

## 乱流 LES に適した一般座標系差分スキームについて

小垣 哲也<sup>\*1</sup>, 谷口 伸行<sup>\*2</sup>, 松尾 裕一<sup>\*3</sup>Proper Finite Difference Schemes in Generalized Coordinates  
for Large Eddy Simulations of Turbulent Flow

by

Tetsuya KOGAKI<sup>\*1</sup>, Nobuyuki TANIGUCHI<sup>\*2</sup>, Yuich MATSUO<sup>\*3</sup>

In order to conduct direct numerical simulations (DNS) or large eddy simulations (LES) of turbulent flow in complicated flow geometry, accurate finite difference methods are needed in generalized curvilinear coordinate system. Recently, it was shown that the analytical conservative properties of the set of basic equations are needed to be satisfied properly even in discretized basic equations in order to obtain accurate and stable solutions in simulations of incompressible turbulent flow using finite difference method. In this paper, it is demonstrated that the analytical conservative properties of the coordinate transformed basic equations for incompressible viscous flows are identical with that in Cartesian coordinates. The basic equations treated here are the continuity equation, the Navier-Stokes equation and the transport equations of the square value of velocity components and the kinetic energy. The finite difference schemes in generalized curvilinear coordinate system that are suitable for simulation of incompressible turbulent flow are constructed from relatively simple extension of the proper finite difference schemes derived in equidistant Cartesian coordinate system. The conservative properties of finite difference schemes constructed in this research in generalized curvilinear system are examined by numerical tests of two-dimensional inviscid flow with periodic domains. It is confirmed that the modified finite difference scheme in a collocated grid layout conserves the mass and kinetic energy properly even in nonorthogonal nonuniform computational grid. The conservative properties of the finite difference scheme in a staggered grid layout is also proper only when computational grids are orthogonal. In addition, direct numerical simulation of plane channel flows with fairly coarse mesh at  $Re_\tau=180$  are conducted using the finite difference schemes in generalized curvilinear coordinate system. It is found that the results are improved by the modified finite difference scheme in collocated grid layout because the residual of continuity equation in regular grid layout is reduced.

## 1. 緒言

非定常な乱流挙動を捉えうる高精度な非圧縮性乱流数値解析手法としては DNS(Direct Numerical Simulation), LES(Large Eddy Simulation)が知られている。しかし, DNS や LES は, RANS(Reynolds Averaged Navier-Stokes equation)モデルに基づく計算と比較すると, モデルの効果が少ない(あるいは全くない)ため, 一般的に計算手法の精度に対する依存性が強く, 高精度な計算手法を必要とする。DNS や LES においては, 数値誤差により生じる運動エネルギーの散逸が, 分子粘性や SGS モデルにより負荷される数値粘性による散逸と比較して十分無視しうる程度でなければならぬ。本研究は, 複雑な形状をした非圧縮性乱流場の DNS, LES のための高精度な有限差分法の離散化手法を構成することを目的とする。最近, コロケート格子系における差分スキームにおいて, 運動エネルギー  $K$  の輸送方程式中の圧力項の保存特性に問題があることが指摘され, それらを改善する修正コロケート格子系差分スキームが森西により提案された<sup>1)</sup>。ここでは, 正規直交座標系において定式化された森西の修正コロケート格子系差分スキームを一般座標系に拡張し, その検証を行う。

## 2. 基礎方程式系の解析的保存特性

本研究で取り扱われる非圧縮性粘性流れの基礎方程式は, 連続の式, Navier-Stokes 方程式および速度二乗量と

運動エネルギー  $K$  の輸送方程式である。まず連続の式と Navier-Stokes 方程式に座標変換を施すと以下のようになる。

$$(\text{Cont.}) \equiv \frac{\partial U_m}{\partial \xi_m} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{u_i}{J} \right) + (\text{Conv.})_i + (\text{Pres.})_i + (\text{Visc.})_i = 0 \quad (2)$$

ここで, 式(1)中, (Cont.)は連続の式を表している。また,  $U_m$  は体積フラックス(または反変速度にヤコビアンを乗じた量)であり, 次式で与えられる。

$$U_m = \frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} u_j \quad (3)$$

式(2)中, (Pres.) および (Visc.) は Navier-Stokes 方程式中の圧力項および粘性項を表し, 次のように定義される。

$$(\text{Pres.})_i \equiv \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left( \frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} p \right) = \frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} \frac{\partial p}{\partial \xi_m} \quad (4)$$

$$(\text{Visc.})_i \equiv - \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left( \nu G^{mn} \frac{\partial u_i}{\partial \xi_n} \right) \quad (5)$$

また, Navier-Stokes 方程式中の (Conv.)<sub>i</sub> は, 発散型 (Div.)<sub>i</sub>, 勾配型 (Adv.)<sub>i</sub> および混合型 (Skew.)<sub>i</sub> が定義できる。

$$(\text{Div.})_i \equiv \frac{\partial}{\partial \xi_m} (U_m u_i) \quad (6)$$

$$(\text{Adv.})_i \equiv U_m \frac{\partial u_i}{\partial \xi_m} \quad (7)$$

$$(\text{Skew.})_i \equiv \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi_m} (U_m u_i) + \frac{1}{2} U_m \frac{\partial u_i}{\partial \xi_m} \quad (8)$$

<sup>\*1</sup> 東京大学大学院(日本学術振興会特別研究員), <sup>\*2</sup> 東京大学生産技術研究所, <sup>\*3</sup> 航空宇宙技術研究所

Table 1 Analytical conservative properties of the basic equations for incompressible flows (extracted from Ref. (2)).

