

## 翼型まわりの粘性流の数値計算について

松野謙一<sup>1</sup>、中川雄策<sup>1</sup>、廣瀬隆司<sup>1</sup>、柳原淳<sup>1</sup>、里深信行<sup>1</sup>

Approaches to Efficient Numerical Computations for Flow around an Airfoil

by

K.Matsuno<sup>1</sup>, Y. Nakagawa<sup>1</sup>, T.Hirose<sup>1</sup>, J.Yanagihara<sup>1</sup>, and N.Satofuka<sup>1</sup>

## Abstract

This paper describes four results of CFD approaches on the analysis of flow around an airfoil: a new upwind formulation for hyperbolic grid generation, the Euler/Navier-Stokes zonal-hybrid approach for efficient transonic airfoil computation, and MAC computation of a multi-element airfoil flow. The first result is the new formulation on hyperbolic grid generation method. We introduce the upwind formulation with the MUSCL-type high-order interpolation technique for the hyperbolic grid generation. It is shown that the method can generate a grid of excellent orthogonality and robustness without any user-specified dumping parameters. The favorable effect of the grid orthogonality on the convergence rate of the iterative method is demonstrated using numerical computations of transonic airfoil flows as the second result. To save cpu time, the Euler/Navier-Stokes zonal hybrid method is used. In the present approach, the minimum region where the flow has to be treated as viscous flow is investigated. The final approach is the computation of incompressible flow around the multi-element airfoil. The MAC method described in general curvilinear coordinates is applied with special treatment of solid boundary condition.

## 1. 緒言

翼型周りの二次元流れに関する数値計算は、現在まで様々な方法が試みられてきた。現在では、付着流はもとより剥離があっても局所に限られる場合には、広いレイノルズ数の範囲で、実験結果と非常に良く合う結果が得られ、設計ツールとして使えるようになってきている。大きな剥離流に関しては、乱流モデルの問題があり未解決と言っても良いであろう。この問題を除けば、現在では如何に効率よく計算を行うか、また、如何に計算精度を上げるかが、二次元翼型流れ計算の改良および発展の主目的といっても過言ではなからう。

本論文においては、翼型まわりの二次元流に対する数値計算について、我々の最近のアプローチの中から4つを取り上げ概説する。まず、数値計算に必要な構造格子生成法について、直交格子を効率よく生成する方法として、新しい双曲型格子生成法を述べる。次に、生成された格子の直交性が、スキームの収束性および計算精度にどのように影響するのかを、数値実験により検証した結果について述べる。また、計算の効率化の面から、流れの領域を粘性の強い領域と、非粘性と見なせる領域とに分け、それぞれにナビエ・ストークス方程式およびオイラー方程式を適用することにより計算の効率化を図ったゾナルハイブリッド法による計算についての結果を述べる。一方、二次元複雑形状に関する計算例として、高揚力装置まわりの流れの計算を試みる。本稿では、一般座標表示のMAC法を用いた非圧縮性流れの数値計算を行う。

2. 双曲型格子形成法<sup>1)</sup>

翼型まわりの流れ場に代表される外部流は、一般に、計算の遠方外側境界はその位置を厳密に指定する必要がな

く、計算がカバーする大まかな領域の大きさが満足されていけば十分な場合が殆どである。このような領域に格子を形成する場合、格子網の直交性を陽に指定した方程式に基づき、翼型表面格子を初期格子として外側遠方境界に向かって前端的に格子を生成するタイプの双曲型格子形成法が、効率と格子直交性において優れている。ここでは、格子形成のための方程式が、準線形の波動方程式と同様の双曲型偏微分方程式で表わされていることに着目し、移流項に、係数行列の固有値の符号に対応した風上型の差分を適用し、安定の為の散逸項を陽に指定する必要のないいわゆるパラメータフリーの双曲型格子形成法を提案し、いくつかの格子形成例を示す。特に、minmodリミッターを併用したMUSCL型の内捜法を風上差分に適用することにより、直交性に非常に優れた格子を形成することが可能となった。

