25

せん断流の数値解析について

小川　哲*　高倉　葉子**

On the Numerical Analysis of Shear Flows

by

Satoru OGAWA
National Aerospace Laboratory
and
Yoko TAKAKURA
Fujitsu Ltd.

ABSTRACT

Numerical simulations of 3-D shear flows are carried by solving the pseudo-compressibility equations for incompressible fluid proposed by Chakravarthy. Governing equations are integrated explicitly in time by third order upwind finite volume scheme. An steady 3-D duct flow over a backward-facing step, and 3-D spatially developing incompressible mixing layer are solved, and it is shown the results of numerical simulation using the present methods is reasonable.

1　はじめに

圧縮性流体に対する数値解析法は数学的に深く研究されてきておりRiemann問題の解に基礎をおいた高次精度の風上差分法（ＴＶＤ法等）は不連続のある流れ場に対しても安定した優れた数値解を出すことはよく知られている。しかしながらそうした圧縮性流体のソルバーを使ってダイレクトな乱流シミュレーションが極めて単純な流れ場に対してさえ成功したという話は聞いたことがない。かってチャネルフローを試みに数値解析したことがあるがかなり細かい計算格子においてさえ層流解しか得られなかった。現在ダイレクトシミュレ-ション（ＤＳ）で成功を収めているのはほとんどスペクトル法のみであるといっても過言でない。周期性を持つ単純な流れ場の解析にはスペクトル法はかなり有望な方法であろうと考えるが、任意の境界に対する解析を必要とする実用的な解析において差分法の役割は大きく、差分法によるＤＳの可能性を探ることは重要なことであろう。差分法によるＤＳを指向したものとして非圧縮流れにおいては河村[1]の計算がありいろいろ問題があるにせよ乱流の本質にある程度迫った解析がなされていると考える。乱流の性格が流体が圧縮性であるか非圧縮性であるかに殆ど関係しないことを考えるといずれの場合においても優れた差分法を用いれば乱流のＤＳは可能なはずであると考える。

非圧縮性の流体の差分法において、輸送項も又中心差分で処理するのが最良であると考

*航空宇宙技術研究所
**富士通株式会社

える研究者が多い。風上差分は人工粘性としてひどく嫌う。しかしながら非圧縮性を圧縮性の音速を無限大にした極限であると考えたときすべての特性量が無限の速度で運ばれるわけはなく有限の速度Vで運ばれるものが必ずある。輸送項の差分表現が対称性をもつのが最良であると考えるのはどうであろうか。それよりも我々が重要であると考えるのは流束の保存である。通常の非圧縮性流体の方程式は保存形をしておらず計算格子のセル境界において物理量の保存関係が厳密に成立していることは保証されていない。非圧縮性流体も又保存形方程式により解かれるべきである。

近年Chakravarthy[2]らにより非圧縮性流体に対して提案された擬似圧縮性方程式は圧縮性流体の方程式とほぼ同じ形式(保存形,及び有限の特性速度)をもっておりいろいろな意味で非常に興味深い方程式である。ここでは 擬似圧縮性方程式による数値計算を行い乱流の数値計算の可能性(圧縮性を含めて)を展望してみようと考える。

2 数値解析法

非圧縮性流体の方程式系は音速を無限大として扱うため圧力に対するポアッソン方程式を1タイムステップごとに収束させながら解かなければいけないという困難さを持っているが、擬似圧縮性解法[2,3]は音速を有限として扱う近似を行うかわりに方程式系が圧縮性流体のそれと同じ形になり圧縮性流体にたいする数値解析法がそのまま使え解析の見通しが良くなるという利点がある。擬似圧縮性流体の方程式は非粘性、2次元の場合

$$\partial Q/\partial t+\partial E/\partial x+\partial F/\partial y=0$$

$$Q=\begin{pmatrix}p\\u\\v\end{pmatrix}\quad E=\begin{pmatrix}\beta u\\u^2+p\\vu\end{pmatrix}\quad F=\begin{pmatrix}\beta v\\uv\\v^2\end{pmatrix}$$

と表される。第1式は圧力pがdiv(v)により生起することをsophisticに表現したもので、その生成率βは擬似圧縮性を表すパラメータである。

上記方程式は圧縮性流体の方程式と殆ど同じ形であるため有限体積法の差分スキームを容易に構成することができる。すなわち、

$$\partial Q/\partial t+(E_{i+1/2,j}-E_{i-1/2,j})/\Delta x+(F_{i,j+1/2}-F_{i,j-1/2})/\Delta y=0$$

