

## 60 浮力が作用する回転曲管内の流れと熱伝達

石垣 博\* 望月宗和\*

### Fluid Flow and Heat Transfer in Rotating Curved Pipes

Hiroshi ISHIGAKI and Munekazu MOCHIZUKI

National Aerospace Laboratory, Kakuda Research Center.

The fluid flowing in rotating heated curved pipes is subjected to three body forces: centrifugal, Coriolis and buoyant forces. Fully developed laminar flow in heated rotating coiled pipes is investigated through similarity arguments and computational studies. The thermal boundary conditions at the wall are uniform wall heat flux axially and uniform wall temperature peripherally. Flow and heat transfer characteristics are elucidated for the case when they are governed by four parameters: Dean number, Prandtl number, body force ratio and buoyancy parameter. Detailed structures of velocity and temperature fields are shown for wide range of these parameters. Computed results on the friction factor and the mean heat transfer rate are also given.

#### 1 緒言

回転体内部に流路を設け、流体を流して冷却する回転機械の冷却問題では3つのモード、すなわち(I)直流路が回転軸に平行な場合(平行回転)、(II)直流路が回転軸に直交している場合(直交回転)、(III)曲流路が曲率中心のまわりに回転している場合(回転曲管)、が基本的に重要である。著者はこれらすべてのモードについて、流れと熱伝達の特徴を系統的に解明している。本報告はモード(III)についてのものであり、浮力が作用しない場合についてはロスビー数が大きい場合の流れ特性<sup>(1),(2)</sup>と熱伝達特性<sup>(3)</sup>、およびこれらにおよぼすロスビー数の影響<sup>(4)</sup>について既に報告した。

曲管がその曲率中心のまわりに一定角速度で回転するとき、管内を流れる流体には管の曲率による遠心力、管の回転による遠心力とコリオリの力が同時に作用する。さらにたとえば大形発電機などでは回転による遠心力が $10^4g$ にも達するので、管壁と流体のあいだに温度差があると遠心浮力の影響が顕著にあらわれる。このときには3種の体積力が同時に作用し、流動伝熱特性はさらに複雑になる。

浮力が作用する回転曲管内層流についての研究と

\* 航空宇宙技術研究所角田宇宙推進技術研究センター

して、かなり以前のMiyazakiの解析がある<sup>(5),(6)</sup>。この解析は主流と回転が同方向の場合(正回転)について、差分法による数値解を求めたものであるが、回転および浮力の効果がきわめて微弱な場合しか適用できず、また使用したパラメータ群も物理的に正しいものではない。

さてこの流れの体積力効果は曲率、回転、加熱の三つから成るから、極限状態として静止曲管と回転直管の二つの強制対流および平行回転直管の複合対流の合計三つの流れをもつ。このうち、前二者については曲率パラメータ $\lambda$ とロスビー数 $Ro$ がともに大きい場合に定量的相似性(アナロジー)が成立し(層流については文献(7)-(10)、乱流については文献(11)、(12))、著者の回転曲管内流れの研究はこのアナロジーに基礎をおいたものである。また平行回転直管の複合対流については文献(13)、(14)でその流動伝熱特性を明らかにした。

本研究では著者の相似理論を適用して標記の問題に対する相似パラメータを導いた<sup>(15)</sup>。その結果、この流れは $\lambda$ と $Ro$ が大きくてその影響が無視できれば、ディーン数 $K_{LC}$ 、プラントル数 $Pr$ 、体積力比 $F$ および浮力パラメータ $B$ の四つのパラメータにより支配されることが明らかになった。少なくとも4つのパラメータにより支配されるこの流れの全容は複雑・多岐に

わたる。遠心浮力が作用する回転曲管内複合対流の相似性の議論は既にまとめてあるので<sup>(15)</sup>、ここでは流動伝熱場の構造と実用的に重要な圧力損失と熱伝達について述べる。なお熱的境界条件は軸方向に熱流束一定、周方向に壁温一定とする。

