

ノズル内気泡流の数値解析

石井隆次* 村田成亮**

Numerical analysis of bubbly flow through a converging-diverging nozzle

By

Ryuji ISHII and Shigeaki MURATA

Department of Aeronautical Engineering, Kyoto University

ABSTRACT

Characteristics of bubbly flow through a converging-diverging nozzle are investigated theoretically and numerically. First, a new model equation of motion governing a dispersed bubble phase is proposed. This is compared in detail with those proposed previously. Next, hyperbolicity of the resultant system of governing equations for the bubbly flow is investigated in detail. Numerical simulation of bubbly flows through a converging-diverging nozzle are carried out by using the proposed system of model equations. In order to check the validity of the numerical results and then the proposed system, they are compared with the experiments which were performed in a water-nitrogen blow-down facility.

1. はじめに

多数の微小気泡を含む液体の流れは気泡流とよばれ、工学・物理学の多くの分野で直面する流れである。しかし気泡流の流動特性は、ふつうの水あるいは空気といった単相流体の流れのそれに比べてはるかに複雑であり、まだ十分に解明されているとは言えない。その最も重要な原因は気泡の形状・体積の変化と、液体・気泡間の速度差の存在によりもたらされると考えらる。とくに二相の間の速度スベリは流れ場に乱れの発生・吸収をもたらす、場合によっては気泡流れ全体の不安定化につながるということが知られている。本研究ではまず気泡流に対する新しいモデル方程式を提案し、次に方程式系のWell-Posedness (適切性) あるいは流れ場の安定性の議論する。最後に提案された

モデル方程式による準一次元ノズル流の数値解析を行い、実験結果と比較し、モデル方程式の有効性について詳しく調べる。

2. モデル方程式

気泡流の解析で、最も基本的で本質的な問題はその流れを記述するための基礎方程式の確立であることは言うまでもない。そのため、これまでに多くのモデル方程式が提案されてきた。しかしそれらの多くにはなんらかの意味で矛盾があり、また経験的な仮定あるいは経験式が含まれている。特に気泡の並進運動を記述する方程式に矛盾が見いだされる場合が多い。

簡単のため以下の仮定を用い、新しいモデル方程式を提案する。

- (1) 気体は圧縮性、液体は非圧縮性
- (2) 気泡は球形で局所的に一様サイズ
- (3) 気相および液相はそれぞれ非粘性であるが

* 京都大学工学

** トヨタ自動車

気液界面においてのみ液体の粘性による運動量の交換を行う

- (4) 気泡内の気体の圧力と液体の圧力は等しい
- (5) 気体及び液体相の温度は共に等しく、時間的・空間的に変化しない。
- (6) 蒸発・凝縮のような相変化は起こらない。

最も簡単な場合として一次元非定常流を考える。空間あるいはアンサンブル平均を取ることにより、気泡及び液体相の連続の式、液体の運動方程式はそれぞれつぎのようになる。

$$\frac{\partial n}{\partial t} + (u_g n) = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha + u_s \frac{\partial \alpha}{\partial x}) - (1 - \alpha) \frac{\partial u_s}{\partial x} = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial u_s}{\partial t} + u_s \frac{\partial u_s}{\partial x} - \frac{1}{\rho(1-\alpha)} \frac{\partial p}{\partial x} = g \tag{3}$$

ここに τ は一つの気泡の体積、 n はその数密度、 α は気泡のポイド率で

$$\alpha = n\tau, \quad \tau = \frac{4}{3}\pi R^3 \tag{4}$$

で関係づけられる。この3つの式についてはほとんど問題はなく、これまでに多くの研究者により提案されてきたモデル方程式の間で相違はない。しかし離散相である気泡群の運動量保存式はそれぞれの研究者により異なっている。ここで気泡群の並進運動を記述する新しい方程式を考える。

2-1. 一つの気泡の運動方程式

気泡一つの運動を考える。非定常・非一様な流体中を運動する気泡の運動は、Batchelor¹⁾およびAuton等²⁾の理論から次のように記述できる。

$$k\tau \frac{D_g u_g}{Dt} - k\tau \frac{D_s u_s}{Dt} + (u_g - u_s) \frac{D_g}{Dt} (k\tau) = \frac{\tau}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{12\pi\mu R}{\rho} (u_g - u_s) \tag{5-1}$$

$$k = \frac{1}{2} \frac{D_g}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_g \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{D_s}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_s \frac{\partial}{\partial x} \tag{5-2}$$

気泡の並進運動を記述する方程式はこれまで数多く提案されており、比較のためそれらの中から Wijngaarden & Biesheuvel³⁾とNishikawa et al.

