

圧縮性縦渦の不安定性

比江島俊彦（阪府大院），西岡通男（阪府大工）

Instability of compressible streamwise vortex

T.Hiejima*, M.Nishioka*

*Dept. of Aerospace Eng., University of Osaka Prefecture

ABSTRACT

Being free from the compressibility effect, streamwise vortices are expected to enhance mixing in supersonic flow, but being rather stable. Therefore, for the propose of greatly increasing mixing capability we propose to use unstable streamwise vortices, which are axisymmetric and annular in vorticity distribution. The instability characteristics of proposed vortex is investigated on the basis of inviscid compressible stability analysis for various combinations of circumferential wave numbers, Mach numbers and vorticity distribution, assuming temporal growth. It is found that the maximum growth mode of streamwise vortex has the same character as that of inflectional instability in incompressible mixing layer.

Key Words: Compressible vortex, Instability of vortex, Streamwise vortex, Linear stability, Scramjet

1. はじめに

超音速混合層における乱流運動は圧縮性の効果によって大きく抑制される。これは超音速混合に依存するスクラムジェットエンジンの開発にとって大きな障害であり、開発上の重要な課題となっている。こうした中で、圧縮性の影響が緩和され、混合促進に有効な渦構造として、流れ方向に渦軸を持つ縦渦が提案された¹⁻³⁾。ただし、縦渦は安定で、混合をより促進するには小さな渦に崩壊させることが望ましい。この観点から提案された構造的に不安定な縦渦に関する数値シミュレーションでは、渦列にすると著しく不安定化することが示された⁴⁾。そこでこの縦渦の非圧縮線形安定解析が行われ、攪乱の増幅が極めて大きいこと、渦度分布の形によっては、さらに不安定になることが示された。さらにその非線形発達が数値シミュレーションで調べられ、たしかに混合に有利な流れ場が形成されることがわかった⁵⁾。しかし、縦渦単体の安定性に及ぼす圧縮性の影響や攪乱構造についてはまだよくわかっていない。

ここでは上で述べた構造的に不安定な縦渦の線形不安定段階での圧縮性の影響を調べるために軸流速度は一定とし、また非粘性を仮定し、圧縮性を考慮した線形安定性の解析を行った。

2. 線形安定性理論

円柱座標 (r, θ, x) の Euler 方程式を基礎方程式とし、 ρ は密度、 u_r, u_θ, u_x はそれぞれ動径方向、周方向、軸方向速度、 p は圧力、 S はエントロピーとする。物理量を基本流と微小攪乱の和で表すと、

$$\begin{Bmatrix} \rho(r) \\ u_r(r) \\ u_\theta(r) \\ u_x(r) \\ p(r) \\ S(r) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\rho}(r) \\ \bar{U}(r) \\ \bar{V}(r) \\ \bar{W}(r) \\ \bar{P}(r) \\ \bar{S}(r) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \tilde{R}(r) \\ \tilde{U}(r) \\ \tilde{V}(r) \\ \tilde{W}(r) \\ \tilde{P}(r) \\ \tilde{S}(r) \end{Bmatrix} \quad (1)$$

$$\{\tilde{R}, \tilde{U}, \tilde{V}, \tilde{W}, \tilde{P}, \tilde{S}\}$$

$$= \{R, U, V, W, P, S\} \exp[i(\alpha x + m\theta - \sigma t)]$$

ここで、 $\bar{\quad}$ は基本流成分、 $\tilde{\quad}$ は攪乱成分を表す。また、渦度攪乱は $\Omega(r)$ で表す。さらに、 m は周方向の波数で整数であり、 α は軸方向の波数で実数である。 $\sigma = \sigma_r + i\sigma_i$ は複素数であり、 σ_r は角周波数、 σ_i は時間増幅率を表す。各物理量の無次元化は周方向速度が最大となる位置 r^* で行い、そこでの局所マッハ数を代表マッハ数 M として定義する。式 (1) を基礎方程式に代入して線形化すると、攪乱の

れる。

$$\frac{dP}{dr} = A(r)P + B(r)U, \quad \frac{dU}{dr} = C(r)P + D(r)U \quad (2)$$

攪乱方程式の境界条件は式(2)の漸近解を使用する。それらを以下に示す。

原点近傍 ($r \approx 0$) で

$$P \approx P_0 r^m, \quad U \approx U_0 r^{m-1} \quad (3)$$

無限遠方 ($r \rightarrow \infty$) において

$$P \approx p_0 r^{-\frac{1}{2}} \exp(-\beta r) \left[1 + \frac{p_1}{r} + \dots \right] \quad (4)$$

$$U \approx u_0 r^{-\frac{1}{2}} \exp(-\beta r) \left[1 + \frac{u_1}{r} + \dots \right]$$

