

# 非圧縮性流に対する $v - q$ 法と $\psi - q$ 法

買 為\*, 中村佳朗\*

The  $v - q$  Method and the  $\psi - q$  Method for Incompressible Flows  
by

Wei JIA and Yoshiaki NAKAMURA

Dept. of Aeronautical Engineering, Nagoya University

## ABSTRACT

This paper proposes a new formulation for the incompressible N-S equations by introducing a new variable  $q$ , the rotation of which represents the convective and pressure gradient terms of the momentum equations. The derived governing equations consist of the linear dynamic equations and the Poisson equation for the new variable  $q$  with the non-linear source. These equations automatically satisfy the divergence free condition. The Boundary Condition for the new variable  $q$  is the Dirichlet type, the Poisson equation can be quickly solved by the conventional point relaxation method. Furthermore, a new method to economically obtain the corresponding pressure field is also proposed. Applications to a driven cavity flow and the flow around a circular cylinder show excellent performances of the new method.

### 1. まえがき

非圧縮性流の計算法を従属変数で分類する [1] と、基礎変数法 [2]、流れ関数・渦度法 [3]、速度・渦度法 [4], [5] などがあるが、計算精度、計算効率と境界条件の取扱の観点からまだ不十分なところが多い。具体的に、基礎変数法では連続の条件を精度よく満たすことは困難であり、また、各時間ステップでノイマン条件の圧力ポアソン方程式を解く必要があり、収束性が非常に悪い。流れ関数・渦度法では、物体表面の流れ関数の値を決定するのに複雑な手続き [6], [7] が必要であり、また 3 次元への拡張は直接ではない。標準的な速度・渦度法 [4], [5] では、速度の各成分に対するポアソン方程式を解くため、連続の条件を満足する機構がない。

本論文は新変数  $q$  を導入した非圧縮性ナビエ・ストークス方程式の新しい定式化を提案する。運動方程式の慣性項と圧力勾配項は  $q$  の回転により表され、新しい支配方程式は線形の運動方程式と非線形なソースを持つ  $q$  のポアソン方程式で構成される。この方法は 1) 連続の条件を自動的に満たす。2)  $q$  の境界条件はディリクレ条件である。従って、そのポアソン方程式は通常よく使われる SOR 法により精度よく解かれる。3) 運動方程式は線形であるため、計算量が少ない。など多くの好ましい性質を持っている。

本方法は定常流と非定常流の両方に適用できる。新変数  $q$  は渦度と流れ関数の時間変化の線形組合せである。定常流の場合、 $q$  は最終的に渦度と比例するようになり、本方法は連続の条件を保証した新しい速度・渦

度法と見なすことは可能である。一方、非定常流の場合、 $q$  は渦度とは本質的に違ったものとなり、本方法は現存のすべての方法と異なる。

本方法は流れ場を計算する段階で圧力を必要としないが、本論文では流れ場に対応する非定常圧力場を精度よく、かつ経済的に計算する方法も示す。

第 2 節は新しい定式化を、第 3 節は数値的な取扱いを議論する。簡単のために、2 次元に限定するが、本方法は容易に 3 次元に拡張される。第 4 節は新しい圧力の計算法を説明する。第 5 節で 2 次元正方形空洞中の流れ (定常流) と 2 次元円柱周りの流れ (非定常流) の計算結果を示し、第 6 節で結言を述べる。

### 2. 新しい定式化

2 次元非圧縮性流の支配方程式はベクトル表示で以下のように表される。

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \nabla p = \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{v} \quad (2)$$

ここで、 $\mathbf{v}$  は速度ベクトル、 $p$  は圧力、 $Re$  はレイノルズ数である。

式 (2) の発散を取り、式 (1) を代入すると

$$\nabla \cdot (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \nabla p) = 0 \quad (3)$$

になる。そこで、式 (3) を恒等的に満たすように、新変数  $q$  を導入する。

$$\nabla q \times \mathbf{k} = \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \nabla p \quad (4)$$

\*名古屋大学工学部航空学科

ここで、 $\mathbf{k}$ はデカルト座標の2次元平面( $x, y$ )に垂直な $z$ 方向の単位ベクトルである。式(2)は、慣性項と圧力勾配項に式(4)を代入すると