## 2. 1 双曲型格子形成方程式

いま、 $\mathbf{r} = (x, y)^T$  を格子点の位置ベクトル、 $\xi$  および  $\eta$  を物体適合一般曲線座標系とすると、位置ベクトルの偏微分  $r_\xi$  および  $r_\eta$  は、それぞれその点における  $\xi$  および  $\eta$  方向の接線ベクトルを表わす。本稿では、格子点  $\mathbf{r}_{i,j} = (x_{i,j}, y_{i,j})$  を決定する条件として格子線の直交条件と格子幅に対応する格子セル面積を指定する。いま、 $\eta(j)$ -方向をマーチングの方向とすると、 $\xi$ - $\eta$  格子線の直交条件と、格子セル面積を指定する式は次のように表わされる。

$$\mathbf{r}_\xi \cdot \mathbf{r}_\eta = 0, \quad |\mathbf{r}_\xi \times \mathbf{r}_\eta| = A \quad (1)$$

式(1)に $\nu$ を反復添え字としてニュートン型の線形化を施すと次式を得る。

$$P\mathbf{r}_\eta^{\nu+1} + Q\mathbf{r}_\xi^{\nu+1} = \mathbf{g} \quad (2)$$

ここに、 $\mathbf{g}$  は  $\eta$  方向の格子幅を制御するパラメータ  $A$  を含んだ項であり、 $P$  および  $Q$  は格子点において評価されるマトリクスを含む  $2 \times 2$  の正方行列である。いま、 $|P^{-1}| \neq 0$

<sup>1</sup>京都工芸繊維大学工学部機械システム工学科

606 京都市左京区松ヶ崎御所海道町

であるから上式は次のように書き換えられる。

$$\mathbf{r}_\eta^{\nu+1} + \tilde{Q}\mathbf{r}_\xi^{\nu+1} = P^{-1}\mathbf{g} \quad (3)$$

ここで  $\tilde{Q} = P^{-1}Q$  であり、対称行列であることが証明されるので、 $\eta$ -方向のマーチングに関して双曲型である。また、 $\tilde{Q}$  は、相異なる2つの固有値をもち、それらは、それぞれ

$$\pm \sqrt{\frac{|\mathbf{r}_\eta|^2}{|\mathbf{r}_\xi|^2}} \quad (4)$$

である。

式 (3) に対し、 $\eta$ -微分に対しては後退差分を適用する。一方、 $\xi$ -方向微分に対しては固有値の符号に対応して、風上型の差分を適用すると人工散逸項が不要で、安定かつロバストな格子形成法が構成できる。ただし、一次精度風上差分近似は、単調性が保証されるものの、打ち切り誤差による散逸性が大きく結果として直交性に欠けた格子が形成される可能性が多い。ここでは、格子に滑らかさが欠ける(振動する)、あるいは、特性線のぶつかりによる不連続解に対応する(格子線が交叉する)領域にのみ一次精度に自動的に変わるように MUSCL 型の高次精度風上差分に minmod-リミターを組み合わせた方法を用いて離散近似する。いま、 $\tilde{Q}$  を正および負の固有値のみしか持たない行列の和に分解し、

$$\tilde{Q} = \tilde{Q}^+ + \tilde{Q}^- \quad (5)$$

それぞれに対し風上型差分を適用すると式 (3) は、次のようになる。いま、 $\delta\mathbf{r} = \mathbf{r}^{\nu+1} - \mathbf{r}^\nu$  とすると、

$$(I + \tilde{Q}^+\nabla_\xi + \tilde{Q}^-\Delta_\xi)^\nu \delta\mathbf{r}_{i,j} \quad (6)$$

$$= P^{-1}\mathbf{g} - (\tilde{Q}^+\mathbf{r}_\xi^- + \tilde{Q}^-\mathbf{r}_\xi^+)^\nu \quad (7)$$

ここに、左辺側の  $\nabla_\xi$  および  $\Delta_\xi$  はそれぞれ一次精度の風上差分演算子であり、こうすることにより代数方程式が三項方程式となるようにする。一方、右辺側は MUSCL 型の高次精度風上差分を適用する。上式の右辺の括弧内の各項は、

$$\tilde{Q}^+\mathbf{r}_\xi^- = \tilde{Q}^+ (\mathbf{r}_{i+1/2,j+1}^- - \mathbf{r}_{i-1/2,j+1}^-), \quad (8)$$

$$\tilde{Q}^-\mathbf{r}_\xi^+ = \tilde{Q}^- (\mathbf{r}_{i+1/2,j+1}^+ - \mathbf{r}_{i-1/2,j+1}^+), \quad (9)$$