これらの攪乱方程式(2)と境界条件(3),(4)は固有値問題を構成する。ここで固有値を求める場合は、 $\Phi(r) = P/U$ の変数変換を行い、 $r = r_1$ と $r = r_2$ から r^\dagger (渦度分布が最大の位置)まで数値積分して $\Phi_1(r^\dagger)$ と $\Phi_2(r^\dagger)$ を求め、ある推定値 $\sigma (= \sigma_r + i\sigma_i)$ に対して

$$F(\sigma_r, \sigma_i) = \Phi_1(r^\dagger) - \Phi_2(r^\dagger)$$

が $|F| \ll 10^{-10}$ を満たすまで反復計算を行い固有値 σ を決定する。ここでは積分刻みを $\Delta r = 10^{-4}$ とし、原点近傍($r_1 = 0.01$)と無限遠方($r_2 = 20$)に対応する r の値は、その付近にとれば固有値が変わらないことを確認した。なお、等エントロピー的かつ軸流速度一定のときは式(2)で共役をとり $-m, -\sigma_r$ としても同じ σ_i が得られるので m は零および正の整数だけ、 α は正の実数だけを考える。

非圧縮のときの縦渦の安定性については、いくつかの判定条件⁶⁾を導くことができる。

- (I) $m = 1, \alpha = 0$ の場合、中立解($\sigma_i = 0$)を持つ。
- (II) $m \neq 0, \alpha = 0$ の場合、不安定($\sigma_i \neq 0$)のための必要条件は $\bar{\omega}' = 0$ を満たす極値が存在することである。
- (III) $m = 0, \alpha \neq 0$ の場合、不安定($\sigma_i \neq 0$)のための必要十分条件は $\sigma_r = 0$ かつ $\bar{V} \cdot \bar{\omega} < 0$ を満たす領域が存在することである。遠心力不安定はこれに含まれる。

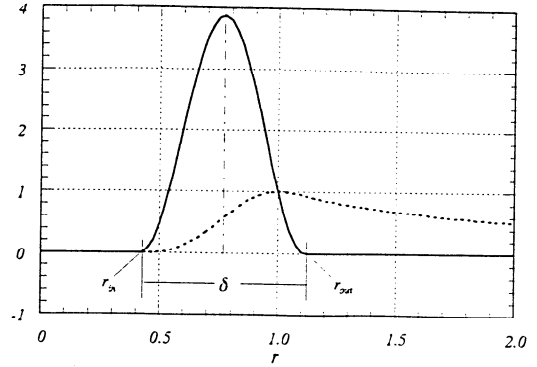


図1 渦度と周方向速度分布 ($\bar{\omega}(r)$: —, $\bar{V}(r)$: ---)

3. 縦渦分布

本研究で扱う構造的に不安定な縦渦分布を図1に示す。この渦度場は r のみの軸対称分布で中心軸からある一定の領域にだけ渦度を持つ中空縦渦である。

$$\bar{\omega}(r) = \begin{cases} 0 & (r < r_{in}) \\ \omega_0 (1 - \cos \Theta) & (r_{in} \leq r \leq r_{out}) \\ 0 & (r > r_{out}) \end{cases} \quad (5)$$

$$\Theta = 2\pi \frac{r - r_{in}}{r_{out} - r_{in}}, \quad \delta = r_{out} - r_{in}$$

