

e^N 法による境界層遷移の数値予測について跡部 隆¹, 山本 稀義¹Numerical prediction of transition location using the e^N method

by

Takashi Atobe¹, Kiyoshi Yamamoto¹

ABSTRACT

In order to develop a prediction system of laminar-turbulent transition based on e^N method, the Sally code, which was developed by NASA, is investigated in detail. It is found that, although this code can be used for the objects with variety shapes, the accuracy of numerical results are unfavorable.

1 はじめに

当所の重点プロジェクトである次世代小型超音速機の開発においては、その翼上に形成される境界層の乱流遷移の予測が重要な研究課題の一つとなっている。これは、この遷移点を正確に予想することにより翼の性能を知ることができるとともに、その設計段階におけるコストの大幅な低減が期待できるからである。この意味で境界層の遷移点予測は、航空機のあらゆる開発現場において大変重要な問題として取り上げられており、研究が進められている。しかしながらこれらの研究は、様々な状況で常に納得のいくような結果を出すには至っていない。これは境界層遷移のメカニズムの複雑さもさることながら、遷移を引き起こす微少な攪乱の取り扱いの困難性にも問題がある。これは今回のように数値シミュレーションを行う場合にも重大な問題となるが、実験や理論的研究分野においても慎重に取り扱わなければならない問題である。

そこで当所では、実験、理論、数値計算の各方面からそれぞれの視点で研究を行い、また相互に密接な情報の交換を行うことで、より高精度でかつ現実的な遷移予測システムの開発を目指している。本研究はこの中で数値計算面からのアプローチに属するもので、最終的には当所独自の汎用的な遷移予測コードの確立を目指す。そして今回はこの第一段階として、現在汎用プログラムとして市販されている Sally コード¹⁾を用いて実際問題への応用面や理論との比較を行い、その適応範囲を明確に示すとともに我々が開発する遷移予測システムの基礎情報を構築する。

2 計算概要

今回行われた計算は、「境界層流れの計算」と「与えられた流れ場における線形安定性解析」とに大きく分けることができる。境界層流れの計算では、3次元圧縮性流れを対象に境界層近似などのいくつかの仮定のもとで流れ場を求める。そしてここで求めた流れ場から、次の安定性解析で必要となる様々なデータを計算する。この安定性解析コードがいわゆる Sally である。

この一連の計算を、現在当所で開発が進められている小型超音速機の翼断面に適応し、境界層の遷移を予測する。次により単純な平板について計算し、これを実験結果と比較、検討する。さらに斜め円柱について行った計算結果と、理論的に計算されたものとの比較を行うことで、このコードの精度を検討する。

3 境界層流れ

安定性解析を行う境界層流れは、境界層近似を用いた3次元圧縮性流れの相似解を求め、数値的にこの相似解を解くところにより境界層の速度分布を得る。

3.1 基礎方程式

上述のようにここで対象にする流れは3次元圧縮性流れであり、これを記述する基礎方程式は以下の連続の式、Navier-Stokes 方程式、そしてエネルギー方程式を用いる。

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (1)$$

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{u}. \quad (2)$$

$$\frac{DH}{Dt} = -\frac{\nu}{Pr} \nabla^2 H + \nu \Phi. \quad (3)$$

¹ 航空宇宙技術研究所 流体科学総合研究グループ乱流数値解析研究グループ

ただし,

$$\Phi = -2/3(\partial_i u_i)^2 + (\partial_i u_j)^2 + (\partial_i u_j)(\partial_j u_i). \quad (4)$$

ここで u, p, H, ρ, ν , そして P_r はそれぞれ速度, 圧力, エンタルピー, 密度, 動粘性係数, そしてプラントル数を表す. 座標系は円柱座標を用いる.

3.2 近似

物体表面近傍の流れに着目し, 境界層近似, $(\partial/\partial t = 0, v/u \approx v/w \approx \Delta y/\Delta x \approx \Delta y/\Delta z \approx \delta/L \ll 1 : L$ は代表長さ, δ は境界層厚さ) と, 円錐流近似 ($\partial p/\partial x = 0$) を用いることで, 図1に示すような円柱座標系 (x, θ, y) での基礎方程式は以下のように表される. ここで (u, w, v) はそれぞれの座標成分に対する速度を表す.