2. 主な記号

- $B$  : 浮力パラメータ =  $K_{LB}^2 / (Pr K_{LC}^2)$
- $F$  : 体積力比 =  $\lambda / Ro$
- $K_{LB}$  : 水平直管複合対流の層流特性数 =  $\sqrt{Ra_H}$
- $K_{LC}$  : 曲管の層流特性数 (ディーン数) =  $Re / \sqrt{\lambda}$
- $Pr$  : プラントル数 =  $\nu / \alpha$
- $Ra_H$  : 回転レイリー数 =  $R\Omega^2 \beta q_w d^4 / (\nu k \alpha)$
- $Re$  : 主流のレイノルズ数 =  $w_m d / \nu$
- $Ro$  : ロスビー数 =  $w_m / \Omega d$
- $\beta$  : 体積膨張係数
- $\lambda$  : 曲率パラメータ =  $R / d$

3. 基礎式と数値解法

図1に示すように、曲率中心まわりに回転する曲管に固定して円環座標系  $(r, \theta, \phi)$  をとり、速度成分を  $(u, v, w)$ 、温度  $T$  とする。曲管は  $O'-y'$  軸のまわりに一定の角速度  $\Omega$  で回転するものとし、回転方向が主流方向と同じ場合 ( $\Omega > 0$ ) を正回転、逆の場合 ( $\Omega < 0$ ) を逆回転と呼ぶ。一般に回転機械では回転半径が大きいので、 $\lambda$  が十分に大きい ( $\lambda \approx 8$ ) と仮定すれば、管軸距離  $z = R\phi$  として円筒座標  $(r, \theta, z)$  に変換できる。曲管壁が管軸方向に熱流束一定、周方向に壁温一定の条件で加熱されているものとし、管内の流れは定常、非圧縮性層流で、速度場、温度場ともに完全に発達した状態にあるものとする。また Boussinesq 近似を導入して密度変化は浮力項でのみ考慮し、粘性係数などの物性値は一定と仮定、重力による浮力は無視する。

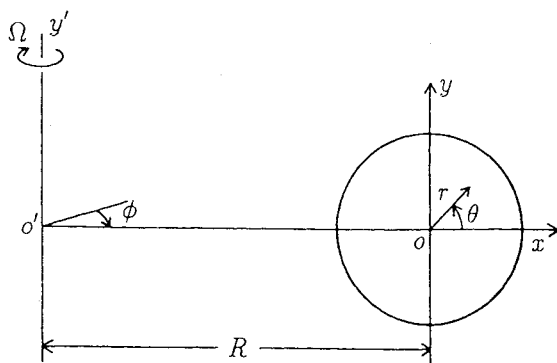


図1 回転曲管の座標系

このとき加熱曲円管内の完全発達層流の基礎方程式は次のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial r}(ru) + \frac{\partial}{\partial \theta}(v) = 0 \dots \dots \dots (1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial r} + \frac{w^2 \cos \theta}{R} + 2\Omega w \cos \theta + R\Omega^2 \beta (T_w - T) \cos \theta + \nu \left( \nabla^2 u - \frac{u}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \dots \dots \dots (2)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{uv}{r} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p^*}{\partial \theta} - \frac{w^2 \sin \theta}{R} - 2\Omega w \sin \theta + R\Omega^2 \beta (T_w - T) \sin \theta + \nu \left( \nabla^2 v - \frac{v}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \dots \dots \dots (3)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial z} - 2\Omega (u \cos \theta - v \sin \theta) + \nu \nabla^2 w \dots \dots \dots (4)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha \nabla^2 T \dots \dots \dots (5)$$

ここに  $\nu$  は動粘性係数、 $\alpha$  は温度拡散係数であり、ラプラスアンは次式で与えられる。

$$\nabla^2 \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

また  $p^*$  は実際の圧力  $p$  から回転遠心力場の作用による平衡圧力を引いた換算圧力である。

$$p^* = p - \frac{1}{2} \rho \Omega^2 (R + r \cos \theta)^2 \dots \dots \dots (6)$$

完全発達流では  $\partial p / \partial z$  は一定となる。

$$-\frac{\partial p^*}{\partial z} = C \dots \dots \dots (6a)$$

さらに軸方向熱流束一定で加熱したときの温度場の完全発達条件より

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{dT_b}{dz} = \frac{4q_w}{\rho c_p w_m d} \dots \dots \dots (6b)$$

の関係がある。ここに  $\rho$  は密度、 $c_p$  は比熱、 $T_b$  は混合平均温度、 $q_w$  は壁熱流束、 $w_m$  は管内平均流速である。

