

# 直接法による圧縮性境界層の不安定性について

佐藤 公一<sup>\*1</sup>、前川 博<sup>\*2</sup>、山本 稀義<sup>\*3</sup>

Study of the instability of a compressible boundary-layers  
using a direct spectral method

by

Kouichi Satou<sup>\*1</sup>, Hiroshi Maekawa<sup>\*2</sup> and Kiyoshi Yamamoto<sup>\*3</sup>

## ABSTRACT

The effect of Mach number on the two-dimensional boundary layer has been investigated by means of linear stability theory. The viscous compressible linear disturbance equations are solved. The resultant disturbance equations are cast as a  $5 \times 5$  matrix eigenvalue problem. A direct spectral method using a Chebyshev series is employed to solve the eigenvalue problems of the boundary layer with adiabatic wall conditions. An Algebraic mapping function  $h(\zeta)$  over the interval  $(-1 \leq \zeta \leq 1)$ , where the physical domain  $0 \leq y \leq y_{max}$  is transformed to the computational domain  $-1 \leq \zeta \leq 1$ , is used because of robustness for the high Mach numbers instead of an exponential mapping. Results by the spectral method show a good agreement with the numerical results obtained from a shooting method developed by Mack. The direct spectral method can predict all of the unstable modes, whereas conventional shooting methods can only for a single mode at a time.

## 1 緒論

最近になり次世代超音速飛行機の開発に伴い、超音速境界層における層流乱流遷移機構や乱流構造の解明が再び注目を集めている。せん断流のなかで最も代表的であり、かつ遷移過程問題では重要な境界層の問題は古くから研究されているが、工学的に複雑な流れでは、実用の数値解法による計算結果は数値粘性や圧縮性乱流モデルの不備から実験結果との間により一致を得ていない。

21世紀初頭の就航を睨んだ次世代超音速輸送機の開発にとって境界層乱流遷移機構の解明と遷移点の予測問題の解決は一つのキーである。圧縮性境界層の遷移点の予測は境界層の線形安定性理論の計算により研究されている。中立安定曲線に及ぼすマッハ数の影響が議論されてきたが[1]、解法により結果が異なり[2]、固有値方程式が stiff であるため解法や計算精度に注意が必要である。安定性理論の解法である直接法とシューティング法とは相異なる長所と短所を持っており、それらの長所を生かすことが肝要である。

このような背景のもと、最も単純なせん断流である平板境界層における圧縮性の影響を受けた遷移機構の解明を目的として、本研究においてシューティン

グ法と相補的にスペクトル法を用いた直接法が境界層の安定解析に有効であることを導く。

## 2 計算方法

比熱比一定の粘性圧縮性方程式から線形攪乱方程式を導出する。線形攪乱方程式において表れる平均速度分布や温度分布を求めるため、従来の方から従って流れ関数 $\psi$ を以下のように定義する。

$$\rho u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \rho v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (1)$$

運動方程式に代入して Illingworth 変換

$$\eta = \sqrt{Re/x} \int_0^y \rho dy, \quad \psi = F(\eta) \sqrt{x/Re} \quad (2)$$

を用いると、運動方程式は以下の常微分方程式で表される。

$$(2CF'')' + FF'' = 0 \quad (3)$$

ただし、本研究では主流マッハ数が2程度の場合を対象としたため Chapman-Rubensin パラメータ C を一定と近似した。今後、高マッハ数の場合に対応するために C を一定と近似しないで計算する予定である。ただし、従来の定式化と異なる点は第一項の係数2であるが、相似変換式(2)において $\sqrt{x}$ を $\sqrt{2x}$ とする

<sup>\*1</sup> 電気通信大学大学院

<sup>\*2</sup> 電気通信大学

<sup>\*3</sup> 航空宇宙技術研究所

ことによって従来の形式と一致する。境界条件は粘着条件と一様主流条件である。

$$F(0) = F'(0) = 0, F'(\infty) = 1.0 \quad (4)$$

プラントル数を  $Pr = 1$  とするとエネルギー方程式が以下の関係式を満たす。

$$\frac{d^2 T}{du^2} = -M^2(\gamma - 1) \quad (5)$$

断熱壁条件と主流温度  $T$  を境界条件とした Crocco-Busemann の関係より温度分布を求める。プラントル数  $Pr = 1$  と仮定しない場合は、Chapman-Rubensin パラメーターを含む温度分布に関する常微分方程式を式(3)と連立して求めることができる。