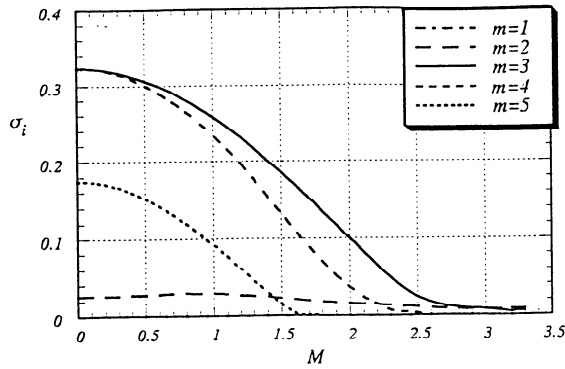
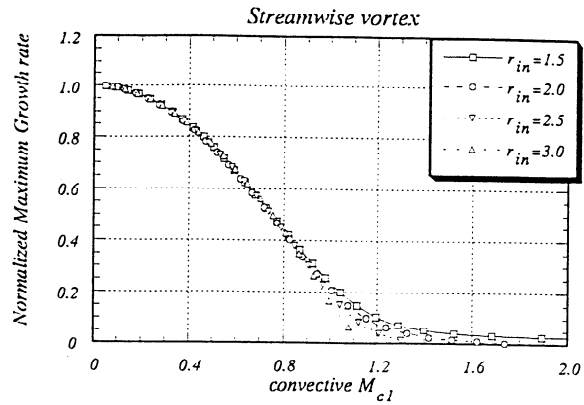
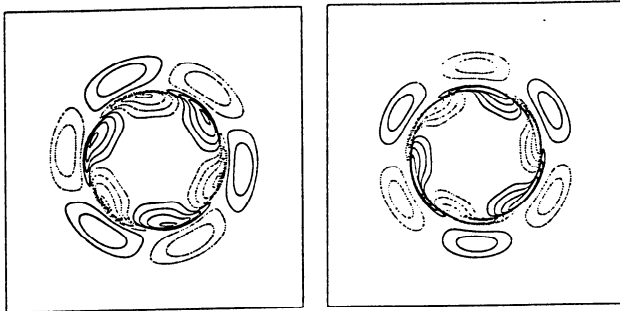
上の循環は $\Gamma = \pi \omega_0 (r_{out}^2 - r_{in}^2)$ である。文献⁴⁾と同様、この縦渦のスケールや循環値は実験と対応させた値 $r_{in}^* = 1.5 \times 10^{-3} \text{ m}$ (0.419), $r_{out}^* = 4.0 \times 10^{-3} \text{ m}$ (1.118), $\Gamma^* = 2.24 \text{ m}^2/\text{s}$ (6.527) を基本としている。ただし、カッコは無次元値を表す。ここでは渦度分布を r_{in} で変化させる。密度、圧力分布は実験に対応した計算²⁾のエントロピー変化が微小であることを考慮し、等エントロピーを仮定する。

4. 線形安定解析の結果

3節で述べた中空縦渦の不安定性を調べるために、線形安定解析により攪乱の角周波数と時間増幅率を求めた。なお、波数 α を含む場合は省略する。

$r_{in}^* = 1.5 \text{ mm}$ の場合

まず、波数 m を固定してマッハ数 M と固有値 σ の関係を調べた。図2に示すように、 $m = 1$ の場合、圧縮性を考慮してもマッハ数に依らず $\sigma_i \approx 0$ の中立安定となっていることがわかる。 $m = 3, 4, 5$ はマッハ数の増加とともに増幅率(σ_i)が小さくなってゆき、非圧縮時に最も大きな増幅率を持つ。また渦度攪乱の等値線図(図3)はちょうど剪断層を丸くつないだように正と負が波数の数だけ現れているが、 $M = 0.4$ で並ぶ渦構造は $M = 1.5$ では小さく薄く

図2 増幅率 σ_i とマッハ数 M 図4 正規化増幅率と移流マッハ数 M_{c1} 図3 渦度攪乱 Ω の等値線図 (右) $M = 0.4$ $m = 3$, (左) $M = 1.5$ $m = 3$ (正:— 負:---)

渦度分布を変化させた場合

渦度分布をガウス型分布から環状域で極値を持つ分布まで変化させることを考える。式(5)の循環と r_{out}^* を3節の値に固定して r_{in}^* だけ $-4.0 \sim 3.0$ mm まで 0.5 mm ずつ変化させた。(分布は $r \geq 0$ で意味を持つが、ガウス分布をつくるため便宜上 r_{in}^* を負にする。) さて、図5(a) ~ (d) に示すように r_{in}^* を r_{out}^* に近づけていくと増幅率 σ_i は桁違いに大きくなり、中空型分布(d)の流れの不安定性が極めて強いことがわかる。ガウス型分布の場合には中立的であり、Rankine渦⁷⁾に近い分布の場合には圧縮性によって不安定が強くなるマッハ数 M の範囲がある。中空型分布の場合には混合層の場合と同様、マッハ数とともに増幅率が減少する傾向が顕著である。また(b), (c), (d)は渦度分布に極値を持つが、(b)の場合は $M = 0$ でも不安定とならず、2節の判定条件(II)が十分条件でないことも確認された。