Terms in Momentum Eq.		$u_i$	$u_i^2/2$	$K = u_i^2/2$
(Conv.)	(Div.)	◎	○	○
	(Adv.)	○	○	○
	(Skew.)	○	◎	◎
(Pres.)		◎	×	○
(Visc.)		◎	×	×

これら Navier-Stokes 方程式中の対流項の各型は、座標変換前と全く同様に次のように関係づけられる。

$$(\text{Adv.})_i = (\text{Div.})_i - u_i(\text{Cont.}) \quad (9)$$

$$(\text{Skew.})_i = (\text{Div.})_i - \frac{1}{2}u_i(\text{Cont.}) = (\text{Adv.})_i + \frac{1}{2}u_i(\text{Cont.}) \quad (10)$$

式(1)~(9)から、連続の式、Navier-Stokes 方程式中の圧力項、粘性項および対流項の発散型が保存形であり、式(1)の連続の式が満たされる場合、対流項の勾配型と混合型が発散型と等価となり保存形となることがわかる。

速度二乗量の輸送方程式の解析的保存特性については、次に述べられる運動エネルギー  $K$  の輸送方程式の解析的保存特性と、圧力項を除いてほぼ同様であるので省略する。式(2)の  $i$  成分に  $u_i$  を乗じて縮約を取り、運動エネルギー  $K$  の輸送方程式を導出すると以下ようになる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{K}{J} \right) + u_i(\text{Conv.})_i + u_i(\text{Pres.})_i + u_i(\text{Visc.})_i = 0 \quad (11)$$

上式中左辺第2項は、Navier-Stokes 方程式中の対流項の型に応じて次のように変形できる。

$$u_i(\text{Div.})_i = \frac{\partial}{\partial \xi_m} (U_m K) + K(\text{Cont.}) \quad (12)$$

$$u_i(\text{Adv.})_i = \frac{\partial}{\partial \xi_m} (U_m K) - K(\text{Cont.}) \quad (13)$$

$$u_i(\text{Skew.})_i = \frac{\partial}{\partial \xi_m} (U_m K) \quad (14)$$

運動エネルギーの輸送方程式中では、混合型のみが保存形であり、式(1)の連続の式が満足されると、勾配型および発散型が混合型と等価となり保存形となる。次に、圧力項および粘性項は、以下のように変形できる。

$$u_i(\text{Pres.})_i = \frac{\partial}{\partial \xi_m} (p U_m) - p(\text{Cont.}) \quad (15)$$

$$u_i(\text{Visc.})_i = - \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left( u_i \nu G^{mn} \frac{\partial u_i}{\partial \xi_n} \right) + \nu G^{mn} \frac{\partial u_i}{\partial \xi_m} \frac{\partial u_i}{\partial \xi_n} \quad (16)$$

圧力項は、式(1)の連続の式が満足されると保存形となる。粘性項は、発散型に変形できないため非保存形である。式(16)中の右辺第2項は、分子粘性による運動エネルギー  $K$  の散逸を表している。一方、速度二乗量の輸送方程式中の圧力項は、例えば速度二乗量  $u_i^2/2$  の場合、

$$u_i(\text{Pres.})_i = \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left( p \frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_1} u_1 \right) - p \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left( \frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_1} u_1 \right) \quad (17)$$

となり、第2項の存在から非保存形である。

以上をまとめると、座標変換した基礎方程式（連続の式、Navier-Stokes 方程式、速度二乗量および運動エネルギー  $K$  の輸送方程式）の解析的保存特性は、表1で示される座標変換前の基礎方程式の解析的保存特性<sup>(2)</sup>とすべて一致することがわかる。

### 3. 適切な一般座標系差分スキームの構成

3.1 離散オペレータの定義 基本的な差分および補間スキームとして、任意の変数  $\Phi$  の間隔  $nh_1$  の  $\xi_1$  方向の差分、補間および任意の2つの変数  $\Phi, \Psi$  の積に対する補間を、次のように定義する<sup>(2)</sup>。

$$\frac{\delta_n \Phi}{\delta_n \xi_1} \Bigg|_{\xi_1 \xi_2 \xi_3} = \frac{\Phi(\xi_1 + nh_1/2, \xi_2, \xi_3) - \Phi(\xi_1 - nh_1/2, \xi_2, \xi_3)}{nh_1} \quad (19)$$

$$\bar{\Phi}^{n\delta_1} \Bigg|_{\xi_1 \xi_2 \xi_3} = \frac{\Phi(\xi_1 + nh_1/2, \xi_2, \xi_3) + \Phi(\xi_1 - nh_1/2, \xi_2, \xi_3)}{2} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \Phi \Psi^{n\delta_1} \Bigg|_{\xi_1 \xi_2 \xi_3} &= \frac{1}{2} \Phi \left( \xi_1 + \frac{nh_1}{2}, \xi_2, \xi_3 \right) \Psi \left( \xi_1 - \frac{nh_1}{2}, \xi_2, \xi_3 \right) \\ &+ \frac{1}{2} \Psi \left( \xi_1 + \frac{nh_1}{2}, \xi_2, \xi_3 \right) \Phi \left( \xi_1 - \frac{nh_1}{2}, \xi_2, \xi_3 \right) \end{aligned} \quad (21)$$