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla q \times \mathbf{k} = \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{v} \quad (5)$$

になる。一方、式(4)の回転をとると、 $q$ のポアソン方程式が誘導される。

$$\nabla^2 q = -\mathbf{v} \cdot \nabla \omega = -\nabla \cdot (\mathbf{v} \omega) \quad (6)$$

ただし、 $\omega = -\partial u / \partial y + \partial v / \partial x$ は渦度を表す。

式(1)と(2)の代わりに、式(5)と(6)を支配方程式に用いることが期待される。一方、式(5)の発散を取ると速度の発散( $\nabla \cdot \mathbf{v}$ )に対する拡散方程式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{v}) = \frac{1}{Re} \nabla^2 (\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (7)$$

つまり、式(5)は一般的に連続の条件ではなく、式(7)を満たす仕組みになっている。そこで、連続の条件を保証するために、さらに拘束条件を課す必要がある。連続の条件を満たす必要十分条件[1]は

$$\nabla \cdot \mathbf{v}|_{\Gamma} = 0 \quad \text{or} \quad \frac{\partial}{\partial n} \nabla \cdot \mathbf{v}|_{\Gamma} = 0 \quad (8)$$

である。ここで $\Gamma$ は境界を表す。以上より、境界で連続の条件を満たせば、流れ場中でそれが自動的に満たされる。しかし、これは実に至難の技である。

一方、式(5)はその粘性項を回転形で書き、式(1)の条件を課すと

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \left( q + \frac{1}{Re} \omega \right) \times \mathbf{k} = 0 \quad (9)$$

になる。式(9)の発散を取ると

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0 \quad (10)$$

が得られる。つまり、式(9)を用いる場合、初期で連続の条件が満たされれば、時間的に常に満たされる。

結局、式(9)と(6)は式(1)と(2)と等価であり、それらを支配方程式として用いられる。

$q$ の境界条件は運動方程式から導かれる。式(9)から、静止壁で $q$ は以下のディリクレ条件が与えられる。

$$q = -\frac{1}{Re} \omega + c(t) \quad (11)$$

なお、積分常数  $c(t)$  は  $q$  の中に吸収することができる。つまり、実際の計算では、 $c(t) = 0$  と置ける。

式(6)と(9)を支配方程式に用いる方法を  $\mathbf{v}-q$  法と名付ける。以下で新変数  $q$  は渦度 ( $\omega$ ) と流れ関数の時間変化 ( $\partial \psi / \partial t$ ) の線形組合せであることを示す。

流れ関数  $\psi$  は以下のように定義される。

$$\mathbf{v} = \nabla \psi \times \mathbf{k} \quad (12)$$

式(9)は、式(12)を代入し、空間について積分すると

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + q + \frac{1}{Re} \omega = \frac{\partial \psi_{\Gamma}}{\partial t} + c(t) \quad (13)$$

になる。ここで、 $\Gamma$ は境界を表す。積分常数  $c(t)$  はまた  $q$  の中に吸収することができる。これにより、新変数  $q$  は渦度  $\omega$  と流れ関数の時間変化  $\partial \psi / \partial t$  の線形組合せであることが証明された。

$\mathbf{v}-q$  法に加え、式(6)と(13)を支配方程式に用いる方法を  $\psi-q$  法と名付ける。

流れ関数・渦度法では、圧力の一価性を保証するのに、渦度に拘束条件[6],[7]が与えられる。この条件は新しい公式に対しても成り立つ。

式(4)に境界の単位接線ベクトル  $\boldsymbol{\tau}$  を掛け、境界に沿って一周積分すると

$$\oint (\nabla q \times \mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\tau} ds \equiv \oint \frac{\partial q}{\partial n} ds = 0 \quad (14)$$

になる。

一方、同じ操作を式(9)に施すと

$$\oint \frac{\partial}{\partial n} \left( q + \frac{1}{Re} \omega \right) ds = 0 \quad (15)$$