ただし、

$$\mathbf{r}_{i+1/2}^+ = \mathbf{r}_{i+1} - \frac{1}{4} [(1 + \kappa)\overline{\nabla\mathbf{r}_{i+1}} + (1 - \kappa)\overline{\Delta\mathbf{r}_{i+1}}],$$

$$\mathbf{r}_{i+1/2}^- = \mathbf{r}_i + \frac{1}{4} [(1 - \kappa)\overline{\nabla\mathbf{r}_i} + (1 + \kappa)\overline{\Delta\mathbf{r}_i}],$$

$$\overline{\nabla\mathbf{r}_i} = \min\text{mod}(\nabla\mathbf{r}_i, b\Delta\mathbf{r}_i),$$

$$\overline{\Delta\mathbf{r}_i} = \min\text{mod}(\Delta\mathbf{r}_i, b\nabla\mathbf{r}_i),$$

$$\nabla\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i-1}, \quad \Delta\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i, \quad b = \frac{3 - \kappa}{1 - \kappa}$$

と表わされる。なお、係数行列はすべて  $(\cdot)_{i,j+1}^{\nu=0}$  において評価されるものとする。また、右辺側風上差分の精度は3次 ( $\kappa = 1/3$ ) とする。

### 2.2 格子形成例

まず、式 (7) に高次風上型差分を適用した効果について一次精度の場合と高次精度の場合の比較を翼型まわりの格

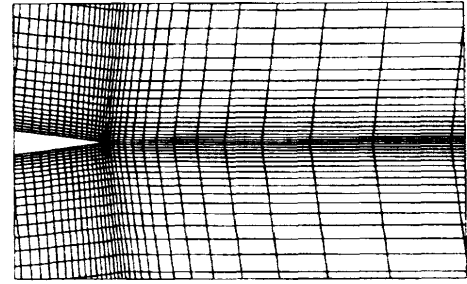


Figure 1: First-order upwind scheme.

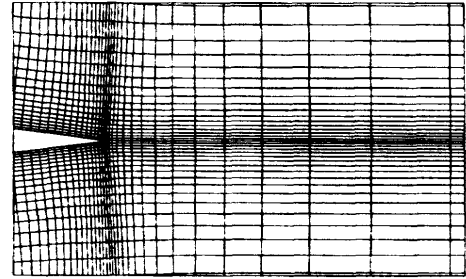


Figure 2: High-order upwind scheme.

子のウェーク部分について図1および2に示す。図に見られるように、一次精度風上差分の場合にはその大きすぎる散逸効果のため格子間隔は等間隔になるように働きその結果として格子の直交性が崩れていく。次に、複雑形状の場合の格子生成例として、スポイラ付きの翼型についての格子生成例を、スポイラ付近の拡大部分を図3に示す。

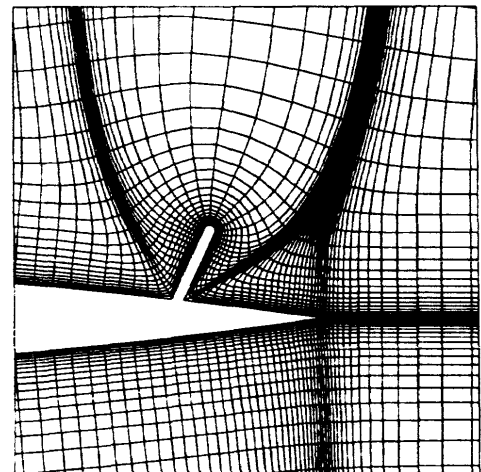
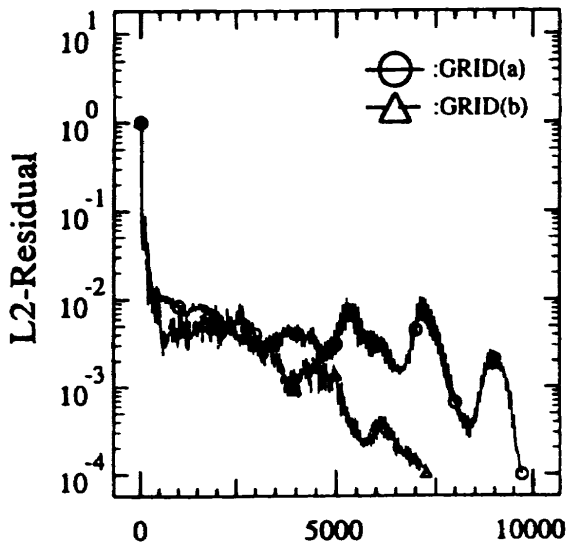


Figure 3: Grid around airfoil with spoiler.

