

超音速粘性流に対する非構造格子空間前進解法

森野 裕行*¹、中橋 和博*²、大林 茂*²Space-Marching Method on Unstructured Grid
for Supersonic Viscous Flows

by

Hiroyuki Morino*¹ Kazuhiro Nakahashi*² Shigeru Obayashi*²

ABSTRACT

A space-marching algorithm to solve the Navier-Stokes equations on unstructured hybrid grid is proposed for supersonic viscous flows about complex configurations. The method employs a domain-marching algorithm in which a band-like computational subdomain, named active domain, is marched in the hyperbolic direction starting from the upstream boundary of the flow field. A masking procedure is employed where the outside of selected domain is masked during the flux computation to minimize the overall arithmetic operations. The unmasked domain is integrated in time to get a locally converged solution. The method is applied to calculations of a supersonic laminar flow past a 10° half-angle circular cone, and a supersonic turbulent flow around a high speed civil transport (HSCT) configuration. It is demonstrated that the computational work can be significantly reduced by the present method as compared to conventional time-marching unstructured grid method without decreasing the solution accuracy.

1. はじめに

近年、世界各国で次世代超音速輸送機(SST)の研究・開発が進められており、その設計ツールとして高精度・高効率の CFD コードが求められている。CFD の計算格子として一般的に用いられている構造格子では、複雑な航空機全機形状に対して格子生成に膨大な時間を費やすことになるが、非構造格子では複雑形状の格子生成も比較的容易である。よって、非構造格子上で効率の良い計算手法やアルゴリズムを構築できれば、その有用性はさらに増すであろう。

空間前進解法とは超音速流れにおいて流れの情報は上流から下流にしか伝播しないという特性を利用した計算効率化の手法で、1970年代から構造格子上でのみ適用されてきた[1]。しかし、この場合計算格子には、流れ方向とそれを横切る方向に格子線を持つ H 型格子が常に要求されるという格子トポロジーの制限があり、複雑な航空機全機形状への適用は極めて困難であった。

一方、非構造格子上では上記のような格子依存性がないため、格子トポロジーの制限は排除され、任意の複雑形状周りの超音速流れを扱うことができる。中橋と斎藤は非構造格子上で格子トポロジーに拘束されない空間前進解法[2]を提案し、超音速非粘性流れに対してこれを適用した。この手法は非常に計算効率が良く、また既存の計算コードへ

の組み込みも容易である。本研究では、この手法を超音速粘性流れに拡張し、さらに陰解法と組み合わせることにより非常に計算効率の良い Navier-Stokes ソルバーを開発した。

2. 支配方程式

流れ場の時間依存計算には3次元非定常レイノルズ平均 Navier-Stokes 方程式を用いる。無次元化された保存則の積分形は次式で表わされる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_Q Q dV + \int_{\partial Q} \left(F(Q) - \frac{M_\infty \sqrt{\gamma}}{\text{Re}} G(Q) \right) \cdot n dS = 0 \quad (1)$$

ここで、 $Q = [\rho, \rho u, \rho v, \rho w, e]^T$ は保存変数ベクトルである。 ρ は密度、 u, v, w はそれぞれ x, y, z 方向の速度成分で、 e は単位体積当たりの全エネルギーである。 $F(Q)$ 、 $G(Q)$ はそれぞれ非粘性流束ベクトル、粘性流束ベクトルである。式(1)の方程式系は理想気体の状態方程式

$$p = (\gamma - 1) \left[e - \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2 + w^2) \right] \quad (2)$$

によって閉じられる。ここで p は静圧であり、 γ は比熱比である。また、主流温度を T_0 とすると、層流粘性係数 μ は

*¹ 東北大学工学研究科大学院*² 東北大学工学研究科航空宇宙工学専攻

サザランドの式より求められる。

$$\mu = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{3/2} \left(\frac{T_0 + 117}{T + 117}\right) \quad (3)$$

