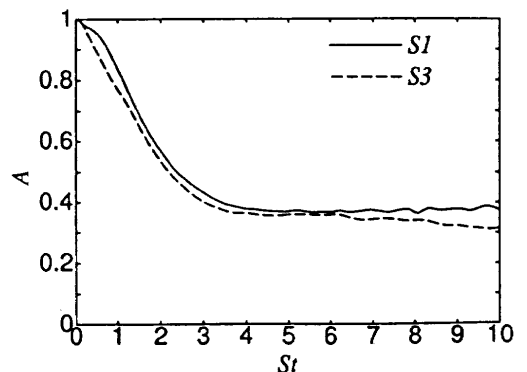


図 5. レイノルズ応力の不変量 A の変化 (S1,S3)

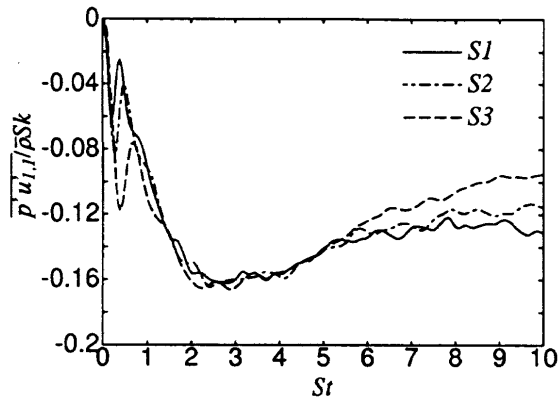


図 6. $u_1'^2$ の圧力歪み相関項 $\overline{p'u'_{1,1}}/(\bar{\rho}Sk)$ の比較 (S1,S2,S3)

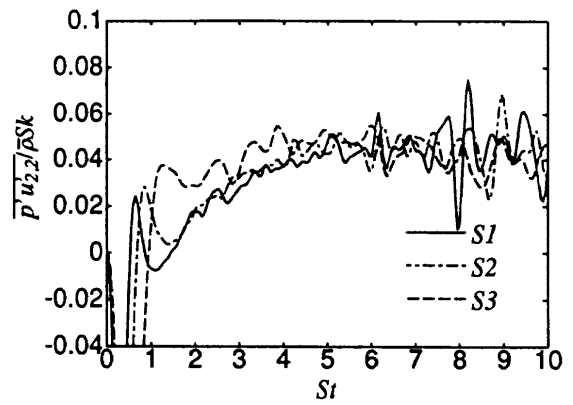


図 7. $u_2'^2$ の圧力歪み相関項 $\overline{p'u'_{2,2}}/(\bar{\rho}Sk)$ の比較 (S1,S2,S3)

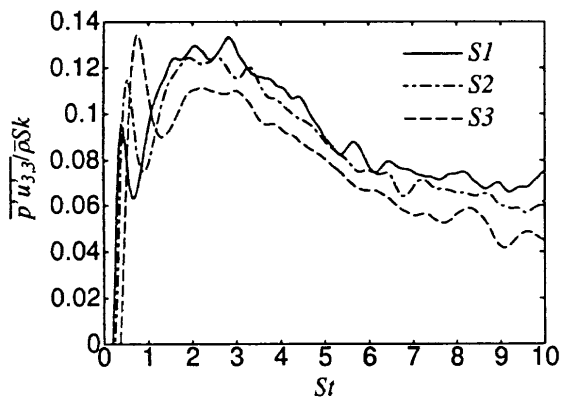


図 8. $u_3'^2$ の圧力歪み相関項 $\overline{p'u'_{3,3}}/(\bar{\rho}Sk)$ の比較 (S1,S2,S3)