### 3. 格子直交性と収束性<sup>2)</sup>

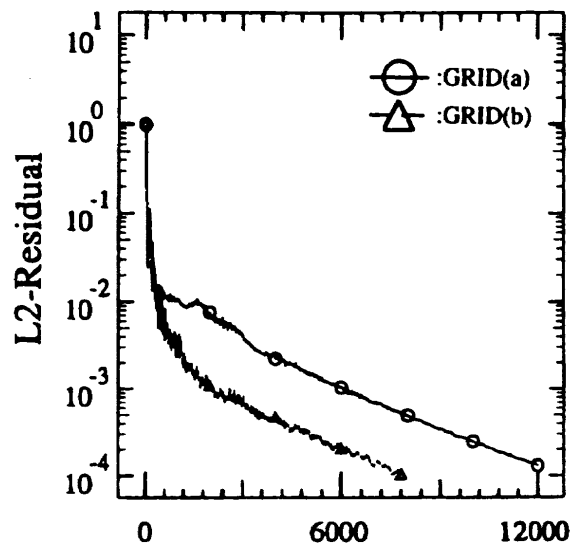
特にADI型の反復法を適用した場合、格子の直交性が反復計算の収束性に大きな影響を持つといわれている。ここではそのことを、上記の双曲型格子形成法で形成された直交性に優れた格子 (GRID(a):以下、直交格子と呼ぶ) と、楕円型格子形成法で形成した直交性に劣る格子



Number of Time Step

a) RRK

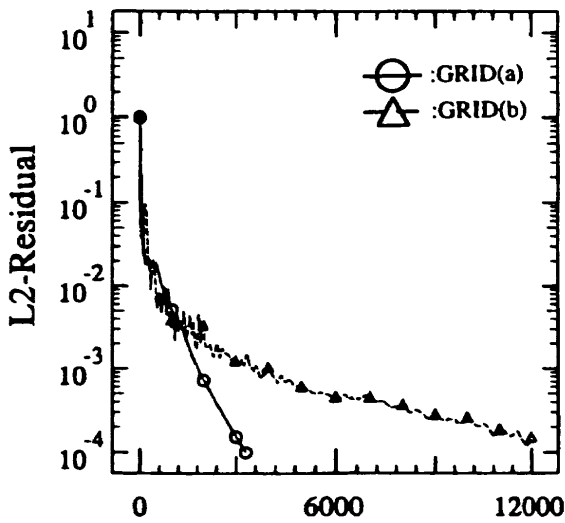
(GRID(a):CFL=1.2,GRID(b):CFL=1.2)



Number of Time Step

b) RRK + AVE

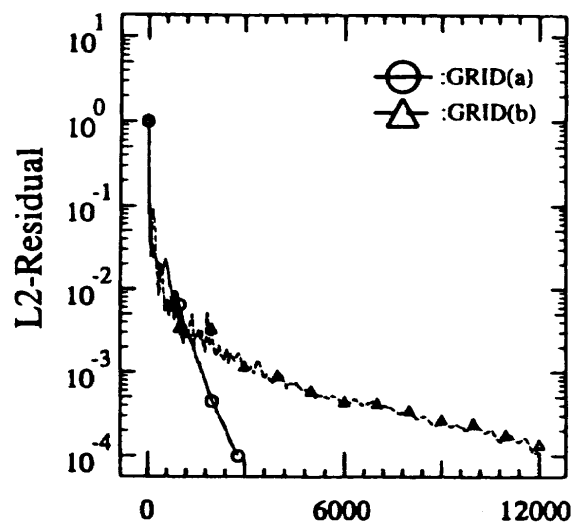
(GRID(a):CFL=1.0,GRID(b):CFL=1.0)



Number of Time Step

c) IAF

(GRID(a):CFL=3,GRID(b):CFL=0.5)



Number of Time Step

d) DIAF

(GRID(a):CFL=3,GRID(b):CFL=0.5)