式(19)および(20)は、Taylor展開からそれぞれ計算空間上で2次精度の差分および補間であることが確認できるが、物理空間上でも、同様に2次精度であることが証明されている<sup>(3)</sup>。4次精度の差分および補間スキームは、異なる間隔の2次精度離散スキームを組み合わせるにより構成可能である<sup>(2)</sup>。

3.2 計算格子系 速度、圧力といった変数の定義点の配置として、これまで、図1に示されるようなレギュラ、スタガード、コロケート格子系等が実際の計算で用いられている。この中で、レギュラ格子系は圧力場にチェス盤状の振動が生じることで知られている。速度と圧力のデカップリングを防ぐ方法として、直交速度成分の定義点、圧力の定義点からそれぞれの方向に半格子ずれた位置に定義されるスタガード格子系(図1(c))がある。しかし、この本来のスタガード格子系は、一般座標系において計算格子が90度回転した場合を考えると、直交速度成分がセル界面に沿ってしまい、直交速度成分のスタガード配列の利点が失われて解が不安定になる。これに対して Maliskaらは、全ての直交速度成分をそれぞれのセル界面に定義したスタガード格子系(図1(d))を提案した<sup>(4)</sup>。ここではこの Maliska らのスタガード格子系を一般座標系におけるスタガード格子系として取り扱うことにする。

コロケート格子系<sup>(5),(6)</sup>は、図1(b)に示されるように、直交速度成分  $u_i$  と圧力  $p$  がセル中心に、特別な補間により計算される体積フラックス  $F_m$  がセル界面に定義される計算格子系である。コロケート格子系差分スキームは、運動エネルギーの保存特性に誤差が含まれ、高精度なDNS, LESには不向きであることが指摘されている<sup>(2),(7)</sup>。これに対して森西は、コロケート格子系差分スキームの運動エネルギー

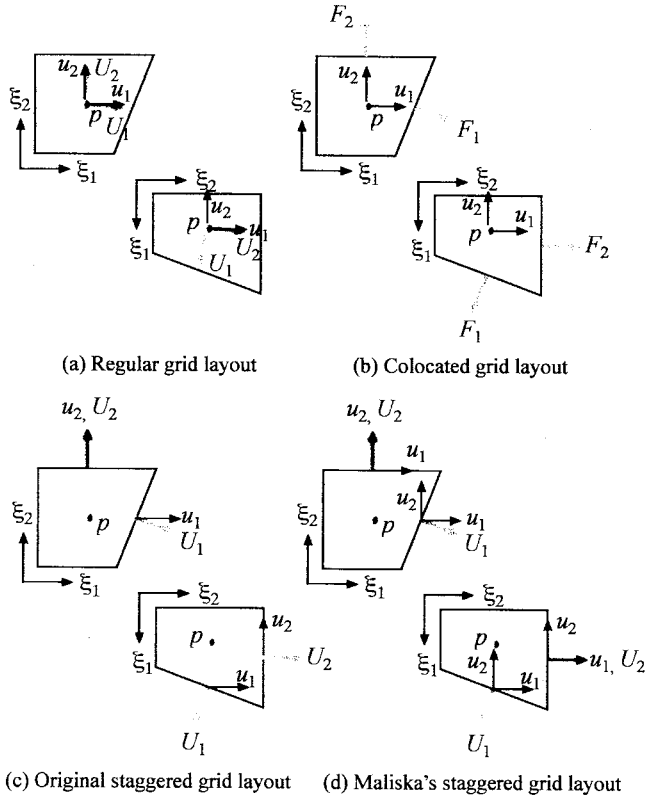


Fig. 1 Various grid layouts in generalized coordinates.

ギーの保存特性を改良した修正コロケート格子系差分スキームを提案している<sup>(1)</sup>.

3.3 一般座標系差分スキームの構成 運動量, 速度二乗量および運動エネルギーの保存特性が適切な差分スキームを構成するためには, 表1で示された基礎方程式の解析的保存特性が離散化式においても適切に近似されなければならない<sup>(2)</sup>. Maliskaのスタガード格子系において, 解析的保存特性を形式上適切に近似する差分スキームについては, 小垣<sup>(8)</sup>を参照していただきたい.