次に、図5(d)について考察する。周方向速度零の内側の領域を添え字1、その外側の領域を添え字2で表し、速度の大きさ U 、音速 c そして位相速度 c_{ph} を用いて、移流マッハ数をそれぞれ次のように定義する。

$$c_1 = U_1$$

$$U_2 = c_2$$

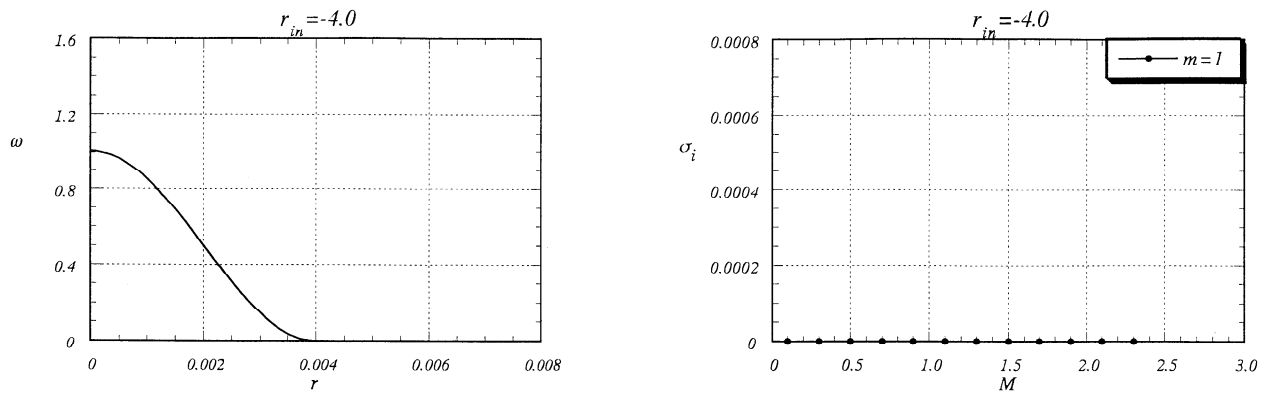
1.5, 2.0, 2.5, 3.0 mm の場合の最大増幅率を非圧縮の最大増幅率で正規化した値をとったものである。ここで位相速度を $c_{ph} = (\sigma_r/m)r^\dagger$ (r^\dagger は渦度の極値) とすると、図のように正規化増幅率と移流マッハ数 M_{c1} の関係は渦度分布の形に依存しない。これらの結果から、あまり薄い渦は現実的でないが、渦度分布が極値を持つ構造の方が混合促進には有利であると言える。

5. まとめ

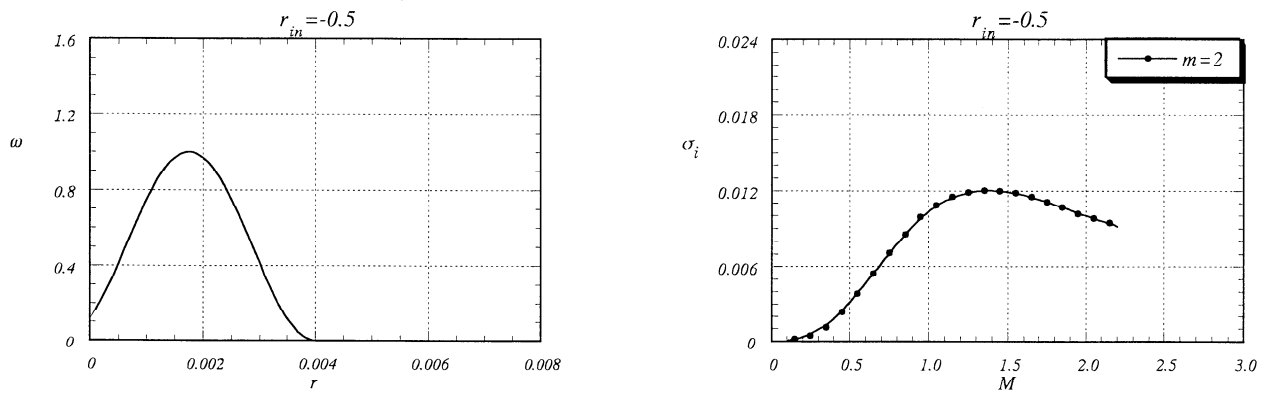
超音速混合促進を目的とした研究から提案された中空縦渦の不安定性を線形安定解析で調べた。その結果、(1) 実験に対応させた $r_{in}^* = 1.5$ mm の場合、圧縮性を考慮しても $m = 1$ は中立安定、全マッハ数を通じて周方向波数は $m = 3$ が最も不安定である。圧縮性の影響は周方向マッハ数の増加とともに顕著になるが、 $M = 0.4$ までは小さいことがわかった。(2) 渦度分布を変化させた場合、 $r_{in}^* \geq 1.5$ mm で最大増幅モードは非圧縮混合層と同じ性質を持ち、圧縮性の影響を移流マッハ数で整理できることがわかった。