計算は全管断面について行い、境界条件を次のように与えた。

$$r = d/2 : u = v = w = 0, T = T_w,$$

しかし計算結果の等高線はすべて  $x$  軸に関して対称であったので、§5の等高線は半断面のみについて示してある。数値計算プログラムは Patanker の著書<sup>(16)</sup> を参考にして作成したもので、著者らの一連の研究に用いているものである。有限体積法、スタガード格子、べき乗スキーム、SIMPLE法によっている。速度場、温度場ともに発達している場のエネルギー式の計算方法は Kays & Crawford の著書<sup>(17)</sup> を参考にした。格子点は  $r$  方向32、 $\theta$  方向53点を取り、 $\theta$  方向はほぼ等間隔、 $r$  方向は壁近傍で密な不等間隔にとった。

4. 流動伝熱場の相似性<sup>(15)</sup>

緒言でも述べたように、この流れは三つの流れを極限としてもつので、三通りの無次元化が可能である。このうち曲管流と直交回転管内流のあいだにはアナロジーが成立するので、実質的には二つと考えてよい。

浮力が小さいときを想定して曲管内流れを基準にとれば、 $B$ が小さいときの無次元基礎式が得られる。浮力パラメータ  $B = K_{LB}^2 / (Pr K_{LC}^2)$  は流体にはたらく浮力と遠心力の比をあらわし、 $B \rightarrow 0$  とおけば回転曲管内強制対流の無次元式となる。 $B = 0$  のときの速度場は温度場から独立で、 $Pr$ に無関係であり、軸速度場のパターンは  $K_{LC}$  のみによって決まる。温度場は  $Pr$  によって大きく異なり、(i)  $Pr \ll 1$  のときは二次流れのない直管強制対流場に相似、(ii)  $Pr \approx 1$  のときは軸速度場に相似、(iii)  $Pr \gg 1$  のときは二次流れのない直管強制対流のポワズイユ分布に相似となる。

つぎに他方の極限である平行回転直管内複合対流を基準にとれば、 $B$ が大きいときの無次元基礎式が得られる。この式で  $B \rightarrow \infty$  にすれば平行回転直管内複合対流の無次元式となる。この流れでは速度場ではなく温度場が  $Pr$  に独立になる。 $Pr$  の影響は速度場に大きくあらわれ、速度場  $w$  のパターンは (i)  $Pr \ll 1$  のときには二次流れ  $\psi$  に相似、(ii)  $Pr \approx 1$  のときには温度場に相似、(iii)  $Pr \gg 1$  のときには二次流れのない直管強制対流のポワズイユ分布に相似となる。

浮力が作用する曲管内の流動伝熱特性は上に述べた二つの極限の中間状態になり、 $B$  の値を増加させると  $B = 0$  の特性から  $B = \infty$  の特性へと変化してい

く。したがって  $K_{LC}, F$  を一定にとり  $B$  を増加させると軸速度と温度場のパターンは次のように変化する。(i)  $Pr \ll 1$  では軸速度場は  $K_{LC}$  の値により決まるパターン ( $K_{LC}$  が小さければ粘性流型、 $K_{LC}$  が大きければ境界層型) から  $\psi$  に相似なパターンへと変化する。温度場は直管強制対流場の分布から  $K_{LB} = K_{LC} \sqrt{Pr B}$  より決まるパターンに移行する。(ii)  $Pr \approx 1$  では軸速度と温度場は常に相似である、(iii)  $Pr \gg 1$  では軸速度場は  $K_{LC}$  によって決まるパターンからポワズイユ流れのパターンに変化し、温度場は  $\psi$  に相似なパターンから  $K_{LB}$  によって決まるパターンに移行する。

5. 速度場と温度場の基本構造

浮力パラメータ  $B$  による流動伝熱場の構造変化の例として正回転 ( $F > 0$ ) の計算結果を示す。図2 (a) - (d) は  $K_{LC} = 50, F = 2, \lambda = 20$  に固定し、 $Pr = 0.01, 0.7, 7, 100$  の4種の流体について、軸速度  $w$ 、二次流れ  $\psi$ 、温度  $T$  の無次元等高線分布が  $B$  の増加とともにどのように変化するかを示したものである。左端の  $B = 0$  は回転曲管内強制対流を示し、 $w$  分布は  $K_{LC} = 100$  で決まるパターン (粘性流形) をとり、 $Pr$  によって変化しない。他方  $T$  の分布は  $Pr = 0.01$  では放物面分布、 $Pr = 0.7$  では  $w$  分布と相似、 $Pr = 100$  では2ヶ所に極値をもつ  $\psi$  に類似した分布になっている。