支配方程式はセル節点有限体積法で離散化される。検査体積 Ω は図 1 のように非重合二重格子(non-overlapping dual cell)となる。

ここで、節点 i の保存変数 Q_i のセル積分平均 \bar{Q}_i を以下のように定義する。

$$\bar{Q}_i = \frac{1}{S_i} \int_{\Omega_i} Q dS \quad (4)$$

S_i は微小検査体積 Ω_i の面積で、

$$S_i = \int_{\Omega_i} dS \quad (5)$$

である。式(1)の第一項にセル積分平均 \bar{Q}_i を用いて式(1)を代数方程式で記述すると、

$$\frac{\partial \bar{Q}_i}{\partial t} = -\frac{1}{V_i} \left[\sum_{j(i)} \Delta S_{ij} h(Q_{ij}^+, Q_{ij}^-, n_{ij}) - \sum_{j(i)} \Delta S_{ij} G(Q, n_{ij}) \right] \quad (6)$$

ここで、 ΔS_{ij} は両端の点が i と j である辺に関する検査体積境界面の面積である。 ΔS_{ij} はその境界面の外向き法線ベクトル n_{ij} と同様に、その辺を共有するセルが寄与する面積の和をとることで計算できる。 h は検査体積境界面に垂直な数値流束で、 Q_{ij}^\pm はその辺について検査体積境界面の両側における保存変数ベクトルの値である。ここで $j(i)$ は i と対をなす全ての点について和をとることを意味する。

数値流束 h の計算で、検査体積内において基礎物理変数 $q = [\rho, u, v, w, p]^T$ を区分的に線形再構築した場合、 ∇q を勾配としてセル境界値を高次に外挿して空間 2 次精度にすることができる。 q_{ij}^\pm を検査体積境界面の両側における基礎物理変数ベクトルとすると、

$$q_{ij}^- = \bar{q}_i + \Psi_i \nabla q_i \cdot (r_m - r_i) \quad (7a)$$

$$q_{ij}^+ = \bar{q}_j + \Psi_j \nabla q_j \cdot (r_m - r_j) \quad (7b)$$

となる。ここで、 r_m は辺 ij の位置ベクトルである。また Ψ はスキームの単調性を保持するための制限関数で、ここでは Venkatakrishnan の制限関数[3]を用いている。

数値流束 h は HLLEW リーマン解法[4]を用いて計算し、時間積分は LU-SGS 陰解法[5]で行う。乱流モデルには Goldberg-Ramakrishnan1 方程式モデル[6]を使用する。

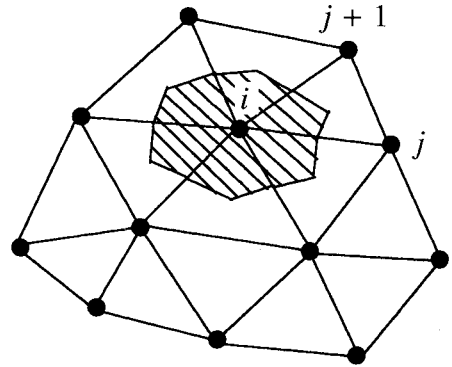


図 1: 検査体積

3. 空間前進解法

3.1 計算領域の前進

構造格子上で空間前進解法では計算面が前進するのに対し、非構造格子上では図2のように、ある幅を持った計算領域が前進し、この計算領域内でのみ時間依存計算が実行される。計算領域内の上流側には収束判定領域が設定され、この中の全節点が収束したと判定された時点で計算領域から収束判定領域を取り除き、下流側の未計算領域を新たに計算領域に取り込むことによって計算領域は下流側に前進する。最終的に計算領域内に節点がなくなった時点で、計算は終了する。

流れが超音速である限り、流れの情報は上流から下流へしか伝播しないため、計算領域中の変化は上流側の既計算領域には影響を及ぼさない。粘性流れにおいては境界層内に亜音速領域が存在するが、極端な剥離がない限り流れは放物型の特性を有すると考えられ、上流側への影響は工学的には無視できる。また計算領域内では時間依存計算を行っているので、計算領域の幅を大きく取ることによって、その影響を抑えることもできる。