が得られ、最終的に

$$\oint \frac{\partial \omega}{\partial n} ds = 0 \quad (16)$$

になる。

しかし、 $\mathbf{v}-q$  法を使用し、圧力を圧力ポアソン方程式(第4節を参照する)から計算する限り、上述の拘束条件の影響は省略できる。一方、 $\psi-q$  法の場合、式(16)は  $\psi$  の境界値を決定するのに用いられる。

本論文は新しい支配方程式をデカルト座標  $x_i = (x, y)$  から一般座標  $\xi_i = (\xi, \eta)$  に変換して取り扱っている。式(9)と(6)を一般座標に変換すると以下ようになる。

$$\frac{\partial}{\partial t} (J^{-1} u_k) + \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left[ J^{-1} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} \left( q + \frac{1}{Re} \omega \right) \right] \times \mathbf{k} = 0 \quad (17)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i} \left( J^{-1} g_{ij} \frac{\partial q}{\partial \xi_j} \right) = -\frac{\partial}{\partial \xi_i} (J^{-1} U_i \omega) \quad (18)$$

$$U_i = u_j \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}, \quad g_{ij} = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_k}, \quad J = \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} \quad (19)$$

ここで、 $u_k$  は物理速度のデカルト成分で、 $U_i = (U, V)$  は一般座標の反変速度成分である。 $J$  は変換のヤコビアンで、 $g_{ij}$  は変換のメトリックである。

### 3. 数値的な取扱

新しい支配方程式に対し、従来、基礎変数法と流れ関数・渦度法に適用してきた計算法はそのまま使える。本論文では、空間近似に一般座標で通常格子を使用する有限体積法を適用し、時間積分は最も単純なオイラーの陽解法を用いている。

#### 3.1 空間近似

保存形支配方程式を一般座標の検査体積で積分し、Gaussの発散定理により各流束項の体積分を検査体積表面の面積分に書き直した後、 $q$ のポアソン方程式のソース項を除くすべての流束項の検査体積表面の表面

積分に中心差分近似に等価な2次精度の近似が適用される。一方、後者は渦度輸送拡散方程式の輸送項に対応するので、比較的の高いレイノルズ数での計算安定性を保証するために、3次精度を有するGQ法[8],[9]で近似される。例えば、ソース項の一つは以下のように計算される。

$$\int_{-\Delta\eta/2}^{\Delta\eta/2} (J^{-1}U\omega)_{i+1/2} d\eta = (J^{-1}U)_{i+1/2} \left\{ \frac{(\omega_{i+1} + \omega_i)}{2} - \frac{\Delta\xi^2}{8} CV\omega_{i+1/2}^{\xi} + \frac{\Delta\eta^2}{24} CV\omega_{i+1/2}^{\eta} \right\} \Delta\eta \quad (20)$$

$$CV\omega_{i+1/2}^{\xi} = \begin{cases} (\omega_{i+1} - 2\omega_i + \omega_{i-1})/\Delta\xi^2 & ; (J^{-1}U)_{i+1/2} \geq 0 \\ (\omega_{i+2} - 2\omega_{i+1} + \omega_i)/\Delta\xi^2 & ; (J^{-1}U)_{i+1/2} < 0 \end{cases}$$

$$CV\omega_{i+1/2}^{\eta} = \begin{cases} (\omega_{i,j+1} - 2\omega_{i,j} + \omega_{i,j-1})/\Delta\eta^2 & ; (J^{-1}U)_{i+1/2} \geq 0 \\ (\omega_{i+1,j+1} - 2\omega_{i+1,j} + \omega_{i+1,j-1})/\Delta\eta^2 & ; (J^{-1}U)_{i+1/2} < 0 \end{cases}$$

CV項は高次精度の上流補間による曲率項である。

### 3.2 時間積分法

ベクトル表示を用い、オイラーの陽解法は以下のように書ける。

$$\omega^n = (\nabla \times \mathbf{v}^n) \cdot \mathbf{k} \quad (21)$$

$$\nabla^2 q^n = -\nabla \cdot (\mathbf{v}\omega)^n \quad (22)$$

$$\frac{\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^n}{\Delta t} = -\nabla \left( q + \frac{1}{Re} \omega \right)^n \times \mathbf{k} \quad (23)$$