等⁴⁾により提案された式を次に示す

$$\frac{D_g}{Dt} (k\tau u_g) - \frac{D_g}{Dt} (k\tau u_s) = \frac{\tau}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{12\pi\mu R}{\rho} (u_g - u_s) \tag{6}$$

$$\frac{D_g}{Dt} (k\tau u_g) - \frac{D_s}{Dt} (k\tau u_s) = \frac{\tau}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{12\pi\mu R}{\rho} (u_g - u_s) \tag{7}$$

これら3つの式(5),(6),(7)の右辺は流体の圧力勾配の効果と粘性の効果からなっており、すべてに共通している。しかし左辺は気体相・液体相の質量微分の使い方が全て異なっている。Auton等²⁾の議論からここに示したBiesheuvel及びNishikawa et al.等の方程式には誤りがあることが証明できる。

2-2 気泡群の運動方程式

これまで一個の気泡について考えたが、次に多数の微小気泡群の平均的運動を記述する方程式を考える。そのため気泡群を代表する気泡の運動を考える。この代表気泡の運動方程式には少なくとも次の3つの効果即ち気泡間の干渉、有限ポイド率および気泡の速度変動の効果が含まれねばならない。BatchelorやWijngaarden等に従いここでは3つの効果をそれぞれ

$$-H\rho \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{D_g}{Dt} \alpha \right), \quad k = \frac{1}{2} (1 + \lambda \alpha), \quad -D_w \frac{\partial n}{\partial x} \tag{8}$$

と表す。一般に $H(\alpha, u_g - u_s), D_w = D_w(\alpha), C_D = C_D(\alpha)$ であるが、数値計算ではいずれも定数と仮定する。

さて以上の議論から、気泡群の運動方程式方程式として次のような式を考えることができる⁵⁾。

$$\rho (u_g - u_s) \frac{D_g}{Dt} (k\tau) + \rho k\tau \frac{D_g u_g}{Dt} - \rho \tau (1+k) \frac{D_s u_s}{Dt} + \frac{D_w \partial n}{n \partial x} + \frac{\rho}{n} \frac{\partial}{\partial x} \left(H \frac{D_g \alpha}{Dt} \right) = -\rho \tau g - 12\pi\mu R (u_g - u_s) \tag{9}$$

この方程式と気体・液体の質量保存式(1),(2)と液体の運動方程式(3)とを組み合わせると、気泡流を記述する方程式系が得られる。

3. 方程式の適切性

2で求めた一次元・非定常を支配する方程式は次のようにかける。

$$\frac{\partial q}{\partial t} + F \frac{\partial q}{\partial x} = G, \quad (10)$$

$$q^T = (n, \alpha, u_g, u_s), \quad (11)$$

$$F = \begin{bmatrix} u_g & 0 & n & 0 \\ 0 & u_s & 0 & -(1-\alpha) \\ \left[\frac{D_w}{\rho k \tau} + \frac{\alpha BC^2}{n(1-\alpha)} \right] & \left[\frac{A\epsilon^2}{\alpha} - \frac{BC^2}{(1-\alpha)} \right] & 2\epsilon + u_s & -\frac{1-\alpha}{\alpha} \epsilon A \\ \frac{\alpha C^2}{n(1-\alpha)} & -\frac{C^2}{(1-\alpha)} & 0 & u_s \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$G^T = [0, 0, -g - \frac{9\mu\epsilon}{\rho k R^2} - \frac{H}{nk\tau} \frac{\partial}{\partial x} \left[(1-\alpha) \frac{\partial u_s}{\partial x} + \epsilon \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right], g] \quad (13)$$

$$\epsilon = u_g - u_s, \quad k = \frac{1}{2(1+\lambda\alpha)} \quad (14) \quad A = \frac{1+2\lambda\alpha}{1+\lambda\alpha}, \quad B = \frac{3+\lambda\alpha}{1+\lambda\alpha}, \quad C = \left(\frac{p}{\rho\alpha} \right)^{1/2}. \quad (15)$$