参考文献

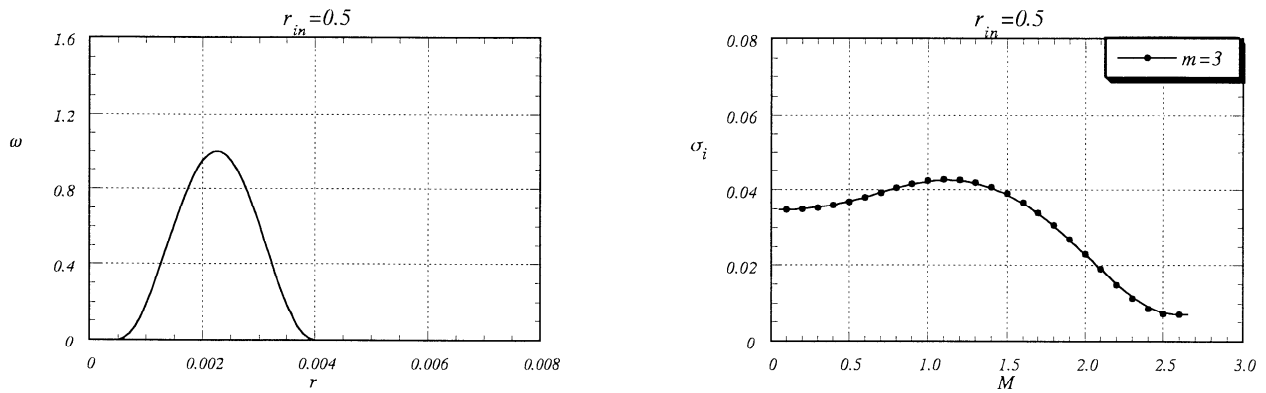
- 1) 西岡, 須浪: ながれ, 14 (1995) 377-389.
- 2) 西岡, 須浪, 上山: ながれ, 15 (1996) 35-44.
- 3) T.Sunami, M.N.Wendt & M.Nishioka: AIAA paper 98-3271 (1998)
- 4) 辻本, 西岡: ながれ, 14 別冊 (1995) 85-88.
- 5) 西岡, 松岡, 辻本, 比江島: 日本機械学会論文集, 63-605, B (1997) 119-125
- 6) L.N.Howard & A.S.Gupta: J.Fluid Mech. 14 (1962) 463-476.



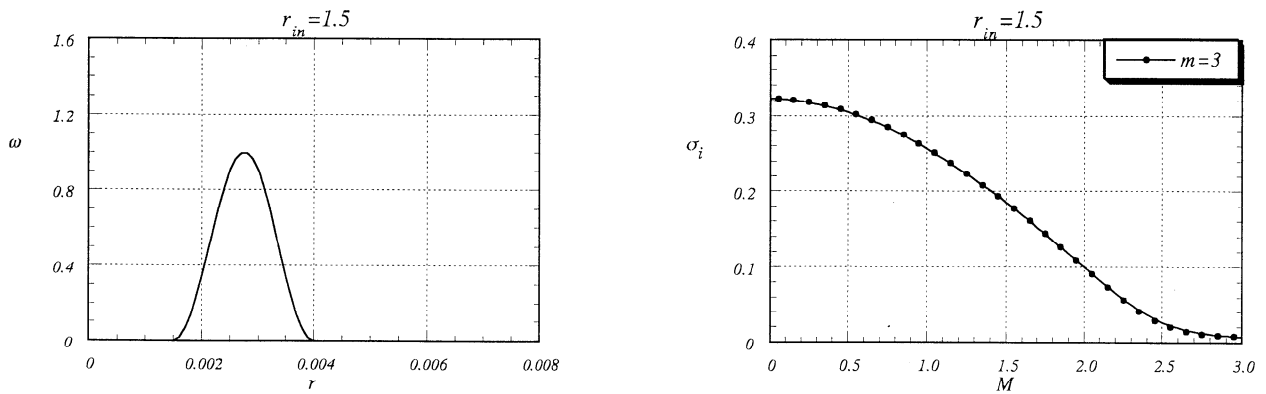
(a) $r_{in} = -4.0\text{mm}$



(b) $r_{in} = -0.5\text{mm}$



(c) $r_{in} = 0.5\text{mm}$



(d) $r_{in} = 1.5\text{mm}$

図 5 代表的な渦度分布をもつ縦渦の増幅率とマッハ数の関係