ここで、 $n$ は時間レベルを表す。

### 3.3 ディリクレ・ポアソン・ソルバー

$q$ のポアソン方程式はディリクレ条件で与えられるので、チェッカー・ボードSOR法により効率よく解くことができる。

## 4. 圧力の計算法

$\mathbf{v}-q$ 法では、流れ場を解く時に圧力を必要としないが、圧力と空力係数はほとんどの応用計算において、目的とする物理量である。与えられた速度場から、圧力はノイマン条件を持つ圧力ポアソン方程式[10]を解くことにより得られる。

$$\nabla^2 p = D \quad (\equiv -\nabla \cdot (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v})) \quad \text{in } R \quad (24)$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = S \quad (\equiv \frac{1}{Re} \frac{\partial \omega}{\partial \tau}) \quad \text{on } \Gamma$$

ここで、 $R$ は計算領域、 $\Gamma$ はその境界、 $\tau$ と $n$ はそれぞれ境界の単位接線ベクトルと法線ベクトルを表す。

普通の点反復法(例えば、SOR法)をノイマン条件のポアソン方程式に適用した場合、収束性は非常に悪い。十分収束した解を得るために、われわれが開発した新しい方法[11]を用いる。

まず、ノイマン条件のポアソン方程式(24)をディリクレ条件のポアソン方程式と新しいノイマン条件のラプラス方程式に分解する。

$$\nabla^2 p_1 = D \quad (25)$$

$$p_1 = 0 \quad \text{on } \Gamma$$

$$\nabla^2 p_2 = 0 \quad (26)$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial n} = S - \frac{\partial p_1}{\partial n} \quad \text{on } \Gamma$$

$$p = p_1 + p_2 \quad (27)$$

ラプラス方程式(26)は境界積分形に書き換えられ、その境界値は境界要素法により効率よく求められる。

$$c p_2 + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} p_2 \frac{\partial}{\partial n} \left( \ln \frac{1}{r} \right) d\Gamma - \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\partial p_2}{\partial n} \left( \ln \frac{1}{r} \right) d\Gamma = 0 \quad (28)$$

$$c = \begin{cases} 1 & \text{in } R \\ \frac{1}{2\pi} \alpha & \text{on } \Gamma \end{cases}$$

ここで、 $\alpha$ は境界の内角を表す。

この2つの方程式を3段階に分けて解く。第1段階はチェッカー・ボードSOR法により式(25)の解を求める。第2段階は得られた解から式(26)の境界条件を導出し、境界要素法により境界値を求める。第3段階は計算された境界値から、式(26)の内点値を再びチェッカー・ボードSOR法により計算する。これにより、SOR法と境界要素法のそれぞれの長所が生かされ、従来の方法より21倍以上の速さで、1桁精度の高い解を得ることができる。

また、ほとんどの応用計算の場合、物体表面と計算領域中の数少ない観測点での圧力の長い時間スケールでの変化だけを必要としている。この場合、以下のテクニックを用いることで、圧力と空力係数の計算量を流れ場の計算量の1%以下に抑えることができる。

1. 流れ場を解く時間刻み幅( $\Delta t$ )より十分大きな時間間隔(例えば、 $100\Delta t$ )で式(25)を解き、観測点での値を記憶する。
2. 式(26)のノイマン条件を計算し、記憶する。
3. 境界要素法により物体表面と観測点での圧力を計算する。

## 5. 計算結果

本計算法を  $Re = 100, 1000$  での正方形空洞内の流れと、 $Re = 10^3, 10^4$  での円柱周りの流れに適用した。

第1図に  $41 \times 41$  の等間隔格子で計算した  $Re = 100$  での正方形空洞内の速度ベクトルを示す。ただし、(a) 図で式(5)と(6)を、(b) 図で式(9)と(6)を使用した。式(5)を用いる場合、連続の条件が満足されず、流れの激しい場所で非物理的な速度分布が現れる。一方、式(9)を用いると合理的な結果が得られた。この時、壁付近に見られる小さな振動は解像度不足が原因である。第2(a) 図に壁に寄せた非等間隔格子での計算結果を示し、そこで振動が完全に抑えられ、第2(b) 図の基礎変数法の結果とよく一致している。