とセル境界の流束を使って差分化され 数値流束は以下の様に容易に求められる。

$\partial E/\partial x=\partial E/\partial Q\cdot\partial Q/\partial x\equiv A\partial Q/\partial x$
に対し 行列Aは右及び左固有ベクトルR,Lを用いて

$$A=\begin{vmatrix}0&\beta&0\\1&2u&0\\0&v&u\end{vmatrix}=R\cdot\begin{vmatrix}u-c&0&0\\0&u&0\\0&0&u+c\end{vmatrix}\cdot L$$

と対角化される。 $c\equiv\sqrt{u^2+\beta}$は圧縮性流体における音速に対応するものである。

一次精度の数値流束は

$${}^1E_{i+1/2}=(1/2)[E_{i+1}+E_i-R|\lambda|L(Q_{i+1}-Q_i)]$$

ここで$|\lambda|$上記対角行列の各成分の絶対値をとった行列を示す。

高精度の流束は、例えば3次精度は $\kappa=i+1/2$ に対し

$${}^3E_\kappa={}^1E_\kappa-(1/6)dE^-_{\kappa+1}-(1/3)dE^-_\kappa+(1/3)dE^+_\kappa+(1/6)dE^+_{\kappa-1}$$

$$dE^+_\kappa\equiv R_\kappa[\lambda^+]L_\kappa(Q_{\kappa+1/2}-Q_{\kappa-1/2})$$

$$dE^-_\kappa\equiv R_\kappa[\lambda^-]L_\kappa(Q_{\kappa+1/2}-Q_{\kappa-1/2})$$

となる。詳細は文献[2]参照。

上記高精度流束にminmod関数を用いて制限を加えたものがChakravarthyの圧縮性流体にたいする人工粘性であり、非圧縮性流体の場合minmod関数は用いる必要がない。さらに上

記流束は人工粘性が依然として強すぎると考え

(1) セル境界の諸量を近傍の4点を使い3次関数で内挿する、E_κ^{ϵ}.

(2) 人工粘性を河村スキームの類推により

$$dE_\kappa{}^{\epsilon} \equiv R_\kappa|\lambda|L_\kappa(\nabla Q_{\kappa+1}-2\nabla Q_\kappa+\nabla Q_{\kappa-1})/4$$

$$\nabla Q_\kappa \equiv Q_{\kappa+1/2} - Q_{\kappa-1/2}$$

とする数値流束 $E_\kappa = E_\kappa^{\epsilon} + dE_\kappa^{\epsilon}$

も又使用している。

3 数値計算例

せん断流として代表的な２例について数値計算を行った。

(1) ３次元後方ステップ流れの数値計算

この流れ場は計算スキームの評価のためによく計算される問題である。計算格子点261X61X21を用いて数値計算を行った。計算格子を図１に示す。流入境界には十分に発達したチャネル流の解を与え，Chakravarthyの３次精度風上差分，乱流モデルはLES粘性[4]を使用している。流路のステップ高さを代表長さにしたＲe=46000,無次元時間95における流線，等圧力線，速度分布が図2,3に示されている。本計算においては再付着の位置(実験によると7.2程度)が問題とされるが我々の計算においてはせん断流により生成されたLarge eddyの通過により付着点が７近辺を移動する結果を得ており妥当な解であると考える。ただし渦のスケールが実験と比べ大きすぎるのではないか，格子点数がまだ足りないのではないかと考える。

(2)混合層の数値計算

速度差を持つ流れ場が分離板の後方下流で混合を開始する問題でRoshko[5,6]らの実験が有名である。乱流の3次元性を示すものとして混合層を上から眺めると縞模様になっていることが確かめられている。計算格子は202×105×52，ｘ，ｚ方向の格子幅に対するＲe数を50にして計算を行った。強制的に乱流を起こすために大きさ0.01程度の乱れ(一様乱数及び正弦波)を初期条件に与えて解いている。より高精度の解を得るため前章で提案した河村スキームからの類推により構成した差分スキームを使用し乱流モデルは使っていない。速度比U_2/U_1=0.5におけるX-Y断面における等渦度線，及びY=0面における速度のZ成分が図4,5に示されている。速度比0.5における混合層の増加率はおおよそ0.13[6]であり若干大きめである。また図５より渦の３次元性は確認できるものの明確な縞模様になっていない。しかしながらもっと細かい計算格子を用いれば実験に適合した解を与えそうな数値解であると考えられよう。詳細な結果の検討等はまだ行っていないがこの解析法は相当有望であると考えている。