圧縮性流体における粘性攪乱方程式は以下の式で表される5行5列の行列  $A$  で表せられる固有方程式である [3]。行列  $A$  には平均量に微分量と固有関数に関する一階および二階微分作用素が含まれる。

$$A \hat{d}_{3D} = \omega \hat{d}_{3D} \quad (6)$$

ここで、プラントル数  $Pr$  や定圧比熱  $C_p$  および比熱比  $\gamma$  は一定としている。熱伝導率は粘性係数と比例関係にあり、また粘性係数(平均量  $\bar{\mu}$ ) は温度に対して以下のように表されると仮定する。

$$\bar{\mu} = \bar{T}^{2/3} \quad (7)$$

そして、変動量  $\hat{\mu}$  は  $T$  に関する Taylor 展開の一次の項で近似し、熱伝導率や粘性係数が変動値であるとする。

行列  $A$  に含まれる一階および二階微分作用素をマッピングを用いたチェビシェフ級数によって表した。代数マッピング  $h(\zeta)$  は以下のように表される。

$$y = h(\zeta) = L \frac{1 + \zeta}{b - \zeta} \quad -1 \leq \zeta \leq 1 \quad (8)$$

ただし、 $b = 1 + 2L/y_{max}$ ,  $L = y_i y_{max} / (y_{max} - 2y_i)$  で  $y_i$  は  $\zeta = 0$  に対応し、計算領域は  $0 \leq y \leq y_{max}$  である。チェビシェフ級数を

$$f(\zeta) = \sum_{k=0}^N a_k T_k(\zeta) \quad (9)$$

と表すと、一階微分や二階微分作用素は以下のように表される。

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \left[ \frac{(b - \zeta)^2}{L(1 + b)} \right] \sum_{k=0}^N a_k^{(1)} T_k(\zeta) \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = & - \left[ \frac{2(b - \zeta)^3}{L^2(1 + b)^2} \right] \sum_{k=0}^N a_k^{(1)} T_k(\zeta) \\ & + \left[ \frac{(b - \zeta)^4}{L^2(1 + b)^2} \right] \sum_{k=0}^N a_k^{(2)} T_k(\zeta) \end{aligned} \quad (11)$$

係数  $a_k^{(1)}$ ,  $a_k^{(2)}$  および  $a_k$  は漸化式で与えられる。攪乱方程式に含まれる微分作用素  $D$ ,  $D^2$  は

$$(Df)_i = \sum_{j=0}^{N-1} c_{ij} f(\zeta_j) \quad (12)$$

$$(D^2 f)_i = \sum_{j=0}^{N-1} d_{ij} f(\zeta_j) \quad (13)$$

と与えられる。数値的に求められた固有値の中から固有値に対する固有関数が境界条件を満たしているものを固有値とした。

### 3 考察

波数 ( $\alpha = 0.179$ ) に対して固有値の分布を計算した。Mack[4](1976) によるシューティング法による計算と比較すると、より多くの固有値が求められていることが分かる。レイノルズ数は  $Re = 580, 1000, 2000, 5000$  および  $10000$  について計算されている。 $Re = 2000$  以上では安定な固有値のみ見出される。 $Re = 580, 1000$  では不安定な固有値はそれぞれ1つである。ただし、マッハ数は  $M = 0.01$  とした。Fig.1 は  $Re = 1000$  の場合の固有値を示す。不安定 ( $C_i$  が正) 固有値は他の固有値郡と明確に区別される。また、複素速度点 (1.0) に固有値が集積している。安定な ( $C_i$  が負) 二次モードは Mack[4](1976) の結果より安定ではないことが分かる。