第3(a) 図に変数  $q$  の等高線分布を、第3(b) 図に速度の発散の等高線分布を示す。定常流の場合、定常状態で  $q$  が渦度に比例し、その分布も渦度の分布と同じになる。第3(b) 図から、境界とそれより1つ内側の格子線の間の領域を除き、連続の条件が完全に満足される。第4図に  $Re = 1000$  での計算結果を示す。

第5と6図に  $61 \times 51$  の格子で計算した  $Re = 10^3$  での円柱周りの計算結果 ( $t = 5$  と  $65$ ) を示す。初期条件として、円柱周りのポテンシャル流を用いた。 $t = 5$  では対称な、 $t = 65$  では非対称なパターンが得られている。流れ場は非定常の場合、 $q$  が渦度に比例しなくなり、その分布も渦度分布と異なる。

第7図に第4節の方法で計算した圧力分布を示す。時刻はそれぞれ第5と6図に対応する。第8図にチェッカー・ボードSOR法をディリクレ条件のポアソン方程式とノイマン条件のポアソン方程式に適用した場合の収束性の違いを示す。ディリクレ条件の収束性はノイマン条件より50倍以上速い。

第9図に  $Re = 10^3$  と  $10^4$  での空力係数の時間変化を示す。計算は第4節の方法で  $100\Delta t$  の時間間隔で行った。平均抗力係数は実験値とよく一致している。

第10図に  $\psi - q$  法による瞬間流れ線の一例を示す。

## 6. 結言

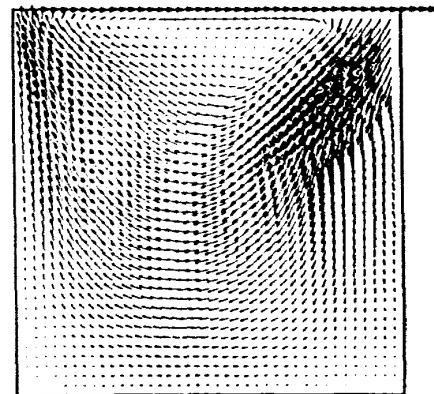
非圧縮性ナビエ・ストークス方程式に対する全く新しい定式化を提案した。新変数  $q$  を導入し、運動方程式の慣性項と圧力勾配項を  $q$  の回転により表している。新しい支配方程式は線形の運動方程式と非線形なソースを持つ  $q$  のポアソン方程式で構成される。新変数  $q$  は流れ関数の時間変化と渦度の線形組合である。

新しい支配方程式では、連続の条件が自動的に満たされる。 $q$  のポアソン方程式は境界条件がディリクレ条件であり、通常のSOR法により精度よく解かれる。また、流れ場に対応する非定常圧力場を精度よく、かつ経済的に計算する方法も示した。

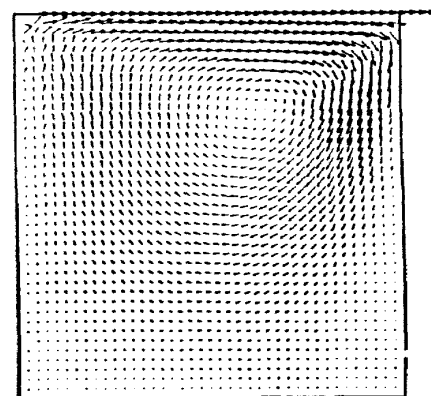
新しい方法を定常と非定常の流れに適用し、優れた計算結果を得ている。また、ここでは議論していないが、自然対流問題と3次元への拡張は容易であり、すでに著者により完成している。特にいくつかの物体が存在する自然対流問題の取扱が簡単で、威力の発揮が期待される。これらの方法は今後、基礎変数法と並び、非圧縮性流に対する1つの有力の計算法になるであろう。