連続の方程式,

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho x u) + \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho w) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho x v) = 0. \quad (5)$$

運動方程式,

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w}{x} \frac{\partial u}{\partial \theta} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{w^2}{x} = \frac{\partial}{\partial y}(\nu \frac{\partial u}{\partial y}). \quad (6)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial x} + \rho \frac{w}{x} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \rho v \frac{\partial w}{\partial y} + \rho \frac{uw}{x} = -\frac{1}{x} \frac{dp}{d\theta} + \frac{\partial}{\partial y}(\nu \frac{\partial w}{\partial y}). \quad (7)$$

エネルギー方程式,

$$\rho u \frac{\partial H}{\partial x} + \rho \frac{w}{x} \frac{\partial H}{\partial \theta} + \rho v \frac{\partial H}{\partial y} \quad (8)$$

$$= \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{u}{P_r} \frac{\partial H}{\partial y} + \nu \left(1 - \frac{1}{P_r} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u^2 + w^2}{2} \right) \right]. \quad (9)$$

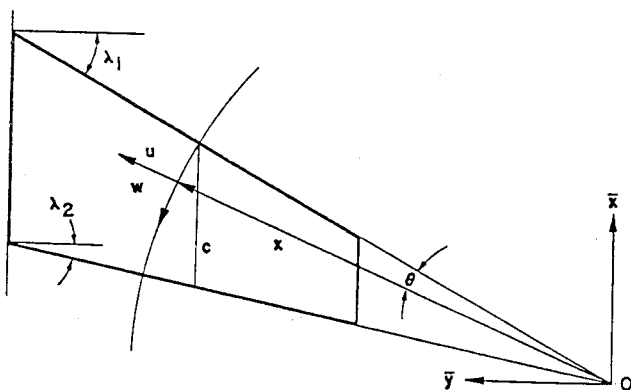


図1. 円柱座標系 (x, θ, y) .

3.3 相似方程式

これらの基礎方程式系は相似解を持つ. 数値計算では適当な境界条件の下でこの相似解を解くことにより, 境界層の速度分布を得る. この相似解は,

$$\psi = x^{3/2} \sqrt{\rho_e \mu_e \bar{u}_e} f(\eta, \theta), \quad (10)$$

$$\phi = x^{3/2} \sqrt{\rho_e \mu_e \bar{u}_e} \frac{w_e}{\bar{u}_e} g(\eta, \theta), \quad (11)$$

とすれば,

$$[Cf'']' + m_1 f'' f + m_2 g f'' - m_3 [(g')^2 - f' g'] + m_4 f'' = m_3 (g' \frac{\partial f'}{\partial \theta} - f' \frac{\partial g}{\partial \theta}), \quad (12)$$

$$[Cg'']' + m_1 g'' f + m_2 g g'' + m_5 [c - (g')^2] - [c - f' g'] + m_4 g'' = m_3 (g' \frac{\partial g'}{\partial \theta} - g'' \frac{\partial g}{\partial \theta}), \quad (13)$$

$$\left[\frac{CE'}{P_r} + \frac{C\bar{u}_e^2}{H_e} \left(1 - \frac{1}{P_r} \right) (f' f'' + m_3^2 g' g'') \right]' + m_1 E' f + m_2 E' g + m_4 E' = m_3 (g' \frac{\partial E}{\partial \theta} - E' \frac{\partial g}{\partial \theta}), \quad (14)$$

となる. ただし,

$$\eta = \sqrt{\frac{\bar{u}_e}{\rho_e \mu_e x}} \rho y, \quad (15)$$

である. また ' は η に関する微分を表し, E, C, c, m_1 , 等はそれぞれ,

$$E \equiv H/H_e, \quad C \equiv \rho \mu / \rho_e \mu_e, \quad c \equiv \rho_e / \rho,$$

$$m_1 \equiv -3/2, \quad m_2 \equiv m_5 + \frac{1}{2} m_3^2 + \frac{p_e}{2(\rho \mu)_e} \frac{d(\rho \mu)_e}{d\theta},$$

$$m_3 \equiv \frac{w_e}{\bar{u}_e}, \quad m_4 \equiv \frac{(\rho v)_w}{(\rho \bar{u})_e}, \quad m_5 \equiv \frac{1}{\bar{u}_e} \frac{dw_e}{d\theta},$$

$$R_x \equiv \frac{\bar{u}_e x}{\nu_e}.$$

であり, 境界条件は,

$$\eta = 0 \quad : \quad f = g = f' = g' = 0, \quad E' = 0 \quad (16)$$

$$\eta = \eta_\infty \quad : \quad f' = g' = E = 1 \quad (17)$$

である. ここで添字 e は境界層外縁における量を表す. また \bar{u}_e は $-u_e$ である.