Van Kan修正を導入してコロケート格子系差分スキームの圧力項の運動エネルギーの保存特性を改善した修正コロケート格子系差分スキーム<sup>(1)</sup>を一般座標系に拡張すると, フラクショナルステップ法をベースとした以下のような計算アルゴリズムが構成される.

$$u_i^* = u_i^{k-1} - J\Delta t \left[ -(\text{Conv.} - \text{MC2})_i - (\text{Pres.} - \text{R2})_i - (\text{Visc.} - \text{MC2})_i \right] \quad (22)$$

$$\frac{\delta_1}{\delta_1 \xi_m} \left( G^{mn} \frac{\delta_1 \Delta p^{k\#}}{\delta_1 \xi_n} \right) = \frac{1}{\Delta t} \frac{\delta_1 U_m}{\delta_1 \xi_m} \quad (23)$$

$$u_i^k = u_i^* - J\Delta t \frac{\delta_2}{\delta_2 \xi_m} \left( \frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} \Delta p^k \right) \quad (24)$$

$$F_m^k = U_m^* \frac{\delta_1 \Delta p^{k\#}}{\delta_1 \xi_n} - \Delta t G^{mn} \frac{\delta_1 \Delta p^{k\#}}{\delta_1 \xi_n} \quad (25)$$

$$p^k = p^{k-1} + \Delta p \quad (26)$$

ここで, 式(22)中の-MC2は修正コロケート格子系における2次精度差分スキームを表している. 連続の式は次のように離散化される.

$$(\text{Cont.} - \text{MC2}) \equiv \frac{\delta_1 F_m}{\delta_1 \xi_m} = 0 \quad (27)$$

式(22)中の対流項(Conv.-MC2)<sub>i</sub>は, 以下のように一般座標系に拡張される

$$(\text{Div.} - \text{MC2})_i \equiv \frac{\delta_1 F_m u_i}{\delta_1 \xi_m} \quad (28)$$

$$(\text{Adv.} - \text{MC2})_i \equiv F_m \frac{\delta_1 u_i}{\delta_1 \xi_m} \quad (29)$$

$$(\text{Skew.} - \text{MC2})_i \equiv \frac{1}{2} (\text{Div.} - \text{MC2})_i + \frac{1}{2} (\text{Adv.} - \text{MC2})_i \quad (30)$$

これらの対流項差分スキームは, 離散的に次式を満足する.

$$(\text{Adv.} - \text{MC2})_i = (\text{Div.} - \text{MC2})_i - u_i (\text{Cont.} - \text{MC2}) \quad (31)$$

$$u_i (\text{Div.} - \text{MC2})_i = \frac{\delta_1}{\delta_1 \xi_m} \left( F_m \frac{u_i u_i}{2} \right) + \frac{u_i u_i}{2} (\text{Cont.} - \text{C2}) \quad (32)$$

$$u_i (\text{Adv.} - \text{MC2})_i = \frac{\delta_1}{\delta_1 \xi_m} \left( F_m \frac{u_i u_i}{2} \right) - \frac{u_i u_i}{2} (\text{Cont.} - \text{C2}) \quad (33)$$

$$u_i (\text{Skew.} - \text{MC2})_i = \frac{\delta_1}{\delta_1 \xi_m} \left( F_m \frac{u_i u_i}{2} \right) \quad (34)$$

式(31)は式(9)を, 式(32)~(34)は式(12)~(14)を適切に近似している. 従って, 式(28)~(30)で定義される対流項差分スキームは, 運動量, 速度二乗量および運動エネルギーの保存特性に関して適切な離散化式となっている. 次に, 式(22)中の拡散項(Visc.-MC2)<sub>i</sub>は, Navier-Stokes方程式中でのみ保存形であればいいので, 次式で定義する.

$$(\text{Visc.} - \text{MC2})_i \equiv - \frac{\delta_1}{\delta_1 \xi_m} \left( \nu G^{mn} \frac{\delta_1 u_i}{\delta_1 \xi_n} \right) \quad (35)$$

圧力項差分スキームは, レギュラー格子系で定義される(Pres.-R2)<sub>i</sub>を用いる.

$$(\text{Pres.} - \text{R2})_i \equiv \frac{\delta_2}{\delta_2 \xi_m} \left( \frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} p \right) \equiv \frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} \frac{\delta_2 p}{\delta_2 \xi_m} \quad (36)$$

上式に $u_i$ を乗じて運動エネルギーの圧力項の保存特性を調べると, 以下ようになる.

$$u_i (\text{Pres.} - \text{R2})_i = \frac{\delta_1 p U_m}{\delta_1 x_i} - p (\text{Cont.} - \text{R2}) \quad (37)$$

$$(\text{Cont.} - \text{R2}) \equiv \frac{\delta_2 U_m}{\delta_2 \xi_m} = 0 \quad (38)$$

ここで, 式(38)の(Cont.-R2)は, レギュラ格子系差分スキームにおける連続の式の離散化式であり, この連続の式が満たされなければ圧力項差分スキームの運動エネルギーの保存特性が適切ではないことがわかる. 修正コロケート格子系差分スキームにおいて, 時間ステップにおける $k$ における(Cont.-R2)は, テイラー展開から次のように評価できる.