Figure 6: Comparison of convergency history

(GRID(b):以下、非直交格子と呼ぶ)の2種類の格子を用い、NACA0012翼型まわりの遷音速流を対象に、数値実験によって検証する。

計算領域は、翼弦長の20倍の大きさにとりその領域を覆うようにC型格子のトポロジーで、遠方境界の位置(前方、後方、上下方向夫々 $20C$ ,  $C$ :翼弦長)および形状、総格子点数( $240 \times 60$ )、翼型表面上の格子数(181)、最小格子幅( $3.3 \times 10^{-6}$ )等が、両格子で同一となるように形成した。なお、前述の双曲型格子形成法では、遠方境界の位置を陽に厳密に指定できないので、格子幅を制御するセル面積  $A$  の分布を試行錯誤により決定して、遠方境界位置がほぼ指定した位置にくるようにした。図4および5に翼型付近の夫々の格子の拡大図を示す。また、格子線の交差

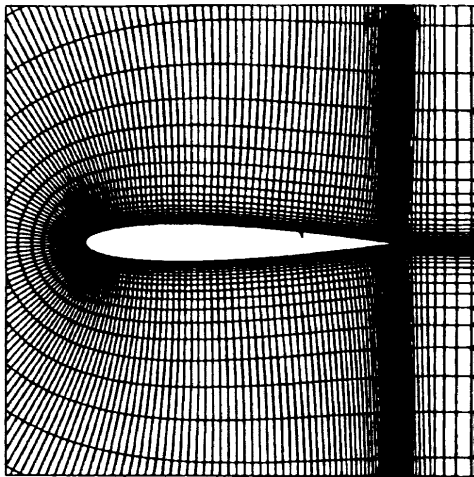


Figure 4: 直交格子 GRID(a)

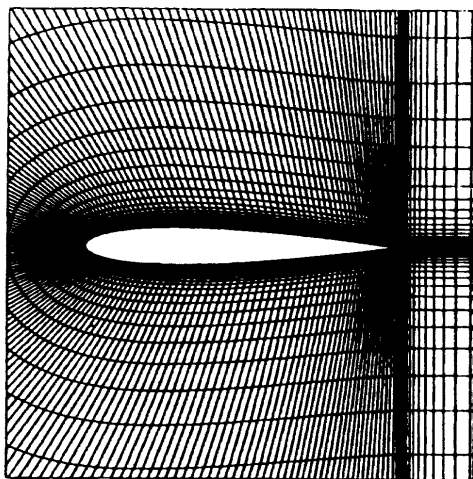


Figure 5: 非直交格子 GRID(b)

角度の平均値について、翼表面格子点および全体について夫々の平均値を表1に示す。

流れの計算条件は、一様流マッハ数 0.7、翼弦長基準レイノルズ数  $9.0 \times 10^6$ 、迎角  $1.49^\circ$ 、乱流遷移位置 5%翼弦位置固定である。計算モデルは Baldwin-Lomax 乱流モデルを用いた、渦粘性表示の保存形完全ナビエ・ストークス方程式である。この方程式を、時間依存で定常解を求め、

陽的および陰的時間積分法夫々について、定常解への収束状況を比較した。空間方向の計算スキームは、流速の評価に、Roeの流束差分離法に minmod リミターを組み合わせた MUSCL 法による高精度化したものである。時間積分には陽解法として (a) 有理ルンゲ・クッタ法 (以下 RRK と略記)、(b) 有理ルンゲ・クッタ法に陰的残差平均法を併用 (以下 RRK+AVE と略記)、ADI 型の陰解法として (c) 近似因子分解法 (以下 IAF と略記)、(d) 対角化近似因子分解法 (以下 DIAF と略記) の4種類を用いた。ここでは純粋に収束履歴だけに着目し計算コストは考えないで比較する。結果を図6に示す。ただ一つだけの例ではあるが、ADI 型の陰解法では、直交格子のほうが最大クーラン数を大きく取ることができその分、収束性が良いことが図より読み取れる。

Table 1: 格子線の交差角度

	$\bar{\theta}$ (翼面上)	$\bar{\theta}$ (全領域)
直交格子	89.9'	89.1'
非直交格子	82.3'	81.2'