3.4 主流の取り扱い

この問題の境界条件は物体表面上では滑り無しであるが, 境界層の外側はポテンシャル流として求まる主流に合わせる. この外部境界条件は, 以下の方程式を前縁から積分することによって得られる.

$$\frac{d\bar{u}_e}{d\theta} = -w_e = -\sqrt{u_s^2 - \bar{u}_e^2}. \quad (18)$$

$$p + \frac{1}{2} \rho u_s^2 = \text{const.} \quad (19)$$

ここで u_s は主流方向の速度の大きさを表す.

3.5 数値計算

以上の方程式系は、Keller の Box Method を用いて計算される。詳細については、文献2を参照されたい。

4 線形安定性解析

次に、上の手法により求まる流れ場のデータを用いてその流れ場の線形安定性解析を行う。これは汎用コードとして有名な NASA の Sally コードを用いて行われた。このコードは与えられた流れ場を平行流近似のもとで攪乱の安定性を解析するもので、攪乱波の増幅率等が得られる。以下にその概要を示す。

4.1 攪乱方程式

平行流近似のもとで攪乱波の発展の様子を調べるため、主流成分 (U, V, W, P) に対する攪乱波をそれぞれ以下のように仮定する。

$$u = \phi_1(\alpha, \beta, y, \omega) \exp [i(\alpha x + \beta z - \omega t)]$$

$$v = \phi_2(\alpha, \beta, y, \omega) \exp [i(\alpha x + \beta z - \omega t)]$$

$$w = \phi_3(\alpha, \beta, y, \omega) \exp [i(\alpha x + \beta z - \omega t)]$$

$$p = \phi_4(\alpha, \beta, y, \omega) \exp [i(\alpha x + \beta z - \omega t)]$$

これらの方程式を基礎方程式に代入し、2次以降の項を無視すると以下のような方程式が得られる。

$$\begin{aligned} (\bar{U} - \frac{\omega}{\alpha})(\phi_2'' - \Theta^2 \phi_2) - \bar{U}'' \phi_2 \\ = \frac{-i}{\alpha R}(\phi_2^{IV} - 2\Theta^2 \phi_2'' + \Theta^4 \phi_2) \end{aligned} \quad (20)$$

ここで $\Theta^2 = \alpha^2 + \beta^2$, $\Theta \bar{U} = \alpha U + \beta W$ である。この方程式は Orr-Sommerfeld 方程式と呼ばれるもので、与えられたパラメータに対し束縛条件を満足する解を得るといふ、単純な固有値問題に帰着する。

4.2 e^N 法

一般にある与えられた攪乱に対し流れが不安定であれば、攪乱波はその流れとともに振幅が増幅し、ある一定の振幅に達したところで層流-乱流遷移が発生すると考えられている。つまり初期時刻 $t = t_0$ に A_0 という振幅を持つ攪乱が、流れが乱流に遷移する時刻 $t = t_c$ で A_c という振幅を持つならば、以下のような方程式が成立する。

$$\ln(A_c/A_0) = \int_{t_0}^{t_c} -\omega_i dt. \quad (21)$$

ここで ω_i は、上の攪乱方程式から求まる固有値の虚部である。また (21) 式の $\ln(A_c/A_0)$ は N 値と呼ばれるも

ので、乱流遷移発生の指標とされる。これは航空機の翼の設計時などにおいては大変重要なものであり、この N 値が低いほど遷移が起りにくいとされる。

5 計算結果

以下に本研究で行った数値計算の結果を示す。現実問題への応用、実験、理論との比較を行い、Sally コードの適応範囲を明確化するとともに、計算結果の精度を評価する。

5.1 小型超音速実験機

計算対象として、本所で現在開発が進められている小型超音速機の翼形状を用いた。2種類の翼断面を用い、それぞれについて横流れ不安定の発達状況を調べた(図2)。この時の主流のマッハ数は2であり、これは小型超音速機の実際の飛行状況を想定している。図は a, b とも翼断面とその上の圧力分布、そして前縁から N 値がどのように変化していくかを示したものである。これを見ると、a の形状より b の形状の方が攪乱の振幅は低く押さえられることがわかった。これらの計算を繰り返すことにより、小型超音速機の翼形状として最も適した断面形状を探ることができる。またこの図より乱流遷移が発生する位置がある程度知ることができるが、正確な値を得ることは難しい。