$$\begin{aligned} \frac{\delta_2 U_m^k}{\delta_2 \xi_m} &= \Delta t \left[ \frac{\delta_1}{\delta_1 \xi_m} \left( G^{mn} \frac{\delta_1 \Delta p^{k\#}}{\delta_1 \xi_n} - G^{mn} \frac{\delta_2 \Delta p^{k\#}}{\delta_2 \xi_n} \right) \right] \\ &= \Delta t \left[ -\frac{1}{8} \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left( G^{mn} \frac{\partial^3 \Delta p^{k\#}}{\partial \xi_n^3} \right) h_n^2 \xi \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{8} \frac{\partial^3}{\partial \xi_m^3} \left( G^{mn} \frac{\partial \Delta p^{k\#}}{\partial \xi_n} \right) h_n^2 + O(h^4) \right] \\ &= O(\Delta t^2 \cdot h^2) \end{aligned} \quad (39)$$

従って、一般座標系に拡張された修正コロケート格子系差分スキームは、等間隔正規直交座標系の場合<sup>(1)</sup>と同様に、運動エネルギーの保存特性の誤差が時間精度1次から2次に改善されている。

4. 一般座標系差分スキームの保存特性の検証

4.1 検証方法概要 本研究で構成した一般座標系差分スキームの運動量および運動エネルギーの保存特性を調査するために2次元周期的非粘性流の数値実験<sup>(2)</sup>を行った。時間進行法は、時間積分による影響をなるべく小さくするため、3次精度Runge-Kutta法<sup>(6)</sup>を用い、クーラン数 $CFL(=C_x \Delta t / \Delta x_{min})$ は、ことわりのない場合、十分小さい $CFL=0.01$ としている。計算は、無次元時間 $t=10$ まで行われる。速度と圧力のカップリングアルゴリズムは、フラクショナルステップ法を用いている。圧力方程式は、van der VorstのBi-CGStab法<sup>(9)</sup>を用いて解き、残差ベクトルの大きさが $10^{-10}$ になるまで収束させる。このときの連続の式の残差は $10^{-12}$ 程度である。計算領域および格子点数は、それぞれ $2\pi \times 2\pi$ ,  $16 \times 16$ である。計算格子の不等間隔および非直交性が保存特性に与える影響を調べるため、直交等間隔格子(COS0, C:Clustering, S:Skew)に加え、格子点制御関数として双曲線正接分布関数<sup>(3)</sup>を用いた直交不等間隔格子(CnS0,  $n=1 \sim 3$ )および図2に示される等間隔非直交格子(COSn,  $n=1 \sim 3$ )を用意した。不等間隔、非直交性の度合いは、 $n$ が増加するほど強くなる。境界条件は、全方向に周期境界条件が課される。初期値の作成は、森西<sup>(2)</sup>の方法にほぼ準じている。

4.2 検証結果 図3は、Maliskaのスタガード格子系における2次精度一般座標系差分スキームの場合の、運動エネルギー総量の誤差の時間平均絶対値のクーラン数に対する変化を示す。ここで、Maliskaのスタガード格子系における計算領域全体の運動エネルギーの総和は以下のように定義する。

$$K_1 = \sum_{\xi} \sum_n \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{u_1^2}{J} \right)_{C.S.1} + \frac{1}{2} \left( \frac{u_2^2}{J} \right)_{C.S.2} \right] \quad (42)$$

$$K_2 = \sum_{\xi} \sum_n \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{u_1^2}{J} \right)_{C.S.2} + \frac{1}{2} \left( \frac{u_2^2}{J} \right)_{C.S.1} \right] \quad (43)$$

ここで、式(42)、(43)中の下付添え字C.S.は、直交速度成分が定義されているセル界面の番号を表し、C.S.1およびC.S.2はそれぞれ、通常スタガード格子系において、 $u_1$

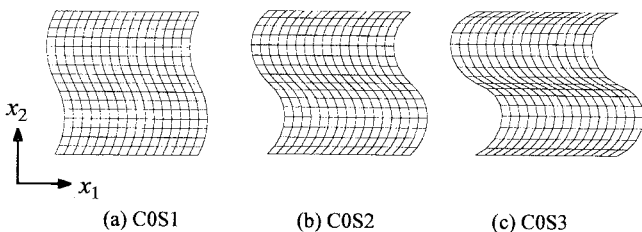


Fig. 2 Nonorthogonal uniform grids used for validation tests of conservative properties of finite difference schemes in generalized coordinate system.

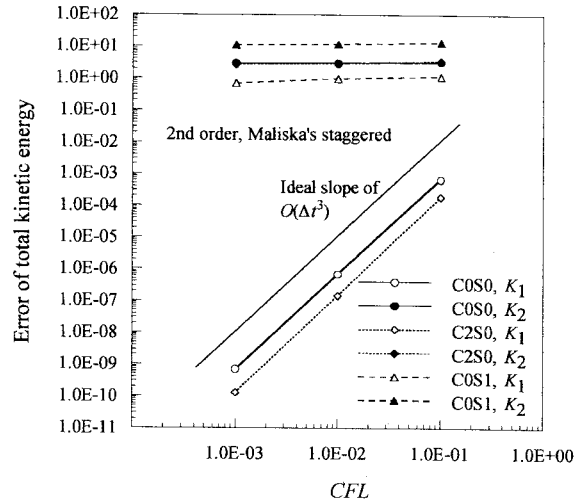


Fig. 3 The error of total kinetic energy by the second-order accurate finite difference scheme in Maliska's staggered grid layout as a function of Courant number.