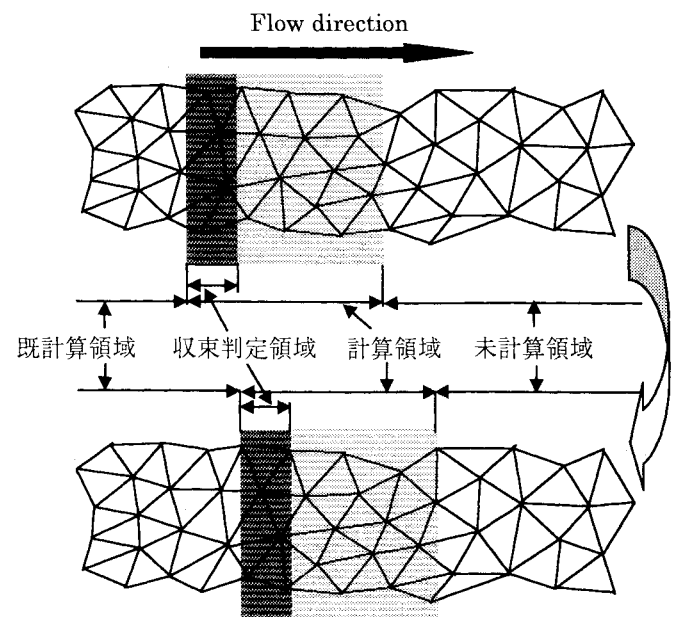


図 2: 計算領域の前進

3.2 マスキング

流れ場全体において、計算領域のみの計算を行うために、この領域とそれ以外の領域を区別しなければならない。これは節点や辺にマスキングを施すことによって行われる。3次元場では、2次元場と比べて節点数や要素数が格段に増大し、それに伴い計算時間も大幅に増加するため、計算時間の短縮には適切な計算領域の絞り込みが必要となる。本研究では計算格子により一意に最小限の計算領域をとるようにするために、以下の方法を用いている。

まず全領域の計算格子を読み込み、流れ方向に最大長さを持つ辺をサーチし、その辺の長さを基準として収束判定領域の幅を設定する。そして収束判定領域の2~3倍の幅を持つ領域を収束判定領域の下流側に加えて計算領域とする。これらの領域を判別するために、全節点と辺にそれぞれ配列 MASKN(in)、MASKE(ie) を用意する。図3に示してあるように、MASKN(in)は節点の位置及びその接続状況に応じて表1のような値を持つ。また MASKE(ie)は辺の両端の節点の MASKN(in)によって決まり、辺の両端の節点が共に MASKN=5 または MASKN=0 ならば MASKE=0 となり、それ以外の辺は MASKE=1 となる。流束計算は MASKE=1 の辺についてのみ行われ、それ以外の辺はスキップする。保存量 Q の更新は MASKN=2~4 の節点で行われる。計算時間を短縮するために、高次精度計算は一方の節点が MASKN=3~4 である辺でのみ行い、その他の MASKE=1 の辺に関しては1次精度の流束計算を行う。また、保存量 Q の勾配 ∇Q を計算領域上流及び下流で正しく評価するために、計算領域の直上流点(MASKN=5)と直下流点(MASKN=1)も流速計算に関わるようにしている。

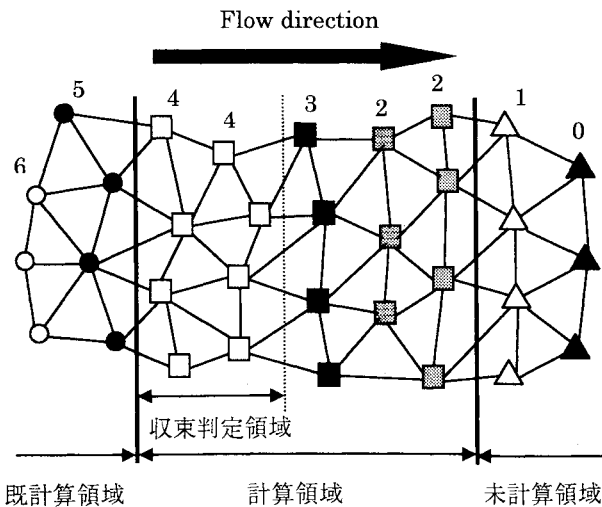


図3: 節点のマスキング

表1: 節点のフラッグ

MASKN	計算点	保存量の更新	高次精度計算	収束判定
0	×	×	—	—
1	○	×	×(1次精度)	—
2	○	○	×(1次精度)	—
3	○	○	○	—
4	○	○	○	○
5	○	×	○	—
6	×	×	—	—