## REFERENCES

1. P.M.Gresho, Annu. Rev. Fluid Mech., 23(1991) 413-453.
2. F.H.Harlow and J.E.Welch, Phys. Fluids, 8(1965) 2182-2189.
3. A.Arakawa, J. Comput Phys., 1(1966) 119-143.
4. B.Farouk and T.Fusegi, Int. J. Numer. Meth. Fluids, 5(1985) 1017-1034.
5. M.Napolitano and A.D.Cesare, in H.A.Dwyer (Ed.), 4th International Symposium on Computational Fluid Dynamics, U.S.A., 1991, Vol.3, pp. 55-60.
6. R.Glowinski and O.Pironneau, SIAM Rev., 21(1979) 167-212.
7. M.O.Bristeau, R.Glowinski and J.Periaux, Comput. Phys. Rep., 6(1987) 73-187.
8. B.P.Leonard, Computer Methods in Applied Mech. and Eng., 19(1979) pp. 59-98.
9. Y.Nakamura and Y.Takemoto, in K.Oshima (Ed.), 1st International Symposium on Computational Fluid Dynamics, Japan, 1986, Vol.1, pp. 285-296.
10. P.M.Gresho and R.L.Sani, Int. J. Numer. Meth. Fluids, 7(1987) 1111-1145.
11. W.Jia, Y.Nakamura and M.Yasuhara, in H.A.Dwyer (Ed.), 4th International Symposium on Computational Fluid Dynamics, U.S.A., 1991, Vol.1, pp. 539-544.

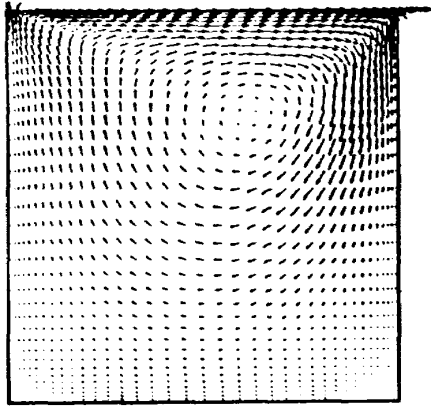


(a)

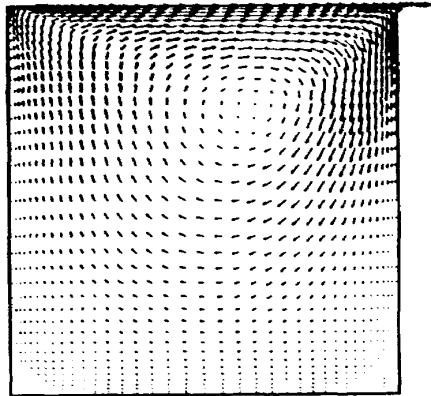


(b)

Fig. 1 正方形空洞内の流れの速度ベクトル ( $Re = 100, 41 \times 41$  の等間隔格子) (a) 式(5)と(6), (b) 式(9)と(6)

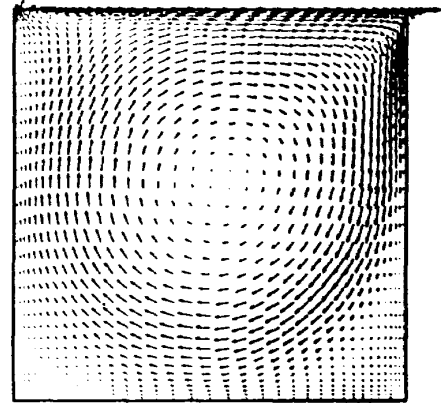


(a)

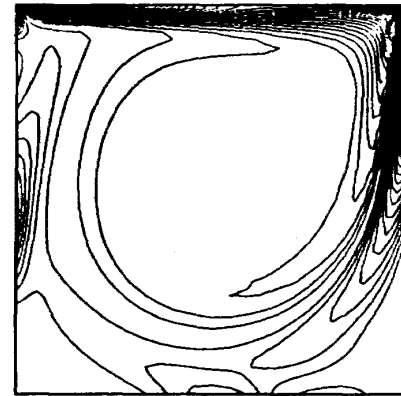


(b)

Fig. 2 正方形空洞内の流れの速度ベクトル ( $Re = 100$ ,  $41 \times 41$  の非等間隔格子) (a) 式 (9) と (6), (b) 基礎関数法