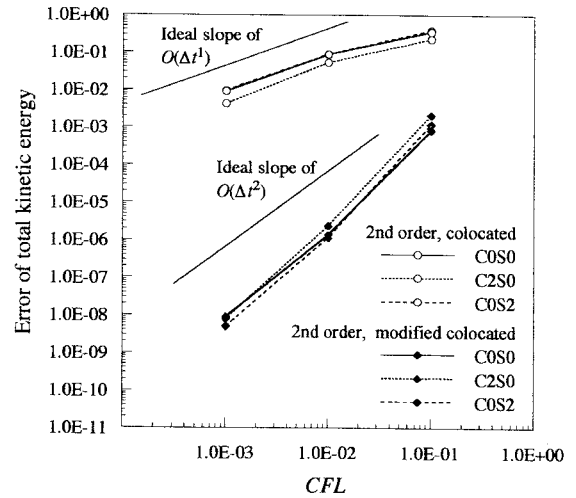


Fig. 4 The error of total kinetic energy by the second-order accurate finite difference schemes in the collocated and the modified collocated grid layouts as a function of Courant number.

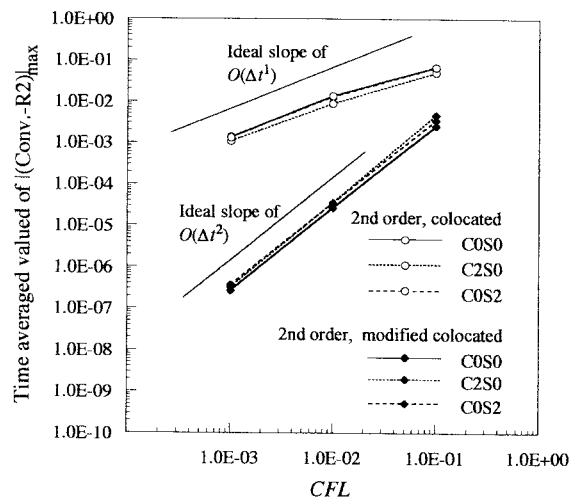


Fig. 5 The time averaged value of  $|(Conv.-R2)|_{max}$  by the second-order accurate finite difference schemes in the collocated and the modified collocated grid layouts as a function of Courant number.

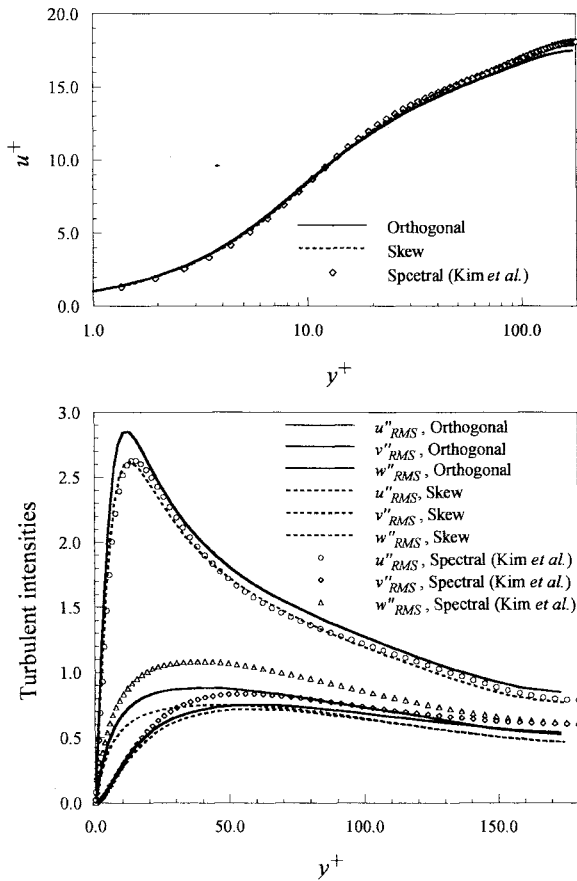


Fig. 6 Time averaged streamwise velocity and velocity fluctuations of velocity components by the finite difference scheme in Maliska's staggered grid layout.

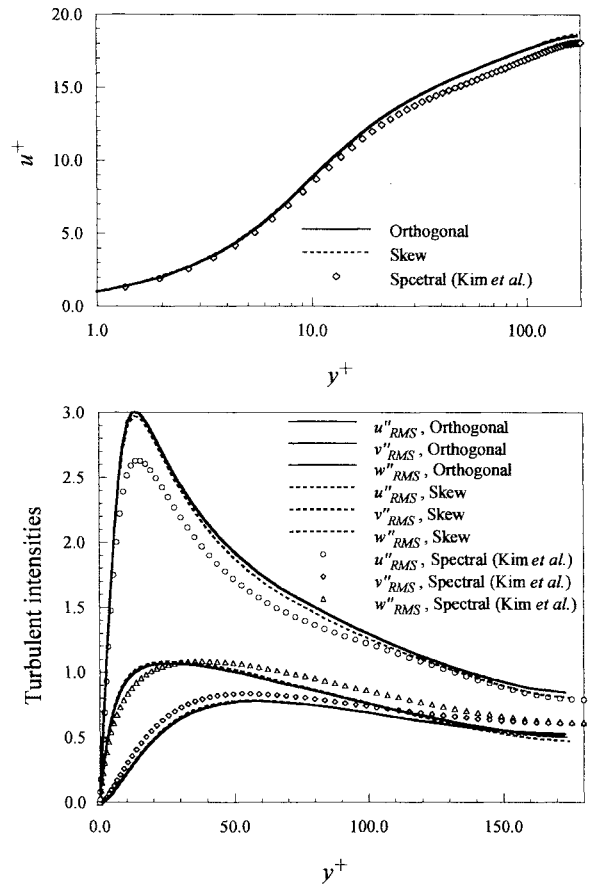


Fig. 7 Time averaged streamwise velocity and velocity fluctuations of velocity components by the modified finite difference scheme in collocated grid layout.