4. 計算例

4.1 Circular Cone

まず簡単な計算例として、図4のような半頂角 10° の円錐形状について計算を行った。この形状は構造格子の空間前進解法である Parabolized Navier-Stokes(PNS)方程式の計算コードの検証によく用いられるものである。図5に計算格子を示す。節点数は171510で四面体要素数、プリズム要素数はそれぞれ497562、161153である。最小格子幅は 2.0×10^{-5} とした。計算条件は Tracy の実験結果[7]と比較するために以下のように設定した。

$$M_\infty = 7.95 \quad \alpha = 8(\text{deg}) \quad Re_L = 4.2 \times 10^5$$

$$T_{wall} = 309.8(K) \quad T_\infty = 55.39(K) \quad \gamma = 1.4$$

$$Pr = 0.72 \quad L = 0.1016(m)$$

ここで、 L は円錐の長さである。図6は各マーチングステップでの等密度線図であるが、計算領域が前進していく過程がよくわかる。図7、8はそれぞれ $x/L = 1$ での表面圧力と熱伝達率を示している。空間前進解法による結果は通常的全領域計算と完全に一致し、実験値とも良い一致が得られた。

4.2 NAL-HSCT 風洞モデル

次に複雑な形状への適用例として、NALのHSCT風洞モデルの計算を行った。図9、10にモデル形状と計算格子を示す。節点数は690120で四面体要素数、プリズム要素数はそれぞれ919471、1034965である。計算条件を以下に示す。

$$M_\infty = 2.023 \quad \alpha = 4.453(\text{deg}) \quad Re = 2.7584(1/m)$$

$$T_{wall} = \text{adiabatic} \quad T_\infty = 162.629(K)$$

$$Pr = 0.72 \quad \gamma = 1.4$$

図11は各マーチングステップでの等マッハ線図である。図12に $y = 116(mm)$ と $y = 175(mm)$ での表面圧力分布を示す。翼前縁で計算値が実験値より若干高くなっているが、これは翼前縁付近の格子解像度が悪いためであると考えられる。しかし、空間前進解法と全領域計算では計算結果が完全に一致している。図13は揚力係数と抗力係数を示

しているが、揚力係数に関しては空間前進解法、全領域計算共に実験値と完全に一致している。抗力係数については、計算値が実験値より若干高くなっているが、空間前進解法と全領域計算では一致している。

5. 計算効率

図 14 は残差の収束履歴を示しているが、空間前進解法では計算時間が全領域計算の約 3 分の 1 となっているのがわかる。空間前進解法の残差が波打っているのは、各マーチングステップでの残差を表わしているからである。

6. 結言

本研究では陰解法と空間前進解法を組み合わせた、非構造格子 Navier-Stokes ソルバーを開発した。これにより、計算精度を低下させることなく超音速粘性流の計算時間を約 3 分の 1 に短縮することができた。また非構造格子を用いているので、複雑形状への適用も容易であり、航空機の設計ツールとしての有用性は極めて高いといえる。さらに、この手法は非常にシンプルであるので、既存の非構造格子 CFD コードへの組み込みも容易である。