4 おわりに

非圧縮流れの通常の解析においてdiv(v)を満足するように圧力を決めるわけだが完全に満たすことは不可能であり流れの時間変化が大きいところで振動することに悩まされたことがある。その振動が流れに本質的なものか数値的なものかよくわからなかった。乱流は圧力のありかたに余り関係しないと考えるゆえ擬似圧縮性方程式を使って乱流のDSを試みることに十分見込みがある、そしてそれを通じて圧縮性に対するより優れた差分スキームが作られるのではないかと考える。

参考文献

[1] 河村哲也 第16回流力講演会講演集、1984.
[2] Pan,D.&Chakravarthy,S., AIAA-89-0122.
[3] 児玉良明、第9回航空機計算空力シンポ。
[4] 小林敏雄ほか，生産研究，10，1989.
[5] Brown,G & Roshko,A., J.Fluid Mech. vol.64,pp.775-816(1974)
[6] Bernal,L.P.& Roshko,A., J.Fluid Mech. vol.170,pp.499-525(1986)

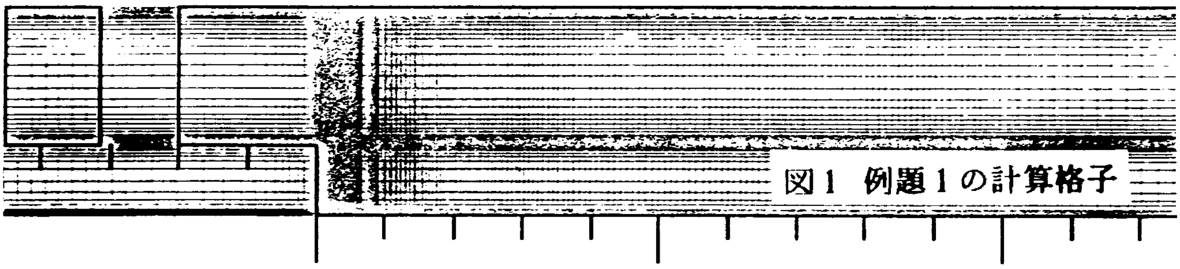

図1 例題1の計算格子

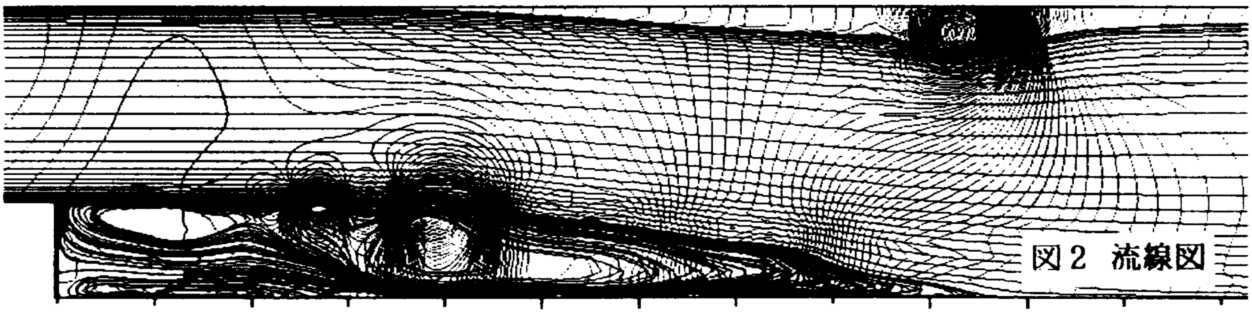

図2 流線図

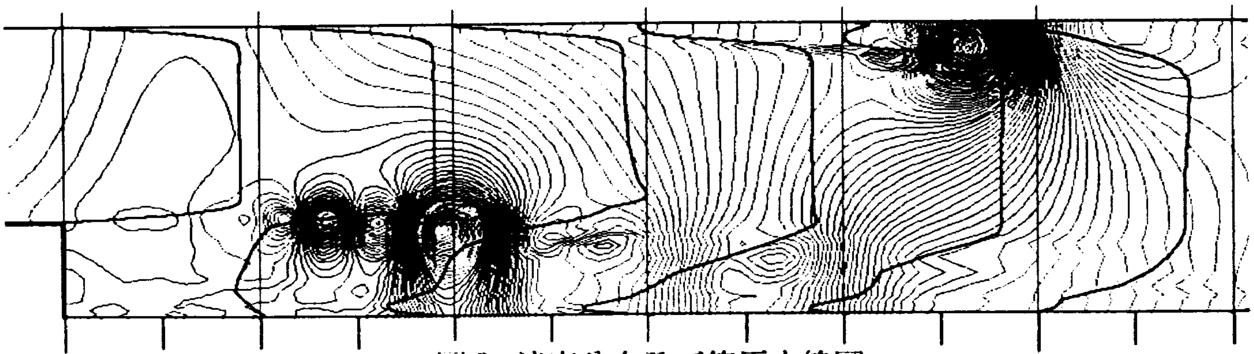

図3 速度分布及び等圧力線図

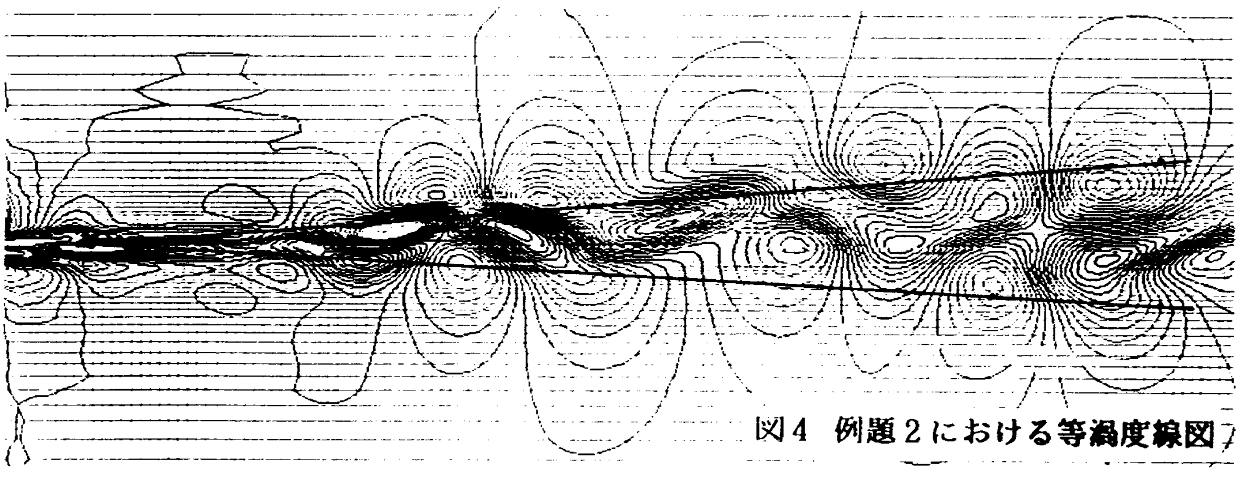

図4 例題2における等渦度線図

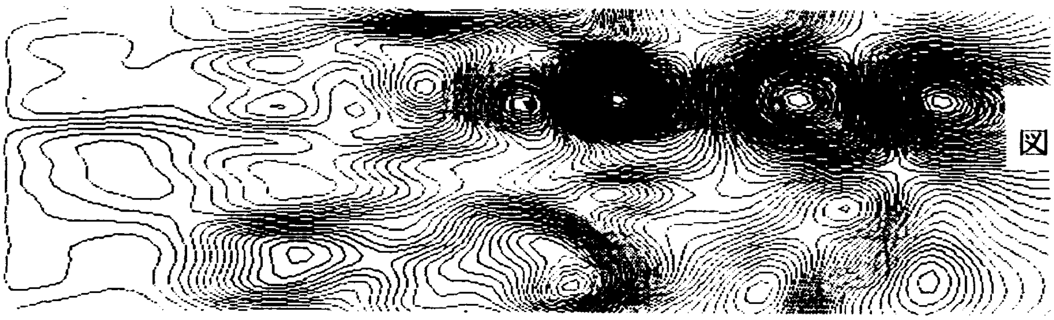

図5 Y=0面における V_z 成分