ここに ϵ は速度スベリである。この方程式中の行列 F の固有値を ν とすると

$$\det(F - \nu I) = 0, \quad (16)$$

より特性方程式が次のように求まる。

$$X^4 + 3\epsilon X^3 + \left[2\epsilon^2 - C^2 \left(\frac{\alpha B}{1-\alpha} - \frac{D_w}{\rho k \tau} \right) \right] X^2 + \epsilon C^2 (B-3) X + C^2 \left[\frac{D_w}{\rho k \tau} + (A-2)\epsilon^2 \right] = 0, \quad (17)$$

$$X = u_s - \nu. \quad (18)$$

一般的にこの方程式を解析的に解くことは難しい。しかし C は例えば代表的な場合： $p = 1 \text{ atm}$, $\rho = 1 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ (water), $\alpha = 0.1$ にたいして 33 m/s となり、多くの場合

$$|\epsilon| \ll C \quad (19)$$

と仮定することができる。このような仮定のもとでは上の特性方程式の解は容易に求められる。この特性方程式の根 X を調べることに以下のこと分かる。

- (1) 速度スベリ ϵ がゼロのとき4つの実根を持ち、従って系は適切。
- (2) 速度スベリがゼロでないときもし

$$\frac{D_w}{\rho \tau} > \frac{k[1+(2+\lambda)\alpha - \lambda^2(1-\alpha)\alpha^2]}{(1+\lambda\alpha)[1+(2+\lambda)\alpha]} \epsilon^2 \quad (20)$$

なら特性方程式は4実根を持ち従って系は初期値問題として適切である。しかしもし

$$\frac{D_w}{\rho \tau} \leq \frac{k[1+(2+\lambda)\alpha - \lambda^2(1-\alpha)\alpha^2]}{(1+\lambda\alpha)[1+(2+\lambda)\alpha]} \epsilon^2 \quad (21)$$

なら特性方程式は2実根と2虚根をもつため系は不適切となる。

このことから速度スベリは方程式系の不適切性の原因となり、粒子の拡散は逆に方程式系を適切にするのに重要である。ここで不適切性の数学的意味について考える。ここでは特性曲線法で4つの未知量(u_g, n, u_s, α)を決定するためには4つの特性曲線とそれに沿う4つの独立した関係式が必要である。これより系が4実根を持てば4本の特性曲線とそれに沿う4つの独立な適合条件式がえられ問題は適切となる。一方、もし2実根と2虚根の場合は2本の特性曲線とそれに沿う2つの独立な適合条件式しか得られず問題は不適切となる。この場合虚根は流れ場の不安定を意味することが証明できる。

3. 数値解析

次にこの方程式を用いて、準一次元ノズル流れを時間依存法により定常解を求める。ノズルは図1に示すようにスロート断面が $15 \times 15 \text{ mm}$ の2次元ノズル。計算条件は貯気槽圧 1.8 atm , ノズル出口圧 1.4 atm , 液体流量 2.2 kg/sec , 気体流 $1.9 \times 10^{-4} \text{ kg/sec}$ とした。初期条件は速度スベリ ϵ をゼロとした平衡流の解を用い、数値スキームは2次精度のMacCormack法を採用した。

ノズル軸に沿うボイド率分布の時間履歴を図2に示す。与えた無次元パラメータは $(D_w, H, C_v) = (0.003, 0.01, 0.001)$ である。計算の初期段階ではスロート部分でボイド波が発生し下流に流されていることが分かる。しかし時間と共に定常解に収束している。ここで C_v は人工粘性の係数であ