参考文献

- [1] Lawrence, S. L., Chaussee, D. S., and Tannehill, J. C., "Development of a Three-Dimensional Upwind Parabolized Navier-Stokes Code", AIAA J., Vol.28, No.6, pp971-972, 1991.
- [2] Nakahashi, K., and Saitoh, E., "Space-Marching Method on Unstructured Grid for Supersonic Flows with Embedded Subsonic Regions", AIAA J., Vol.35, No.8, pp1280-1285, 1998.(AIAA 96-0418)
- [3] Venkatakrisnan, V., "On the Accuracy of Limiters and Convergence to Steady State Solutions", AIAA Paper 93-0880, 1993.
- [4] Obayashi, S., Guruswamy, G. P., "Convergence Acceleration of an Aeroelastic Navier-Stokes Solver", AIAA Paper 94-2268, 1994.
- [5] Sharov, D., and Nakahashi, K., "Reordering of Hybrid Unstructured Grids for Lower-Upper Symmetric Gauss-Seidel Computations", AIAA J., Vol.36, No.3, pp.484-486, 1998.
- [6] Goldberg, U. C., and Ramakrishnan, S. V., "A Pointwise Version of Baldwin-Barth Turbulence Model", Comp. Fluid Dyn., 1993, Vol.1, pp.321-338.
- [7] Tracy, R. R., "Hypersonic Flow over a Yawed Circular Cone", Memorandum No.69, California Institute of Technology Graduate Aeronautical Laboratories, Pasadena, Calif., Aug. 1963.

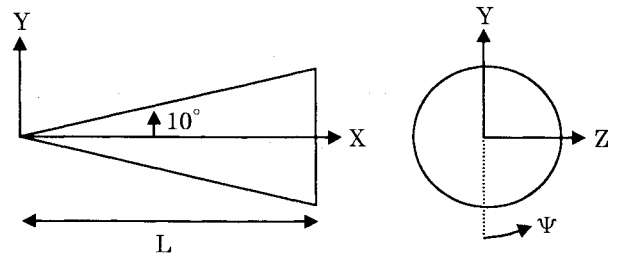
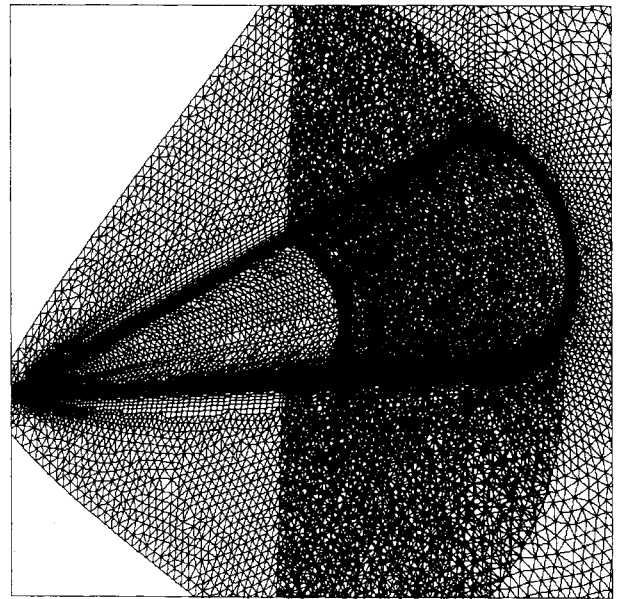
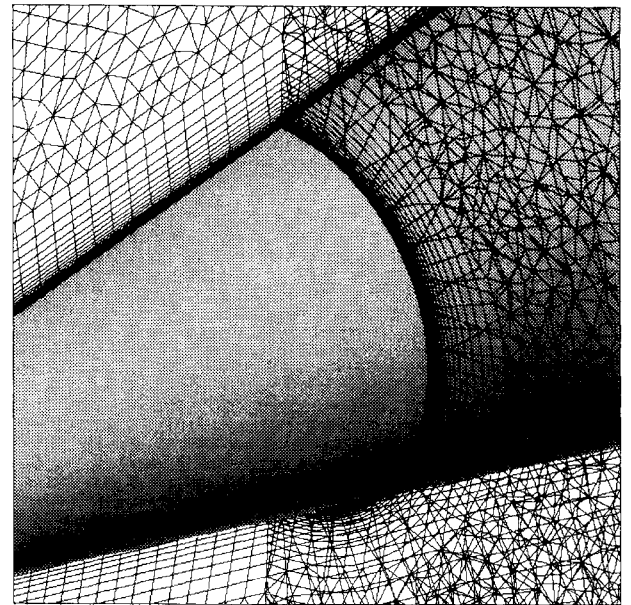