および  $u_2$  が定義されているセル界面を表す。計算格子が直交格子の場合、 $K_1$  の保存特性の誤差は、時間進行法の精度である  $O(\Delta t^3)$  に比例して減少しているのに対して、セル界面に接する直交速度成分から構成された運動エネルギーの総和  $K_2$  は、適切に保存されていない。また、計算格子が非直交の場合、 $K_2$  の保存特性の誤差が  $K_1$  の保存特性にも影響を及ぼし、 $K_1, K_2$  がともに適切に保存されなくなる。

一般座標系における2次精度の従来のコロケート格子系および修正コロケート格子系差分スキームの場合の、運動エネルギー総量の誤差の時間平均絶対値のクーラン数に対する変化を図4に示す。また、図5には、同計算における連続の式(Cont.-R2)の絶対値の最大値の時間平均値  $|(Cont.-R2)|_{max}$  のクーラン数に対する変化が示されている。修正コロケート格子系差分スキームの場合、 $|(Cont.-R2)|_{max}$  が  $O(\Delta t^2)$  に比例して減少することによって、運動エネルギーの保存特性が改善されていることがわかる。また、こうした傾向は、不等間隔直交、等間隔非直交のいずれの計算格子においても同様であるため、等間隔正規直交座標系における修正コロケート格子系差分スキーム<sup>(3)</sup>が一般座標系に適切に拡張されているといえる。

なお、図では示さないが、運動量の総量の誤差は、格子系、計算格子を問わず、倍精度計算の丸め誤差  $O(10^{-15})$  程度であり、運動量の保存特性には全く問題なかった。

## 5. 平行平板間内乱流への適用

5.1 計算の概要 本研究で構成した一般座標系差分スキームの実際の乱流場への適用例として、壁面摩擦速度をベースとしたレイノルズ数  $Re_\tau=180$  の平行平板間内乱流の計算を行い、スペクトル法によるDNSデータ<sup>(11),(12)</sup>と比較した。計算アルゴリズムにはフラクショナルステップ法を用い、時間進行法は、対流項を2次精度 Adams-Bashforth法、拡散項をCrank-Nicolsonスキームにより行う半陰解法である。時間間隔は、0.00025である。空間離散化は一般座標系におけるMaliskaのスタガード格子系差分スキームまたは修正コロケート格子系差分スキームを使用した。圧力Poisson方程式はBi-CGStab法<sup>(9)</sup>を用いている。ここでは、計算スキームの影響のみを調査するために、SGSモデルは使用していない。計算格子は、DNSとしては非常に粗い格子点数( $33 \times 65 \times 33$ )を使用している。また、不等間隔直交格子に加え、格子の非直交性の影響を調べるため、壁方向にひずみを持つ不等間隔非直交格子の2つの計算格子を使用した。直交格子、非直交格子において壁からの第1格子点の壁座標  $y^+$  はそれぞれ、 $y^+=0.45, y^+=1.0$  である。計算領域は  $x, y, z$  方向にそれぞれ、 $\pi \times H \times \pi/2$  である。

4.2 計算結果 スタガード格子系および修正コロケート格子系差分スキームによる流れ方向の時間平均速度分布および乱れ強度をそれぞれ図6, 7に示す。スタガード格

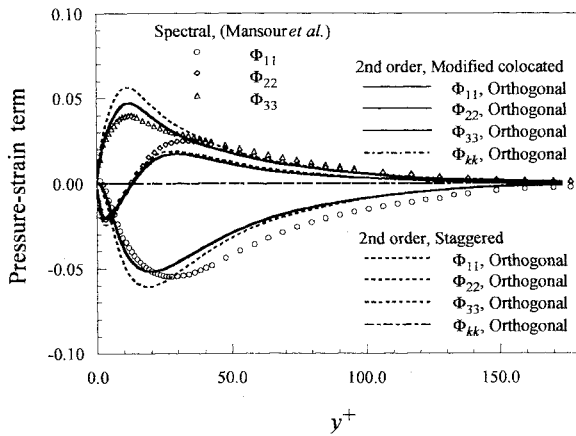


Fig. 8 Pressure-strain term in Reynolds stress budget (finite difference scheme in staggered grid layout and modified finite difference scheme in collocated grid layout, orthogonal grid).