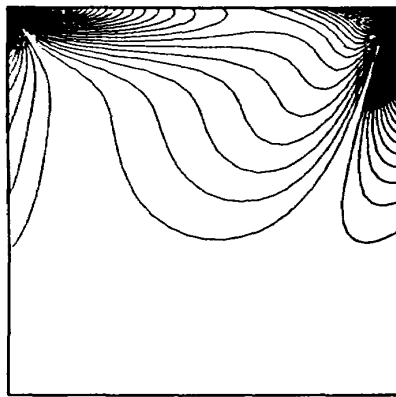


(a)

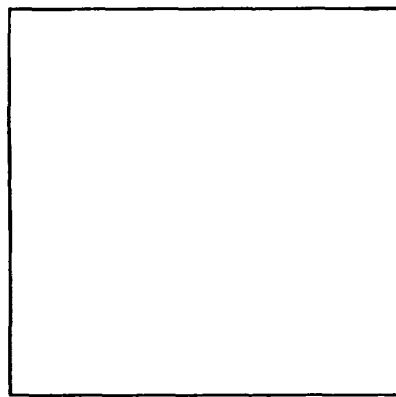


(b)

Fig. 4 正方形空洞内の流れの計算結果 ( $Re = 1000$ ) (a) 速度ベクトル, (b)  $q$  の等高線

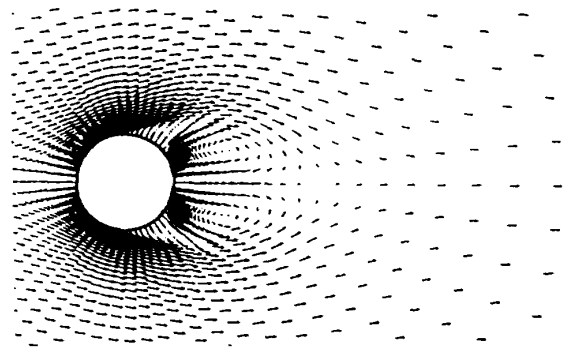


(a)

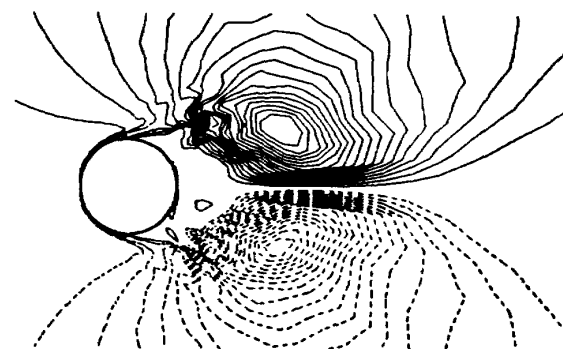


(b)

Fig. 3 正方形空洞内の流れの計算結果 ( $Re = 100$ ) (a)  $q$  の等高線, (b) 速度の発散 ( $\nabla \cdot \mathbf{v}$ ) の等高線



(a)



(b)

Fig. 5 円柱周りの流れの計算結果 ( $Re = 1000$ ,  $t = 5$ ) (a) 速度ベクトル, (b)  $q$  の等高線

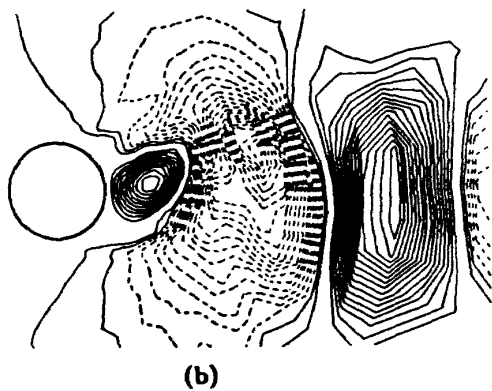
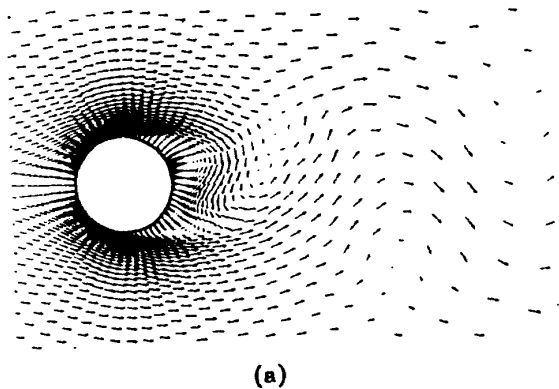