図 4: 円錐形状

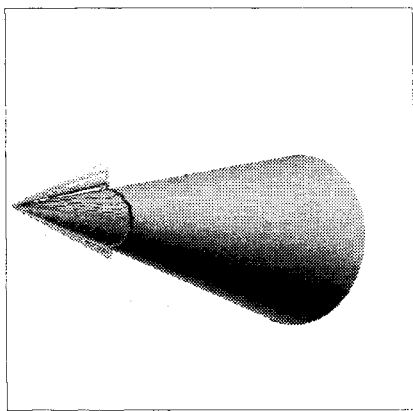


(a) Grid overview

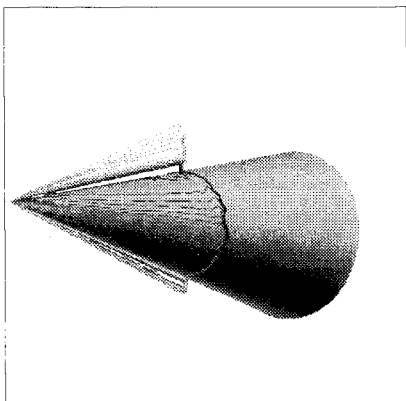


(b) Grid zoom up

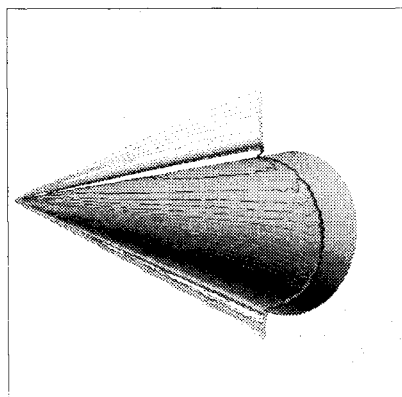
図 5: Computational grid of a circular cone