5.2 平板

次により単純な形状として平板を選び、その結果は実験によるものと比較した。これは平板の上に適当な物体を置くことにより、平板上でコード方向に向かって圧力勾配を持つ系を考える。実験³⁾では図3に示すようなシステムを用い、このときの圧力勾配の形状は図4のようになる。ここでの数値計算ではこの圧力勾配のデータを用いて行う。後退角は 45° で、主流、平板長に基づくレイノルズ数は約 2.4×10^5 である。その結果、図5に示すように攪乱波は各振動数ともに前縁から単調に N 値を増しいき、最も大きな N 値を与える振動数は約 180 であることがわかった。実験結果と比較すると、最大増幅を与える攪乱の振動数については本計算とほぼ同程度の値を示すが、そのときの N 値は大きくずれることがわかった。このことは Sally コードによって計算される N 値がやや大きめに算出されることを示している。また実験における N 値の算出過程に少なからぬ誤差が存在することにも起因すると考えられる。

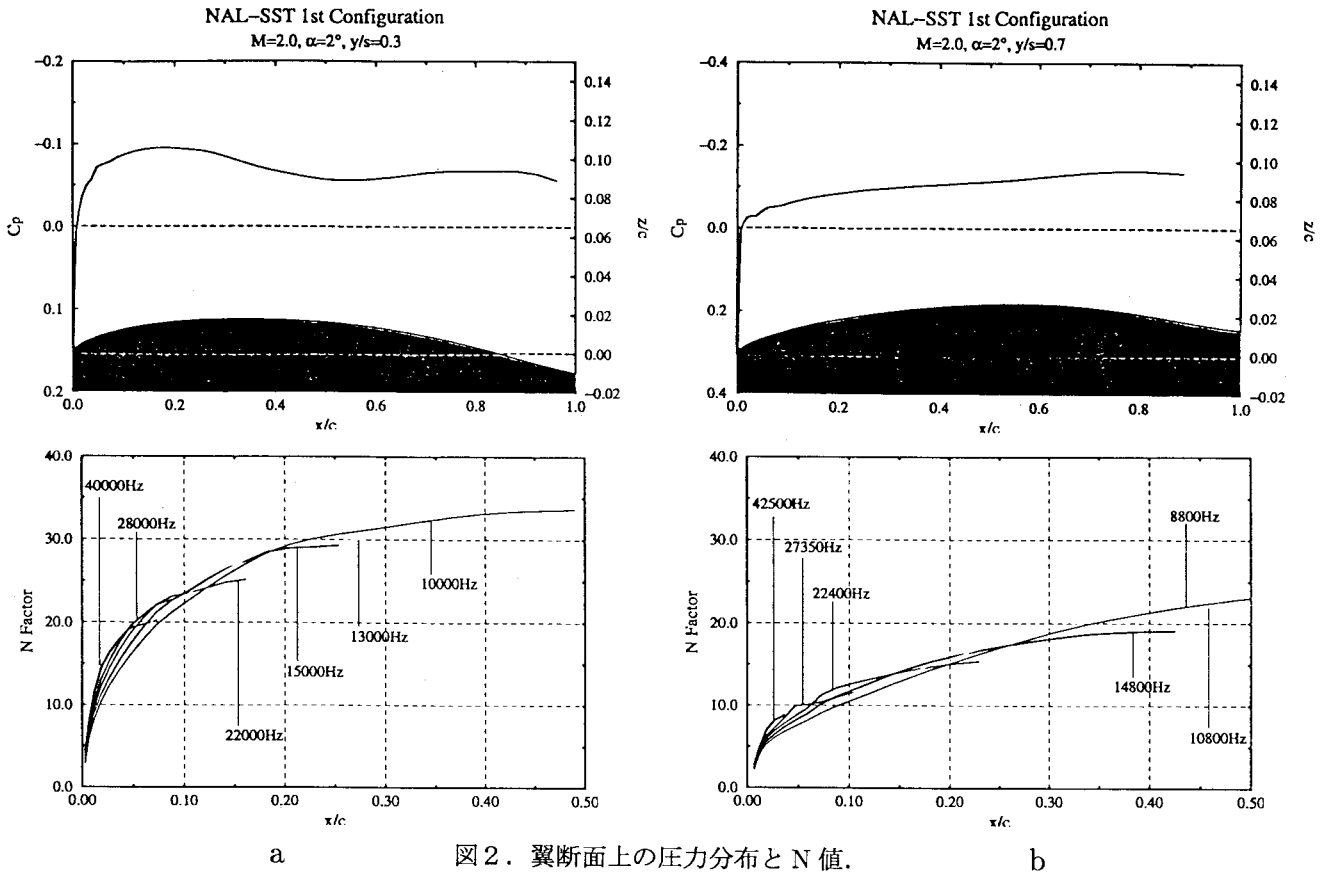
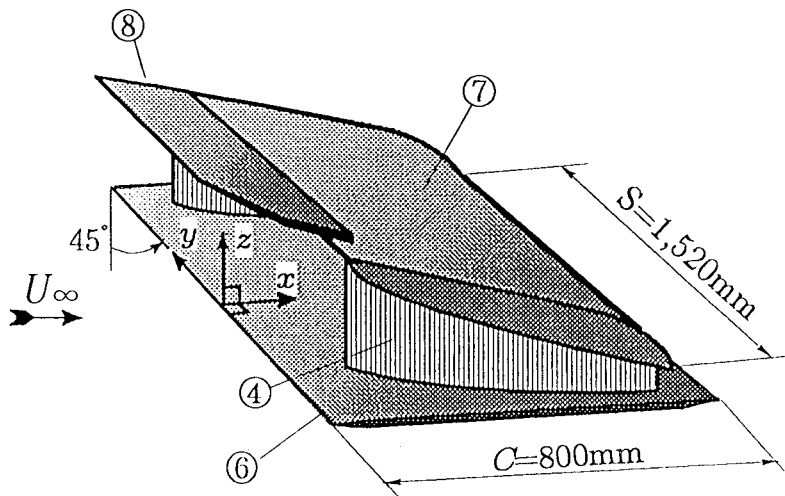