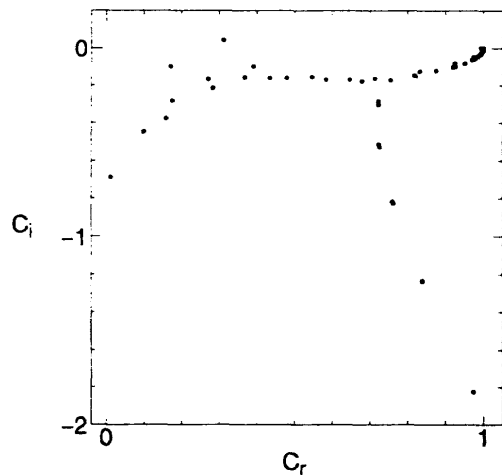


Fig.1 Distribution of eigenvalues of Blasius flow in  $c$  plane at  $\alpha=0.179, R=1000, M=0.01$

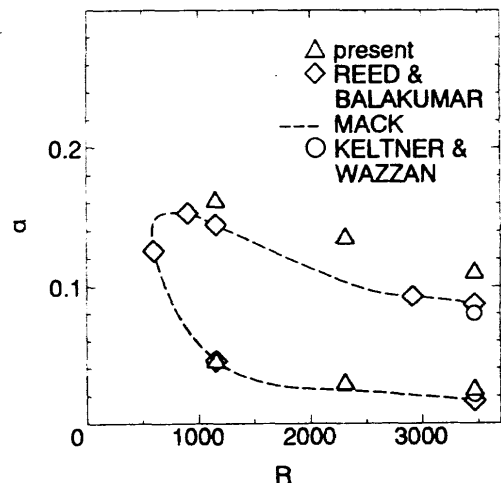


Fig.2 Neutral curve for the first mode of 2D disturbances. Adiabatic flat plate at  $M=2.2$ .

固有関数の結果からは、高マッハ数については、密度と温度が主流方向の速度の攪乱より大きい事がわかった。温度と密度の固有関数のピークはマッハ数  $M = 2.2$  ではまだ壁に近いものの  $M = 0.01$  の場合より外側に移動していることが確かめられた。また低マッハ数  $M = 0.01$  については攪乱が最大の位置などは従来の結果と同様な結果が得られた。

レイノルズ数を固定し、波数を変化させた時の固有値の最大値を求めた。また、これらを基に中立曲線 ( $M = 2.2$ ) を求めてみた。Fig.2 に示すように波数が低いところでの  $\omega_0$  の点は Reed[2](1990) (2点4次精度有限差分法), Mack[5](1984) (160点シューティング法), 及び Wazzan ら [6](1984) (5点有限差分法) と比較的よい一致が見られた。しかし彼らの結果が一致していない波数が高いところでの  $\omega_0$  の点は少し高い結果を得た。この理由としては、他の結果はプラントル数が  $Pr = 0.7$  または  $0.72$  であること [7] と攪乱方程式における解法やスキームの違いによると考えられる。彼等の結果が明らかな食い違いを示した高マッハ数における固有値は、彼等と独立な本研究の計算法によって今後明らかにしたい。

## 4 結論

直接法による解法の結果は固有値に対してはかなりよい一致が示された。低マッハ数の中立曲線に対してはシューティング法による計算とよい一致が示される。高マッハ数の中立曲線は Reed(1990), Mack(1984), 及び Wazzan ら (1984) と同じような傾向がある。固有関数に対しては壁面近くの微分の精度が要求されるが、マッハ数の影響によって温度/密度固有関数が支配的になりそのピークが壁から離れる傾向を示し、マッハ数  $M = 2.2$  まではおおむね良好な結果が得られた。今後、高マッハ数の場合についても Base Flow から計算し固有値・固有関数を求める予定である。最後に、本論文を作成するにあたり尾添靖通氏 (電通大学院) の協力を得た。ここに感謝の意を表したい。

## 参考文献

- [1] L. M. Mack, in Methods in Computational Physics. (Academic, New York, 1965) Vol. 4, 247-299.
- [2] H. L. Reed & P. Balakumar, Phys.Fluids A2 (1990) 1341-1349.
- [3] T. Kasahara & H. Maekawa, Proc. of CFD symposium, (1996) 118-119.
- [4] L. M. Mack, J.Fluid Mech. 73,(1976) 497-520
- [5] L. M. Mack, Phys.Fluids A2 (8)(1984) 342-347.

- [6] A. R. Wazzan, H. Taghavi & G. Keltner, Phys. Fluids A27(2), (1984) 331-341.
- [7] J. A. Masad & Y. H. Zurigat, NASA CR-19491 (1994).