(a) 7th marching step



(b) 14th marching step



(c) 21st marching step

図 6: 各マーチングステップでの等密度線図

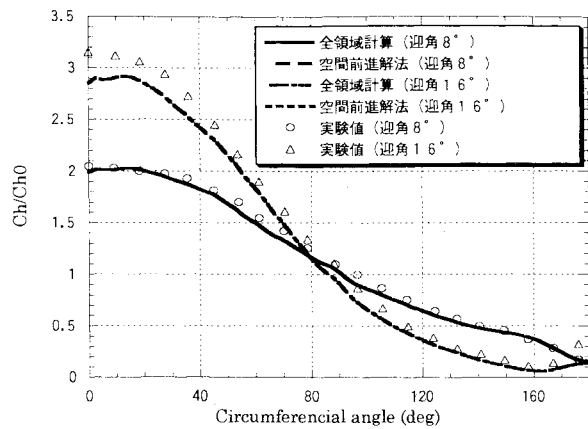


図 8: 熱伝達率

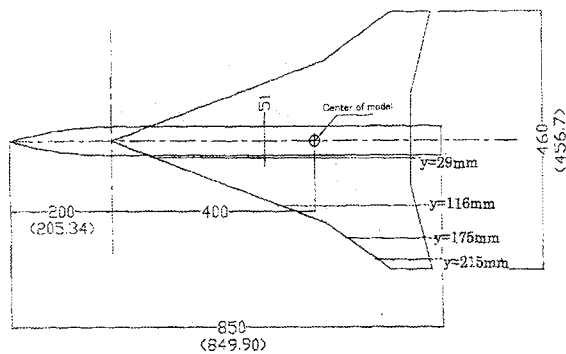


図 9: NAL-HSCT 風洞モデル

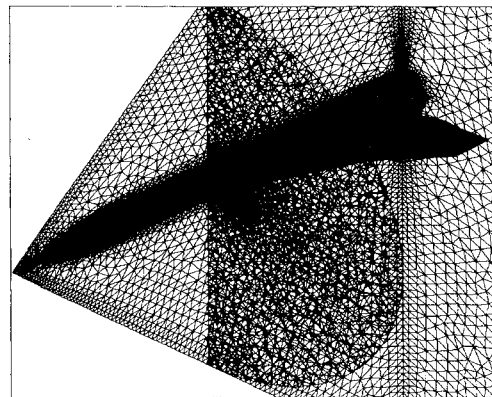


図 10: Computational grid of a NAL-HSCT model

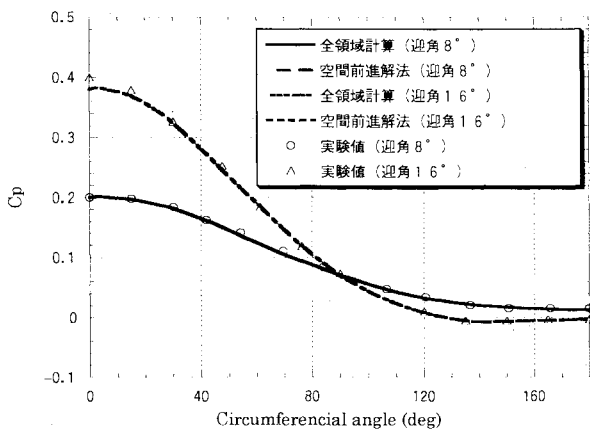
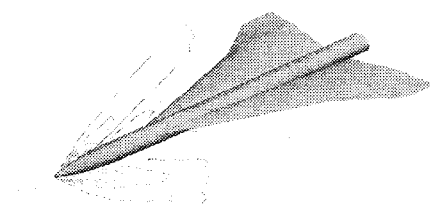
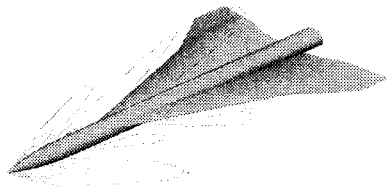