図2. 翼断面上的の圧力分布とN値.



Perspective view

- ① wind tunnel contraction nozzle ② wind tunnel collector
- ③ extended nozzle ④ side plate ⑤ pressure taps ⑥ flat plate
- ⑦ displacement body ⑧ separation preventing plate

図3. 平板の実験装置 (文献3から).

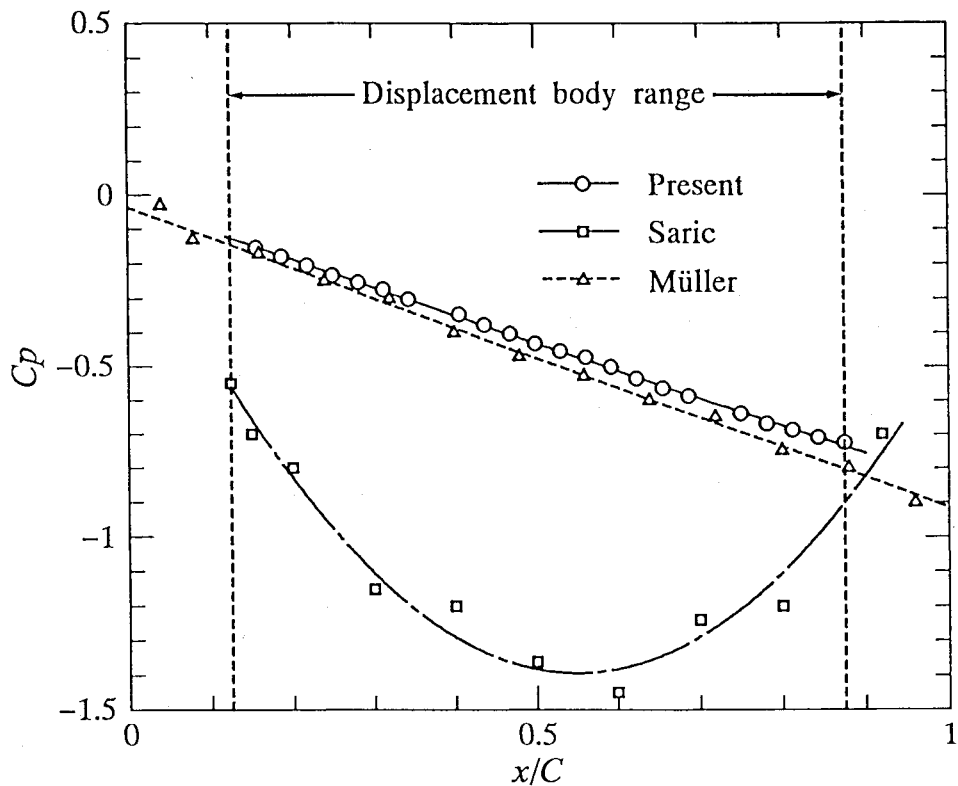


図4. 平板上の圧力分布 (文献3から).

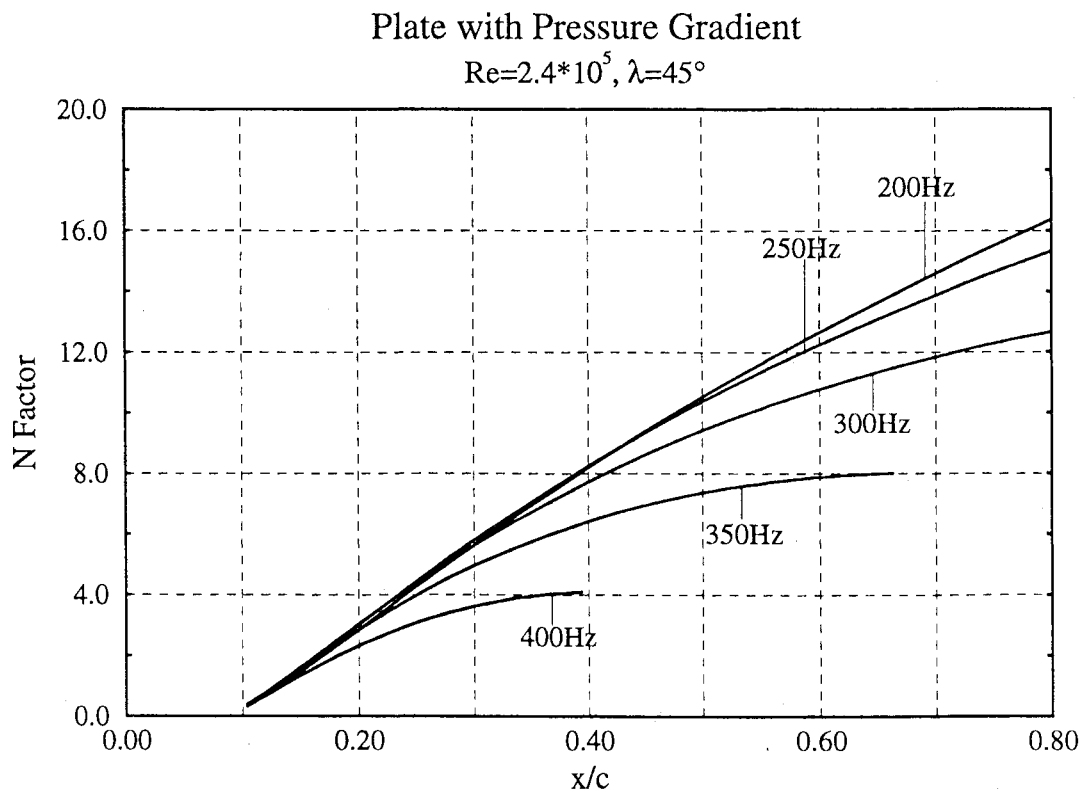


図5. コード位置の変化に対するN値の変化.

5.3 円柱

ここで行われた計算結果の精度をより詳細に評価するため、図6に示すような無限の長さを持つ斜め円柱を用い、理論による予測値と比較した。ここでの理論は Itoh⁴⁾により解析されたもので、N 値の評価に攪乱伝播理論を取り入れることでより高い精度の値を得ている。図7は Itho による結果で、 $x/c = 0.3$ におけるデータを、横軸がスパン方向、縦軸が N 値を表すグラフに示している。図8が本計算での結果で、横軸にコード方向、縦軸にその位置での N 値を示してある。理論によると、 $x/c = 0.3$ で N 値は約 2.7、その時の振動数は 0.09 を与えるのに対し、計算では N 値が 4.2、振動数 0.07 と、これらの間には大きな差があることがわかった。これは Sally コードが平行流近似に基づくものであるということと、流線や壁面の曲率を全く考慮していないことに因る。