Fig. 6 円柱周りの流れの計算結果 ( $Re = 1000, t = 65$ )  
(a) 速度ベクトル, (b)  $q$ の等高線

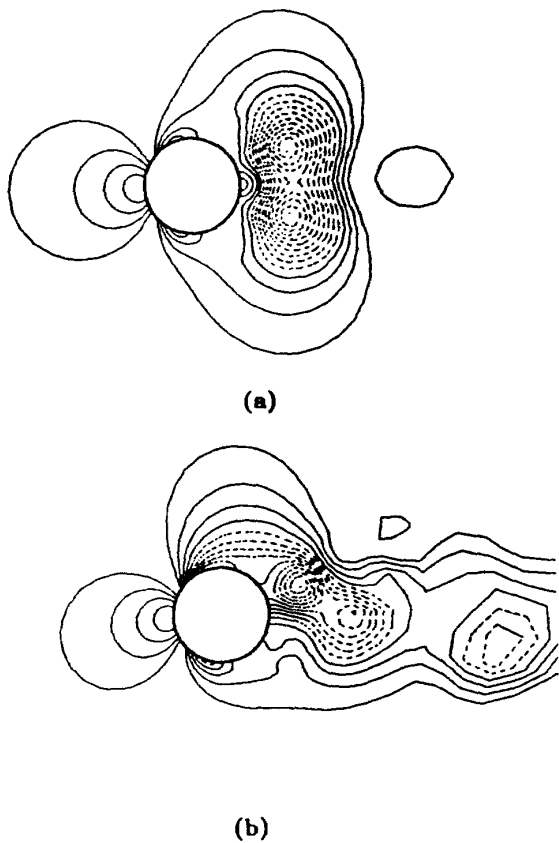


Fig. 7 円柱周りの流れの圧力等高線 ( $Re = 1000$ )  
(a)  $t = 5$ , (b)  $t = 65$

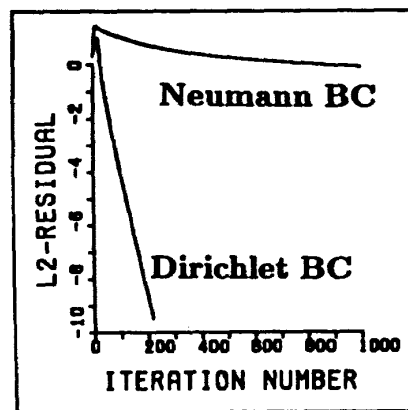


Fig. 8 チェッカー・ボードSOR法の収束特性

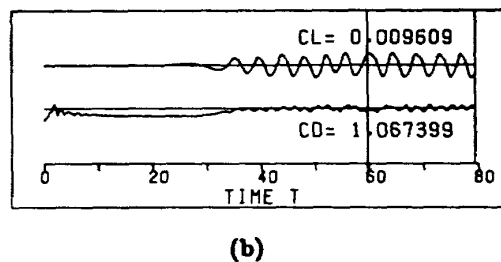
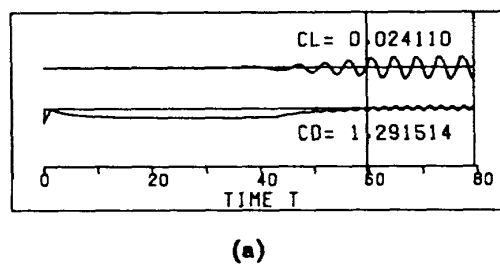


Fig. 9  $\psi-q$ 法による円柱周りの流れの空力係数の時間変化  
(a)  $Re = 1000$ , (b)  $Re = 10000$

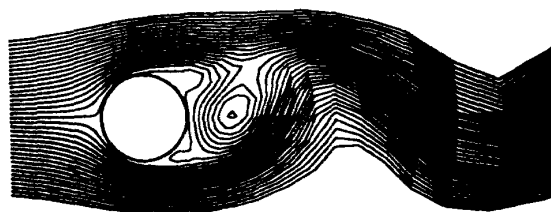


Fig. 10  $\psi-q$ 法による瞬間流線 ( $t = 60$ )