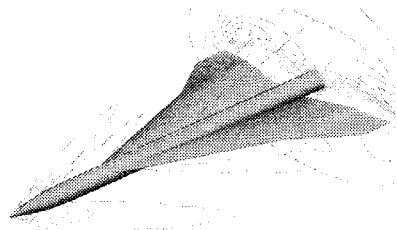
図 7: 表面圧力分布



(a) 5th marching step



(b) 10th marching step



(c) 19th marching step

図 11: 各マーチングステップでの等マッハ線図

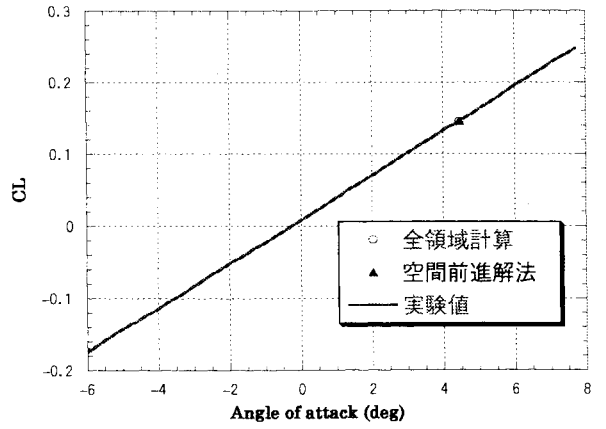


図 13 (a) 揚力係数

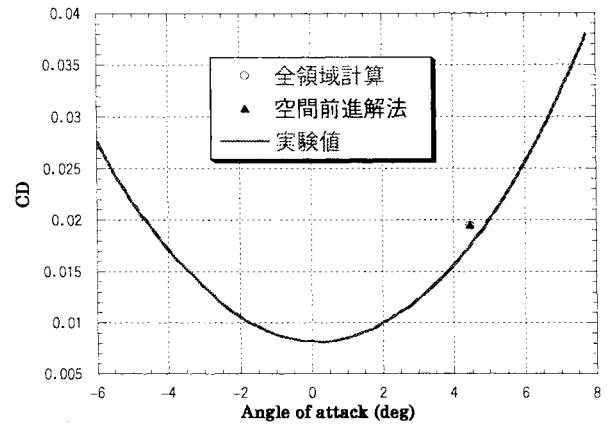
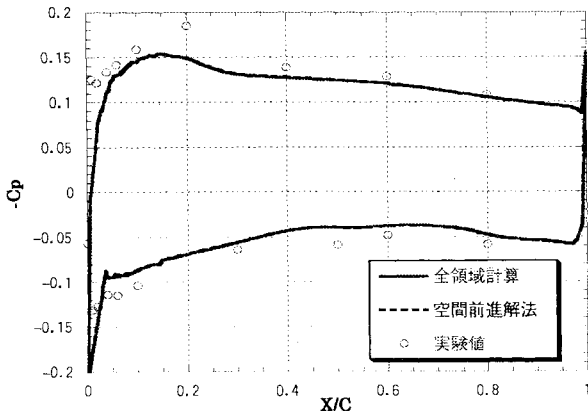
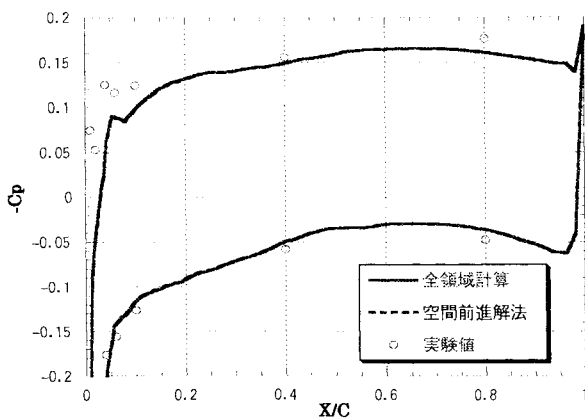


図 13 (b) 抗力係数



(a) y=116 (mm)



(b) y=175 (mm)

図 12: 表面圧力分布

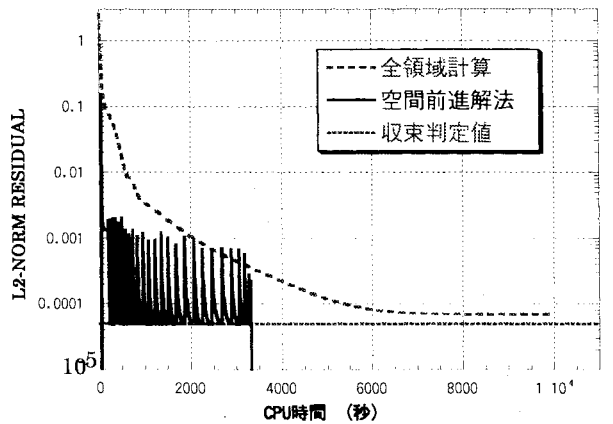


図 14 (a): 収束履歴 (Circular Cone)

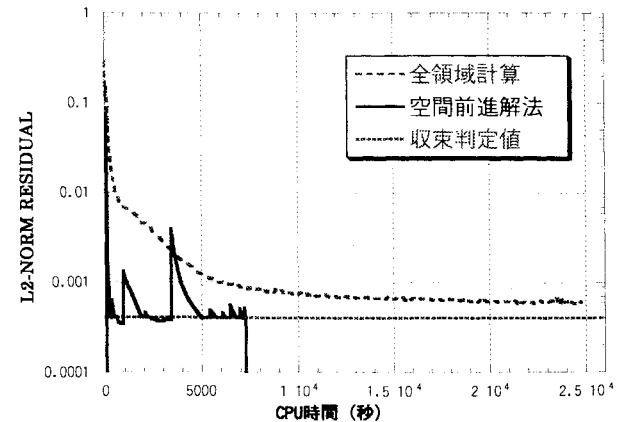


図 14 (b): 収束履歴 (NAL-HSCT)