#### 4. 粘性・非粘性ゾーナルハイブリッド計算<sup>3)</sup>

遷音速翼型まわりの流れ場は、(フルポテンシャル+境界層)のアプローチでさえもかなりの精度で流れ場を計算することが可能である。流域をゾーンに分け、翼面近くはナビエ・ストークス計算をし、離れた領域はオイラー計算を行ういわゆるゾーナル計算は80年代中頃盛んに試みられた。ここでは再びこのアプローチに着目し、より効率の良い計算法を確立することを目的にしている。領域を粘性の強い領域と、非粘性近似できる領域の境界をどのようにして評価するかは、様々な基準が考えられる。ここでは、粘性・非粘性の領域分割を定量的に行う方法について、領域のエントロピー分布や渦度分布等に注目し、粘性・非粘性領域の分割とその影響を評価し、それを基に、ゾーナルハイブリッド計算を行った。

基礎方程式は、保存形表示オイラー/ナビエ・ストークス方程式である。

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{Re} \left\{ \frac{\partial E_v}{\partial x} + \frac{\partial F_v}{\partial y} \right\}. \quad (10)$$

翼表面近傍の粘性作用の無視できない領域は、ナビエ・ストークス領域として式(10)を省略しないで用いる。一方、それ以外の領域は、粘性の無視しうる領域であるとして、式(10)の右辺側を零と置いたオイラー方程式を用いる。式(10)に対する数値解法は、セル節点中心有限体積法である。非粘性流束の評価は Roe の近似リーマンソルバーに基づく流束差分離法を、粘性流束の評価はガラキン型の離散化を適用し、それぞれ行った。時間積分はルンゲ・クッタ型の陽解法を用いた。

対象とした流れは、テスト計算によく用いられる RAE2822 翼型まわりの遷音速流である。計算条件は、一様流マッハ数 0.73、迎角  $\alpha = 2.64^\circ$ 、レイノルズ数  $Re_\infty = 6.5 \times 10^6$  である。計算格子は、ナビエ・ストークス用の格子を遠方境界を翼弦長の20倍にとって楕円型格子生成法によって生成しそれをもとに粘性・非粘性領域に分ける。両領域の接続部は格子点を共有するので内捜等の手続きは必要とし

ない。

まず全領域をナビエ・ストークス流として解き、それを基準解として遠方境界より翼に向かってオイラー/ナビエ・ストークス領域境界線を近づけていき、基準解との誤差を調べ、もっとも小さく取れる領域を持って領域分岐とする。なお、この操作は、格子ナンバー単位で行った。まず、格子系は図5に見られるようなC型のトポロジーを持つので、翼より放射状に出ている $\eta$ 方向格子インデックス $\eta_j$ について基準解とゾーナルハイブリッド解との誤差を調べた。結果を図7に示す。図横軸の距離 (Distance) は、翼面からの平均距離を表わす。図より 0.05 翼弦長迄を粘

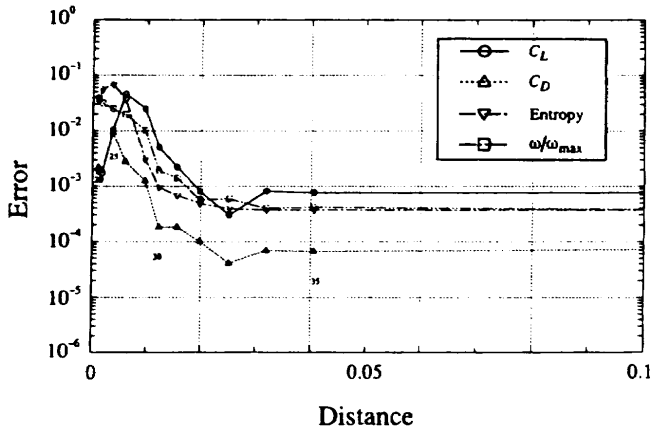


Figure 7: Difference between full NS and Euler/NS-hybrid solutions

性領域とすれば良いことがわかる。図8にその 0.05 翼弦長の領域分割境界を点線で示し、同時にその時のエントロピ等高線図を示す。同様の操作を伴流領域 ( $\xi_i$ 方向) につ