参考のため右端には水平直管複合対流 ( $B \rightarrow \infty$ ) の分布を示した。このときの  $K_{LB}$  はその隣の分布と同じ値を与えているので、同一条件における直管 ( $\lambda \rightarrow \infty$ ) の分布に相当する。このとき  $T$  分布は  $K_{LB}$  の値に

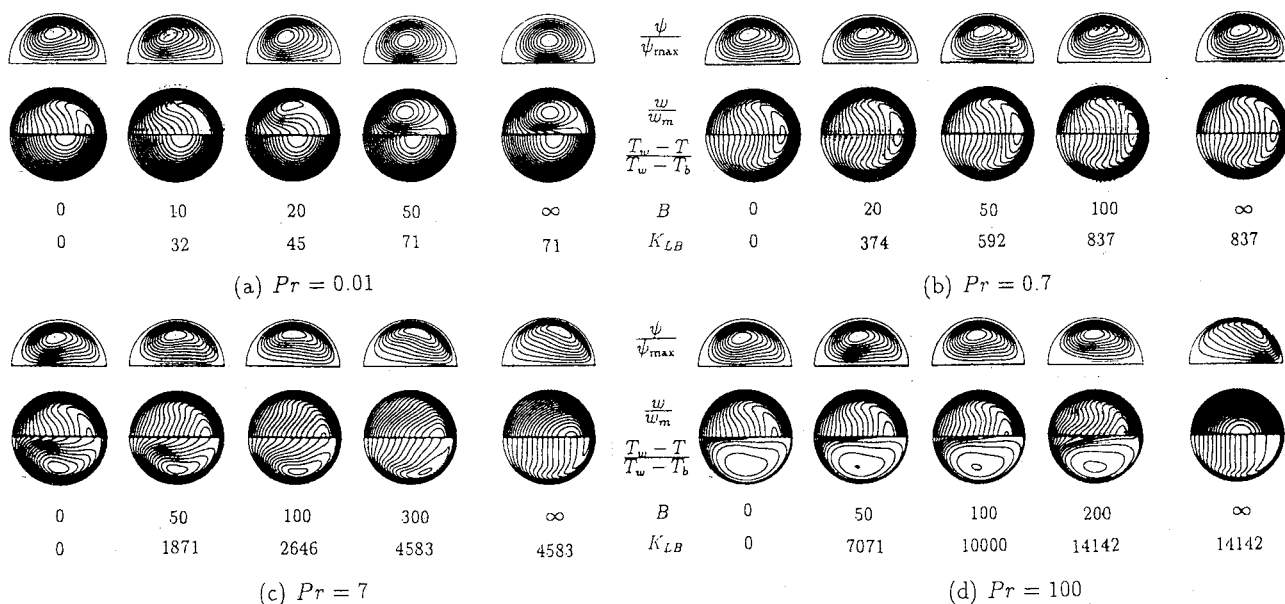


図2 浮力パラメータ  $B$  による等高線の変化 ( $K_{LC} = 100, F = 2, \lambda = 20$ )

よって決まるパターンをとり、 $Pr$ にはほとんど関係しない。他方、 $w$ の分布は前節で述べたように $Pr = 0.01$ では $\psi$ 、 $Pr = 0.7$ では $T$ 、 $Pr = 100$ では放物面分布にそれぞれ相似になっている。

$B$ の有限値の分布を見る。 $F > 0$ のこの場合には管曲率による遠心力、回転によるコリオリ力および加熱による遠心浮力が同一方向( $x$ 方向)にはたつき、3種の二次流れの方向が同じになって重畳されるので、二次流れの逆転現象は起きない。 $Pr = 0.01$ の場合の $w$ 分布の変遷を見ると、 $\bar{w}$ は $K_{LC} = 100$ の一つの極値が分岐して極大値が二つのパターンになり、 $B \rightarrow \infty$ の流線に相似なパターンに漸近する。また $T$ は放物面分布から、 $K_{LB} = 71$ の値で決まるパターンに漸近していく。

$Pr = 0.7$ の場合には、 $w$ と $T$ のパターンはつねにたがいの相似性を保持しながら変化し、分布の様相も $K_{LC}$ で規定されるパターンから $K_{LB}$ で規定されるパターンへと変化していく。 $Pr = 7, 100$ の場合には $Pr = 0.01$ の $w$ とは逆に、 $B$ が増加するにつれて $T$ 分布の2つの極値が一つに縮退する現象がおきる。