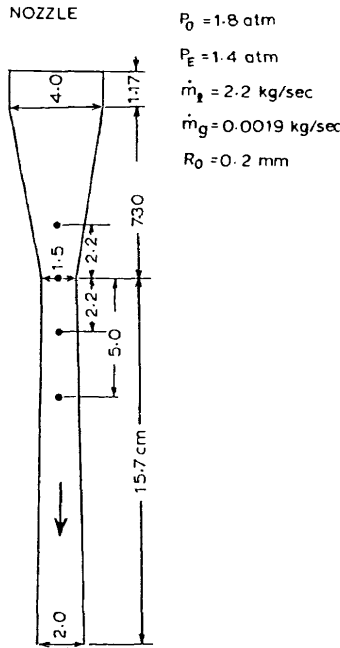


図1 ノズル形状

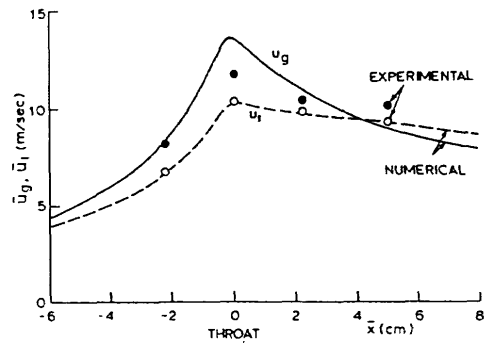


図4 実験との比較

$C_v = (0, 0.01, 0.001)$. この場合のボイド率分布の時間履歴は図3のようになる。明らかに解は時間的に変動しており、十分時間がたった段階で解は発散した。ここでは一例だけを示したが多くの計算結果から、粒子の拡散係数 D_w と粒子間の反発力 H を共にゼロとした場合には、数値粘性係数 C_v のあらゆる値に対して解は発散した。

次にモデル方程式及び数値解の有効性を検証するために、垂直ブローダウン混相流風洞での実験結果と比較する。図4には気泡群の速度と液体の速度が実験結果と比較されている。実験では気泡の大きさにはかなりばらつきがあるので気泡速度に関しては必ずしも数値結果は実験と完全には一致していないが、全体的には数値結果は実験結果をよく予測している。

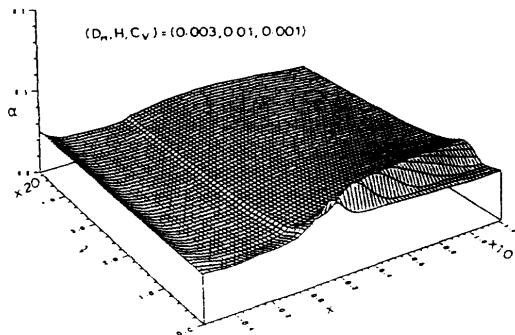


図2 ボイド率分布の時間履歴

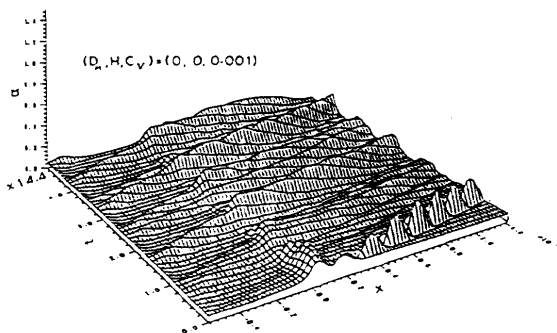


図3 ボイド率分布の時間履歴

4. 結論

新しいモデル方程式を提案し、このモデル方程式の適切性について詳しく調べた。流れの不安定は、気泡速度 u_g 及び液体の速度 u_l に対して、その差即ち速度スベリ ϵ のみに依存する。この速度スベリは流れを不安定化させる。逆に粒子拡散と粒子間の反発力は流れを安定化する。一般に気泡流は常に安定であるという物理的理由はないが、時間依存法により定常解をもとめ実験と比較し、数値結果と実験結果との良好な一致が得られた。

る。この場合安定な定常解が得られた原因は人工粘性による可能性も考えられる。そのため同じ計算をパラメータを代えて行った。ここでは $(D_w, H,$

参考文献

- 1) G.K.Batchelor. 1988 A new theory of the instability of a uniform fluidized bed. J. Fluid Mech. vol.193, 75-110.
- 2) T.T.Auton, J.C.R.Hunt and M. Prud'homme. 1988 The force exerted on a body in inviscid unsteady non-uniform rotational flow. J. Fluid Mech., vol. 197, 241-257.
- 3) A. Biesheuvel and L. van Wijngaarden. 1984 Two-phase flow equations for a dilute dispersion of gas bubbles in liquid. J. Fluid Mech., vol. 148, 301-318.
- 4) H. Nishikawa, Y.Matsumoto, H.Ohashi. 1991 The numerical calculation of the bubbly two phase flow around an airfoil. Computers & Fluids, Vol.19, 453-460.
- 5) R.Ishii, Y.Umeda, S.Murats and N.Shishido. 1993 Bubbly flow through a Diverging-Converging Nozzle. Physics of Fluids, to be published.