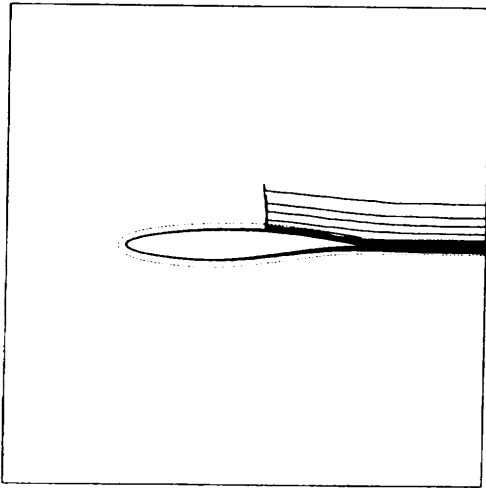


Figure 8: Euler/NS zonal boundary and entropy contours.

いても基準解との差を調べ最終的なゾーナル境界を決定した。図9に最終的なゾーナル境界を破線で示し、基準解 (実線) とゾーナルハイブリッド解 (一点鎖線) との比較を圧力の等高線図で示す。また、翼面上の圧力係数分布の実験値も含めた比較を図10に示す。以上の結果から、粘性領域は5%翼弦長程度の近傍までとれば十分であることがわかる。本論文では15%の計算時間の短縮が得られた。な

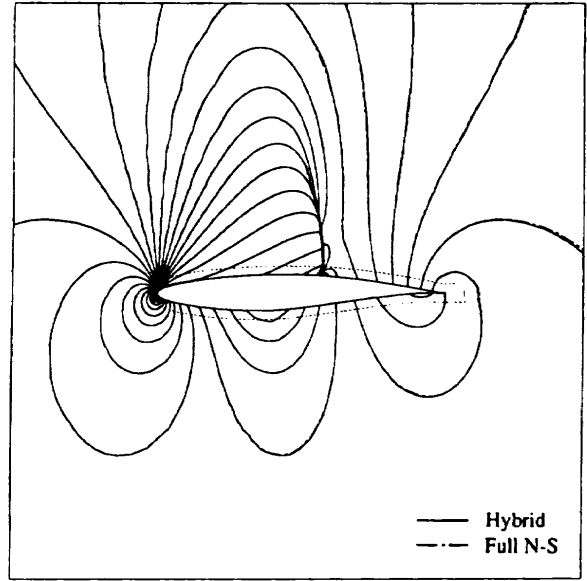


Figure 9: Euler/NS zonal boundary and comparison of the full NS and Euler/NS hybrid solutions

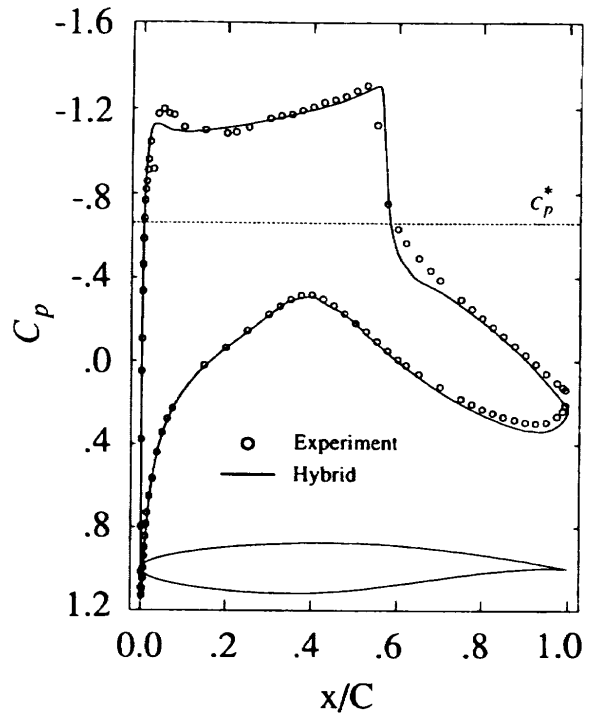


Figure 10: Comparison of Cp distributions.

