# 回転円盤流の絶対不安定について

伊藤信毅（航技研）

# On absolute instability of rotating-disk flow

by
Nobutake Itoh
National Aerospace Laboratory

ABSTRACT
A theoretical description of local and propagating-wave disturbances is made with the method of complex characteristics to show whether the absolute instability can occur in the three-dimensional boundary layer on a rotating disk. Numerical solutions of the propagation theory indicate no particular amplification of disturbances near zeros of the complex group velocity in contradition to results of the conventional parallel-flow theory.

## 1．はじめに

絶対不安定は時間的にも空間的にも変動する波動型撹乱の群速度の零点に関係して発生することが知られている[1)]。しかし、その数学的な特異性と波動の伝播や発達という物理的現象の関係はまだ十分説明されていない。境界層の線形安定理論は波数と振動数を結びつける局所的な分散関係を複素関数

$$\omega=\Omega(\alpha, \beta, R) \qquad (1)$$

の形で与え、群速度$\Omega_\alpha$も複素数値を取る。最近筆者[2,3)]は複素群速度をそのまま使用する複素特性曲線法を提案し、三次元境界層における点源楔状撹乱や環状波束撹乱の記述に成功している。今回は、この理論を回転円盤流の局所固有解に適用し、群速度の零点近傍の解の振舞いを調べる。

## 2．複素特性曲線法

回転円盤流では特異点$\Omega_\alpha=0$は横流れ不安定に関係して現われるので、ここでは簡単のため、撹乱方程式としてオル・ゾンマーフェルト方程式を用い、無次元化に境界層厚さ$\delta=\sqrt{\nu/\omega_D}$と局所外部流速$r\omega_D$を使用する。$\omega_D$は円盤の回転角速度である。このとき半径方向の距離$r$を$\delta$で無次元化したものは局所レイノルズ数 $R=r\omega_D\delta/\nu$に一致する。撹乱としては、$R=R_0$に設けられた環状のスリットから瞬間的にジェットを放出したときにできる軸対称波束型撹乱を考え、適当に選ばれた下流位置$R=R_1$で観測が行われるものとする[3)]。この場合には撹乱パターンの軸対称性から周方向波数は実数で、実際には整数値$\beta R=n$取るが、計算ではnを連続的な実数として扱う。いま複素群速度をレイノルズ数R、複素振動数$\hat{\omega}=R\omega$および実数波数nの関数

$$C_1\equiv R\Omega_\alpha\{\alpha(R;\hat{\omega},n),\frac{n}{R},R)\} \qquad (2)$$

で与えられものとすれば、複素特性方程式は

$$\frac{dR}{dT}=C_1(R;\hat{\omega},n) \qquad (3)$$

で定義され、特性曲線に沿って$\hat{\omega}$とnは不変である。撹乱が実現するために、$R=R_0$から$R_1$までの定積分

$$T\equiv T_r+iT_i=\int_{R_0}^{R_1}\frac{dR}{C_1(R;\hat{\omega},n)} \qquad (4)$$

が実数値を取るように複素定数$\hat{\omega}\equiv\hat{\omega}_r+i\hat{\omega}_i$と整数nが選ばれる。

## 3．特異点近傍での解の振る舞い

はじめに、複素群速度$C_1$の零点$R=R_s$近傍での振舞いを見ておく。図1は、$\hat{\omega}_i=0$ に選び、波数nのいくつかの値に対して$Im[C_1]=0$ を満たす$\hat{\omega}_r$およびそのときの$Re[C_1]$をRに対してプロットしたものである。群速度の実部が$(R_s-R)^{1/2}$に比例して0に近づくことが判る。すなわち$a_0\neq0$を複素定数として

$$C_1=a_0(R_s-R)^{1/2}+O(R_s-R) \qquad (5)$$

のように書けることになり、このとき(4)の積分は有限に留まる。もし$a_0=0$であれば、積分が対数的に発散して絶対不安定を生じるが、回転円盤流はこのに当たらない。

上と同様な計算を$\hat{\omega}_i$の異なる値について行い、$Re[C_1]$曲線を外挿することによって特異点の位置を決定すると、特異点レイノルズ数$R_s$のnと$\hat{\omega}_i$に対する変化を知ることができる。その結果をまとめたも

のが図2であり、特に$\hat{\omega}_i=0$ の曲線はLingwood[1]の図8に対応する。使用された撹乱方程式の違いによって数値的には一致しないが、同じ特異点について議論していることは間違いない。