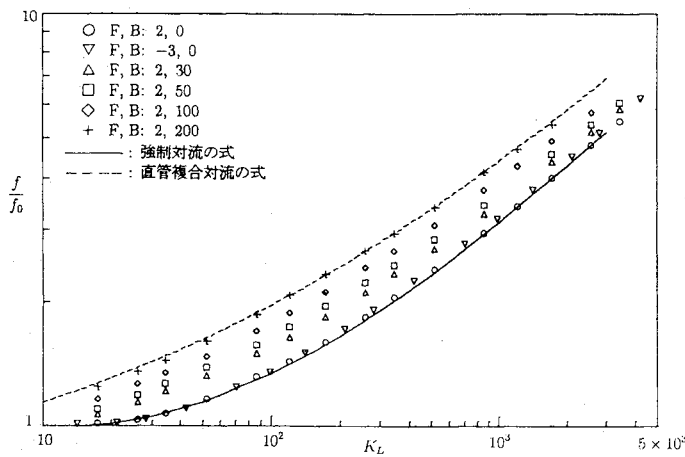


図3 回転曲管複合対流の管摩擦係数( $Pr = 0.7, F = 2$ )

$Pr = 100$ では $K_{LB}$ が非常に大きな値になっても、極限形の対称パターンにはなかなか近づかない。またこれ以上の大きな $K_{LB}$ の値では、数値計算が不安定となって収束解が得にくくなる。現実にも $K_{LB}$ の値が非常に大きくなれば、層流状態が維持できず、非定常あるいは乱流状態になると思われる。逆回転( $F < 0$ )の場合の計算結果については文献(15)を見て頂きたい。

### 6. 管摩擦係数と平均ヌッセルト数

文献(1)-(4)では次のような無次元数 $K_L$ を使用すれば、浮力が作用しない回転曲管内の層流強制対流の管摩擦係数と平均熱伝達率の計算結果、実験値がよく整理できることを示した。

$$\left. \begin{aligned} K_L &= K_{LC}\sqrt{F+1}, & (F > -0.8) \\ &= K_{LC}\sqrt{|F|-1}, & (F < -1.3) \end{aligned} \right\} \dots\dots (7)$$

この変数を用いて整理した浮力が作用する管摩擦係数の計算結果( $Pr = 0.7$ )を図3に示す。図中の実線は純強制対流の半経験式<sup>(2)</sup>

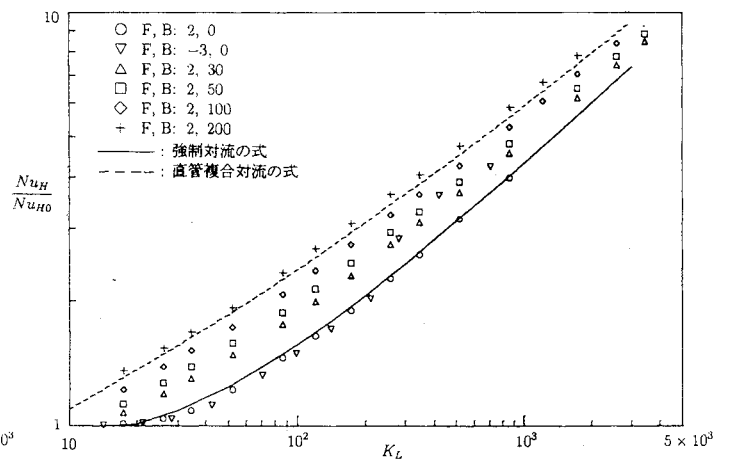


図5 回転曲管複合対流の平均ヌッセルト数( $Pr = 0.7$ )

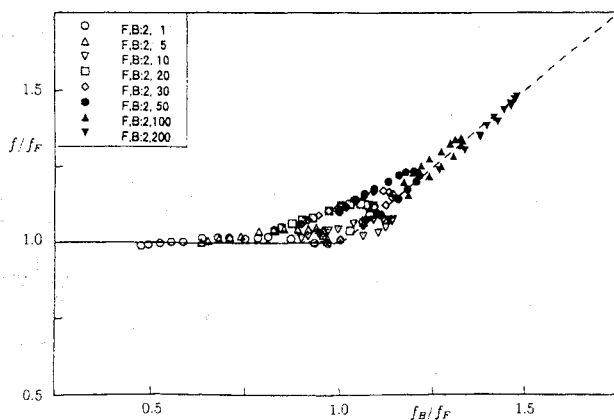


図4 管摩擦係数; 純強制対流から純複合対流への遷移( $Pr = 0.7$ )