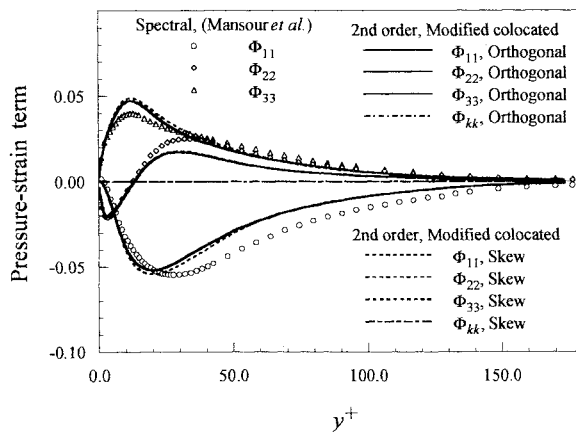


Fig. 9 Pressure-strain term in Reynolds stress budget (modified finite difference schemes in collocated grid layout, orthogonal and nonorthogonal grids).

子系差分スキームの場合、格子が非直交だと、平均流速が増加し、乱れ強度が減少する傾向を示している。一方、修正コロケート格子系差分スキームの場合、計算格子の非直交性が平均流速分布および乱れ強度分布に与える影響は僅かである。従って、運動エネルギーの保存特性が満たされることによって、格子の非直交性、不等間隔に対する解の依存性が小さくなる傾向を持つ。

次に、レイノルズ応力収支式中の圧力ひずみ相関項の対角成分 $\phi_{11}$ 、 $\phi_{22}$ 、 $\phi_{33}$ およびそのトレース $\phi_{kk}$ の分布を図8、9に示す。従来、コロケート格子系差分スキームでは、レギュラー格子系における連続の式(Cont.-R2)が満たされないことに起因して、圧力ひずみ相関項の計算精度が非常に低かった<sup>(7)</sup>。しかし、修正コロケート格子系差分スキームでは、レギュラー格子系における連続の式の残差が時間2次精度に改善されるのに伴い、圧力ひずみ相関項の計算精度が改善され、スタガード格子系差分スキームの結果と比較しても遜色のない結果が得られている。また、コロケート格子系差分スキームの場合、トレース $\phi_{kk}$ の残差がゼロにならないという問題があったが、修正コロケート格子系差分スキームの場合、計算格子が非直交で

ある場合でも、トレース $\phi_{kk}$ の残差は $10^{-6}$ オーダーと非常に小さく、解の信頼性が向上している。

#### 4. 結 論

森西により提案された等間隔正規直交座標系における修正コロケート格子系差分スキームを一般座標系に拡張できることを示し、運動量と運動エネルギーの総量が時間的に保存されるべき2次元周期的非粘性流の数値実験を行った。その結果、不等間隔非直交である任意の一般座標系の計算格子の場合においても、運動量のみならず運動エネルギーの保存特性が十分であるのは、修正コロケート格子系における一般座標系差分スキームのみであることがわかった。ただし、直交不等間隔の場合は、従来のスタガード格子系における差分スキームも運動量および運動エネルギーの保存特性が適切である。さらに、本研究で構成した一般座標系差分スキームの実際の乱流場への適用例として、平行平板間内乱流の数値計算を行った。その結果、一般座標系における修正コロケート格子系差分スキームは、レイノルズ応力収支式の圧力ひずみ相関項の計算精度が改善されることによって、統計量の信頼性が向上するとともに、計算格子の非直交性の影響を受けにくい優れた特性を持つことを実証した。

#### 謝 辞

本研究を遂行するにあたり、名古屋工業大学、森西洋平助教からご指導いただいた。記して謝意を表す。本研究は、日本学術振興会特別研究員奨励費(No. 7186)およびNEDO独自の産業技術研究開発促進事業(ID No. 8H代-170)の援助を受けた。また、本研究は、科学技術庁航空宇宙技術研究所、東京大学生産技術研究所、東京理科大学および富山大学間の「計算科学技術共同研究」の一環として行われた。

#### 参 考 文 献

- (1) 森西.(1998). 機論, 投稿中
- (2) 森西.(1996). 機論, 62-604, B(1996), 4090-4112.
- (3) Thompson, J. F., Warsi, Z. U. A. and Mastine, C. W. (1994). *J. Fluid Eng.*, **107**, 18-33.
- (4) Maliska, C. R. and Raithby, G. D. (1984). *Int. J. Numerical Methods in Fluids*, **4**, 519-537.
- (5) Rhie, C. M. and Chow, R. L. (1983). *AIAA J.*, **21**, 1525-1532.
- (6) Peric, M., Kessler, R. and Scheuerer, G. (1988). *Computers & Fluids*, **16-4**, 389-403.
- (7) 大岡・持田・村上.(1997). 生産研究, 49-1, 19-26.
- (8) 小垣・小林・谷口(1997). 第11回数値流体力学シンポジウム講演論文集, 501-502.
- (9) 藤野・松本・水藤(1991). 第5回数値流体力学シンポジウム講演論文集, 501-504.
- (10) Kim, J., Moin, P. and Moser (1987). *J. Fluid Mech.*, **177**, 133-166.
- (11) Mansour, M. N., Kim, J. and Moin, P.(1988). *J. Fluid Mech.*, **194**, 15-44.
- (12) 大岡・村上・持田(1997). 生産研究, 49-1, 19-26.