それでは特異点$R=R_s$の存在は撹乱の伝播にどのように影響するかという当然の疑問が生じる。そこで、$R_0=250$で導入された軸対称波束撹乱の複素特性曲線が特異点の近傍でどのような振舞いをするかを調べる。 方程式(3)を$R_0$から$R$まで積分すると複素関数$T(R;\hat{\omega},n)$が定義され、撹乱成分$(\hat{\omega},n)$が$R$の位置で実空間に現われるためにはその虚部$T_i$が0になることが要求される。いま、nと$\hat{\omega}_i$を固定し、いくつかの$\hat{\omega}_r$について$T_i$の$R$に対する変化をプロットする。各$\hat{\omega}_r$に対して$T_i=0$を満たす$R$が定まるときには、さらにこれを$(R,\hat{\omega}_r)$面にプロットすると、図3のような結果を得る。これは$n=50$、$\hat{\omega}_i=0$の場合で、点Sは特異点、破線は$\mathrm{Im}[C_1]=0$を満たす点を表わす。特異点から下流にはリーマン面の分岐線が伸びており、上流からSの上方を回り込むときと、下方を回り込むときで異なる面に入り込む。 $T_i$の曲線が、$-\hat{\omega}_r>13.0$に対しては横座標と交わるのに対して、$-\hat{\omega}_r<13.0$ の場合には単調に増大して0にならないのはこのリーマン面の存在による。すなわち、特異点の出現は、それより下流側にリーマン面を伴うため、その近傍を通過する撹乱成分の実現条件$T_i=0$達成を阻害するのである。図2に示されているように、特異点は波数nの比較的大きい領域で発生するから、レイノルズ数が高くなるにつれて、高波数の撹乱が実現されなくなり、観測される撹乱は小さな波数成分に支配されるようになる。

## 4．むすび

三次元境界層の絶対不安定は境界層の成長する方向の複素群速度$C_1$が0になる点の存在を必要とするが、群速度の零点が必ずしも絶対不安定を発生させることにはならない。群速度$C_1$の零点$R_s$の近傍での振舞いは$C_1\sim(R_s-R)^{1/2}$の場合と$C_1\sim R_s-R$ の場合がある。後者は極めて特殊な状況においてのみ成立し、その場合にだけ絶対不安定が発生する。今回調べた回転円盤流では、群速度の零点が前者に属するために絶対不安定は発生しない。

## 参 考 文 献

1) Lingwood, R. J. (1995) J. Fluid Mech. **299**, 17-33.
2) Itoh, N. (1996) Fluid Dyn. Res. **18**, 337-354.
3) Itoh, N. (1997) Fluid Dyn. Res. **21**, 87-100.

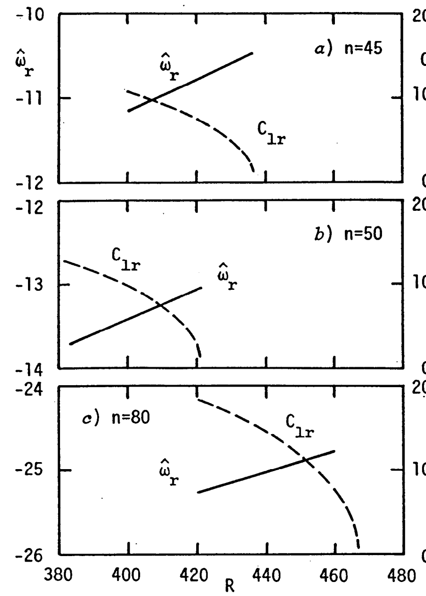


図1．複素群速度の特異点近傍での振舞い

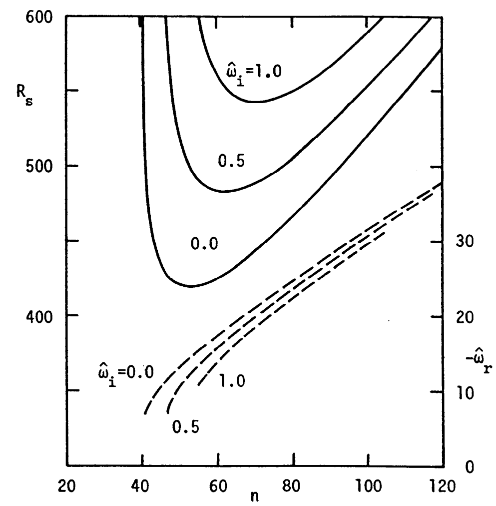


図2．特異点Re数の周方向波数に対する変化

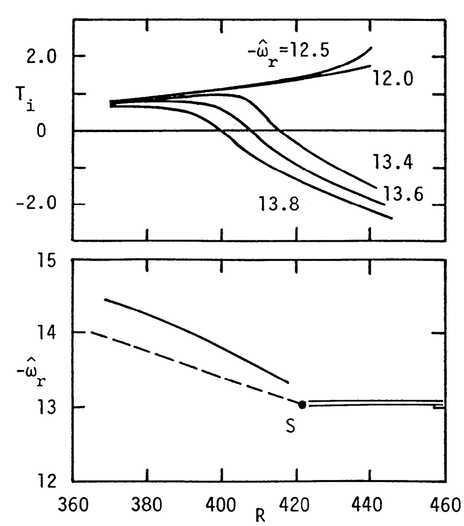


図3．複素特性曲線の積分値と実現条件