お、オイラー領域の格子点を更に間引くことによって更なる計算時間の短縮が可能である。本報告ではナビエ・ストークスの格子をそのまま使っているのでも、無駄が多い。

#### 5. 多要素翼型まわりの非圧縮流計算<sup>4)</sup>

離着陸時における流れは基本的に非圧縮性流れであり、その数値シミュレーションは上述の遷音速流とは異なる計算上の困難さがある。多重連結のトポロジーを持つ多要素翼型まわりの流れをとく場合、基礎変数（速度および圧力）を未知数に選ぶのが後処理その他に直接的で都合が良い。非圧縮性流体の方程式の解法としては MAC 法がよく用いられる。基礎変数表示の MAC を一般座標に拡張する場合、反変速度についてスタaggerド格子を用いて定式化を行う。この場合、物体上の境界条件の扱いが厄介で、文献にも詳しく記述されていない。通常、物体内部に仮想格子を設けて境界条件を課しているようである。この場合物体の曲率半径や、物体近傍の格子線の曲率によっては、うまくいかないケースが生じることを経験している。ここでは、仮想格子を用いなくて片側差分を適用して境界条件を取り扱った。

ここで用いた非圧縮性流れの基礎方程式は、反変速度

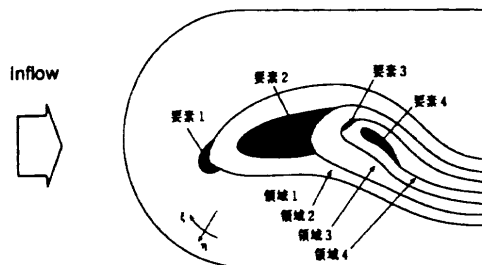


Figure 11: Mesh topology

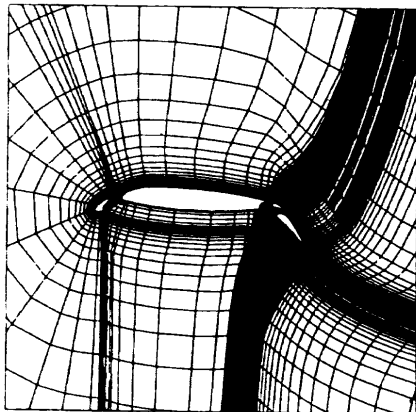


Figure 12: Grid for four-element airfoil

および圧力を従属変数として一般座標系で記述された連続の式とナビエ・ストークス方程式である。計算アルゴリズムは、通常の MAC 法による取り扱いを計算面で適用したものである。空間微分項の離散化には 2 次精度中心差分、時間積分には前進オイラー法を適用する。また、ポアソン方程式の解法には逐次過緩和法を適用した。

ここでは 4 要素の多要素翼まわりの粘性流に付いて計算を行った。なお、格子は図 11 に示すような C 字型の格子を適用した。翼型付近の格子を図 12 に示す。

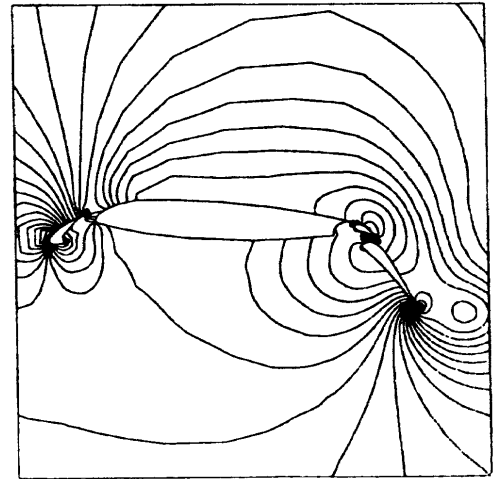


Figure 13: Pressure contours around multi-element airfoil,  $Re=100$ .

#### 6. 結語

二次元翼型まわり流れ場の数値計算に付いて、最近の我々のいくつかの試みを述べた。双曲型格子形成法については、3次元への拡張もすでに行っている<sup>5)</sup>。その他、詳細は関連の文献に当たられたい。

#### 参考文献

- (1) 広瀬、松野、里深、日本機械学会関西支部第 71 期総会講演前刷集および機論投稿中
- (2) 広瀬、松野、里深、日本機械学会関西支部第 72 期総会講演前刷集および広瀬、京都工芸繊維大学平成 8 年度修士論文
- (3) 中川、松野、里深、投稿準備中
- (4) 柳原、松野、里深、日本機械学会関西支部第 72 期総会講演前刷集および柳原、京都工芸繊維大学平成 8 年度修士論文
- (5) 松野、平成 8 年度科研費総合研究「惑星探査への気体力学の先端的応用」シンポジウム前刷り集および Journal 投稿中