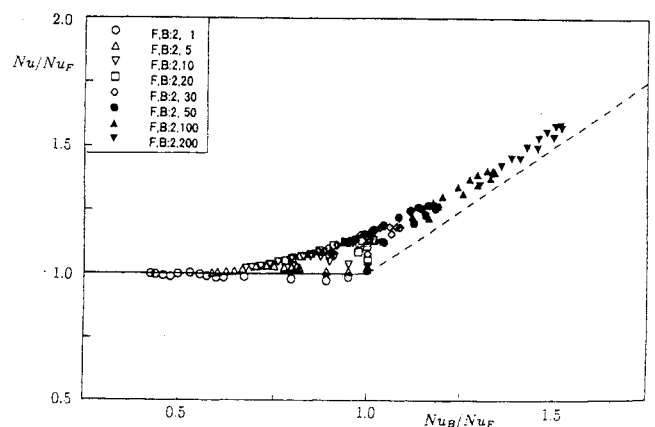


図6 平均ヌッセルト数; 純強制対流から純複合対流への遷移( $Pr = 0.7$ )

$$f_F/f_0 = 0.0899\sqrt{K_L}(1 + 12.4K_L^{-0.701}) \dots\dots\dots (8)$$

破線は曲率と回転の影響がない平行回転管の複合対流の半経験式<sup>(14)</sup>に $B = 200$ を代入したものである。

$$f_B/f_0 = 0.0249\sqrt{K_{PB}}(1 + 24.7K_{PB}^{-0.45}) \dots\dots\dots (9)$$

ただし、 $K_{PB} = K_{LB}Pr^{-5/4}$ ,  $f_0 = Re/16$ . 回転曲管の条件 $F$ を一定にして、加熱条件 $B$ を増加させていくと、(8)から(9)に遷移していく様子が見える。この遷移の様子を別の角度から見るため、 $f_F$ ,  $f_B$ を用いて整理したものを図4に示した。

平均ヌッセルト数についての計算結果を同じ様に整理した結果を図5, 6に示す。ここで

$$Nu_F/Nu_0 = 0.145\sqrt{K_P}(1 + 7.15K_P^{-0.827}),$$

$$Nu_B/Nu_0 = 0.0404\sqrt{K_{LB}}(1 + 6.71K_{LB}^{-0.316})$$

ただし $K_P = K_L\sqrt{Pr}$ ,  $Nu_0 = 48/11$ である。

#### 引用文献

- (1) 石垣博, 機論, 58-561, B, (1993), 1494-1591.
- (2) Ishigaki, H. J. Fluid Mech. 329 (1996), 373-388.
- (3) 石垣博, 機論, 61-582, B, (1995), 672-678.
- (4) 石垣博, 機論, 62-597, B, (1996), 1788-1794.
- (5) Miyazaki, H., Int. J. Heat Mass Transfer, 14(1971), 1295-1309.
- (6) Miyazaki, H., Trans. ASME, J. Heat Transfer, 95 (1973), 64-71.
- (7) 石垣博, 機論, 58-550, B (1992), 1661-1667.
- (8) Ishigaki, H., J. Fluid Mech. 268 (1994), 133-145.
- (9) 石垣博, 機論, 59-561, B (1993), 1486-1493.
- (10) 石垣博, 機論, 61-585, B (1995), 1782-1789.
- (11) 石垣博, 機論, 60-576, B (1994), 2736-2741.
- (12) Ishigaki, H., J. Fluid Mech. 307 (1996), 1.
- (13) 石垣博, 機論, 59-560, B (1993), 1094-1100 (正誤表, 59-564, B, 2600).
- (14) 石垣博, 機論, 61-585, B (1995), 1612-1619.
- (15) 石垣博, 機論, 63-606, B (1997), 513.
- (16) Patankar, S. V., Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, (1980), 113-137, Hemisphere.
- (17) Kays, W. M. & Crawford, M. E., Convective Heat and Mass Transfer 2nd ed. (1980), 90-98.