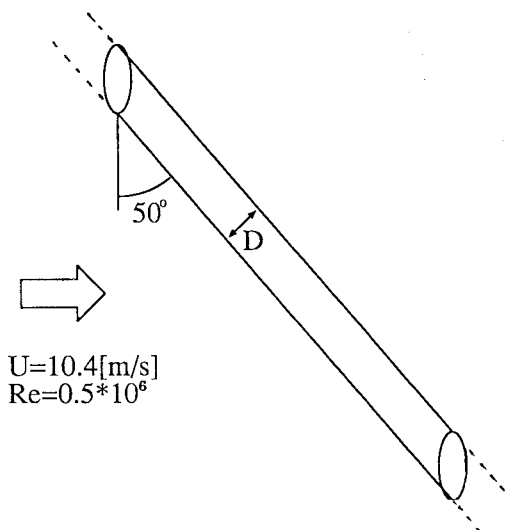


図6. 流れ場の概念図.

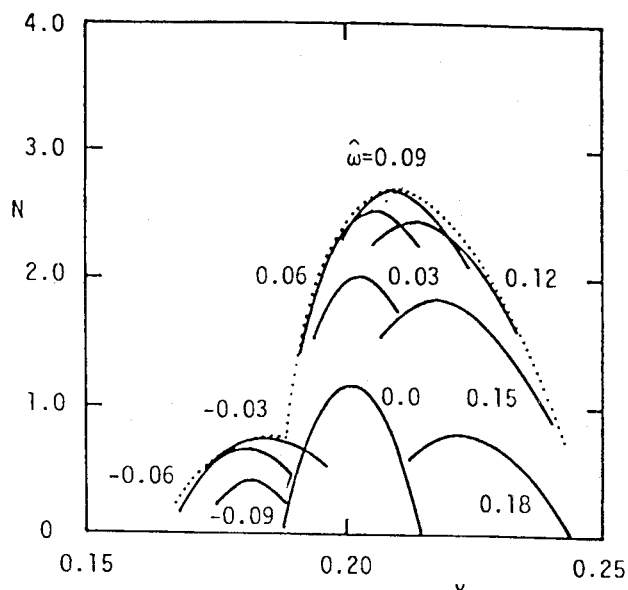


図7. 理論による結果 (文献4から. $x/c = 0.3$).

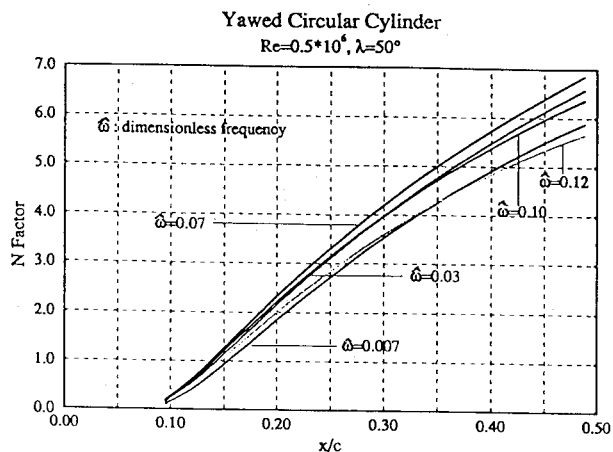


図8. コード位置の変化に対する N 値の変化.

6 まとめ

以上の結果からわかるように、Sally コードを実際問題への適応、実験との比較、理論との比較、という観点から調べたところ、このコードは様々な問題に対し比較的簡単に結果を出すことができる反面、その精度はあまり保証していないことがわかった。以上の結果を踏まえ、今後は攪乱伝播理論や曲率の効果を考慮した、当所独自の遷移予測コードの開発を進めていきたい。

参考文献

- 1) A.Srokowski and S.Orszag, AIAA Paper 77-1222 (1977)
- 2) T.Cebeci and P.Bradshaw, *Momentum Transfer in Boundary Layers* (1977), Hemisphere, pp.213-234
- 3) 江上康広, 東北大学大学院工学研究科博士論文 (1996)
- 4) N.Itoh, Fluid Dyn.Res.18 (1996), pp.337