

3

3次元翼列解析Euler codeの収束性に関する一考察

正木 大作* 梶 昭次郎**

A Study on the Convergence of a 3-D Euler code for Cascade Flow Calculation

by

Daisaku Masaki

Graduate School, University of Tokyo

and Shojiro Kaji

Department of Aeronautics and Astronautics, University of Tokyo

ABSTRACT

A three-dimensional Euler code for cascade flow calculation has been developed to investigate unsteady flow phenomena such as rotating stall or surge. The time-dependent Euler solvers provide a single approach for subsonic, transonic and supersonic flows, and have inherent shock capturing capability. So they can provide important information of flow field such as shock location and pressure distribution. Moreover, they form a very essential part of N-S solvers, so it is important to develop a robust, accurate, and convergent Euler code. During this development, an insight which is thought to be important is obtained. There exists ambiguity about "Roe's averaging" on density, and it was found that if this density average is used in inappropriate ways, it is not only analytically incorrect, but can have detrimental effects on numerical simulations. The example for such a case is shown. Also, the result for a transonic compressor rotor cascade at its design point is presented.

1 序論

遷音速ファン・圧縮機のnear-stall付近の流れ場をN-S方程式を用いて数値解析することにより旋回失速やサージの発生機構を究明することを目的として研究を進めて来ており、これまで、その前段階として、3次元Euler codeの開発を行ってきた。非粘性流れは、粘性のある実際の流れとは異なるものの、N-S solverの重要な部分を構成するため、安定で且つ高精度なEuler-solverを開発することは極めて重要である。この度完全に残差の落ちた収束解を得ることができたが、この開発過程において、数値計算上かなり重要と思われる知見を得たので計算結果とともに報告する。

2 密度に関するRoeの平均について

Roeの近似Riemann solverは、TVD schemeを多次元化する場合に用いられる方法の一つであるが、この方法では、各方向に1次元のRiemann問題を解く際に中間面での物理量を定義する必要がある。Roeの近似Riemann solverにおいては、この中間面での物理量を定義する場合に、不連続を正確に捉え得ることからRoeの平均が用いられる。ところが、密度に関するRoeの平均

$$\bar{\rho} = \sqrt{\rho_L \rho_R} \quad (1)$$

には曖昧さが存在しており、もしこれが流束のヤコビアンの評価に誤って用いられると、Roeの"Property U"が物理的に満たされなくなる恐れがあるばかりか、数値的に有害に振る舞い得ることを見出した。

Roeの近似Riemann solverは、1次元Riemann問題を解く際に、非線形方程式

$$Q_x + F_x = 0 \quad (2)$$

を解くと、反復計算になり、必要とされる演算量の割にはそれに見合った精度が得られないために、局所線型化

* 東京大学大学院

** 東京大学工学部航空宇宙工学科

した式

$$Q_t + \tilde{A}Q_x = 0 \quad (3)$$

を解くもので、特に \tilde{A} がある条件を満たしている場合には、線型化による計算効率の向上が得られるとともに、妥当な精度でoriginalの式の持つ非線形な振る舞いを充分に再現し得るというものである。Roeは、その \tilde{A} の満たすべき条件として次の4つを挙げていて、"Property U"と命名している。それらは、

(I) \tilde{A} は Q から F への線型写像でなければならない

(II) $Q_L, Q_R \rightarrow Q$ ならば $\tilde{A}(Q_L, Q_R) \rightarrow A$

但し $A = \partial F / \partial Q$

(III) $F_R - F_L = \tilde{A}(\bar{Q}) * (Q_R - Q_L)$

(IV) \tilde{A} の固有ベクトルは線型的に独立であること

このうち最も重要なのは条件(III)で、これは Q_L と Q_R が互いにshockやcontact discontinuityをまたいで存在するとき、Rankine-Hugoniotの関係式を正確に満たし、shock speedを正しく算出することができ、結果としてこの場合にはRiemann問題を厳密に解くことができるという条件である。Roeは巧妙な方法でこの条件を満たす \bar{Q} を算出して[1]、結果は次のようになる。

$$\bar{u} = \frac{u_L + Du_R}{1+D} \quad (4)$$

$$\bar{H} = \frac{H_L + DH_R}{1+D} \quad (5)$$

但し、 $D = \sqrt{\rho_R / \rho_L}$ 、 u は速度、 H はtotal enthalpy

理想気体の場合、 \bar{Q} は上式のように一意的に定まり、これらで閉じている。一方密度に関する平均は、Roe自身が次のようにして求めている[2]。

$$\Delta(\rho u) = \bar{\rho} \Delta u + \bar{u} \Delta \rho \quad (6)$$

(6)式に(4)式の \bar{u} を代入することにより(1)式が求まる訳であるが、この導出法の示唆するところは、同式が本来恒等的に満たされているProperty Uの条件(III)の第一式を無理に変形したものから得られたものであること、および(6)式の $\bar{\rho}$ はヤコビアン \tilde{A} からではなく、 $(Q_R - Q_L)$ の第二成分に由来するものであるということに注意しなければならない。従って、密度に関する"Roeの平均"は、その導出法からしてヤコビアンの評価に使用するには適していないことが判る。しかもこの密度に関するRoeの平均が、近似Riemann solverのヤコビアン \tilde{A} の評価に用いられると、数值的に極めて有害に振る舞い得ることを見出した。一例として、密度に関する"Roeの平均"をPulliam & Chaussee,あるいはPulliam & Steger[3]系列の固有ベクトルとともに用いた計算結果の一例をfig.1に示す。遷音速圧縮機翼列に対する計算例で、tip付近の密度場であるが、もはや流れ場はchaoticである。この場合fig.2に示すとおり、圧力場は一見まともに見えている。むしろこの例では、残差は全く落ちていない。

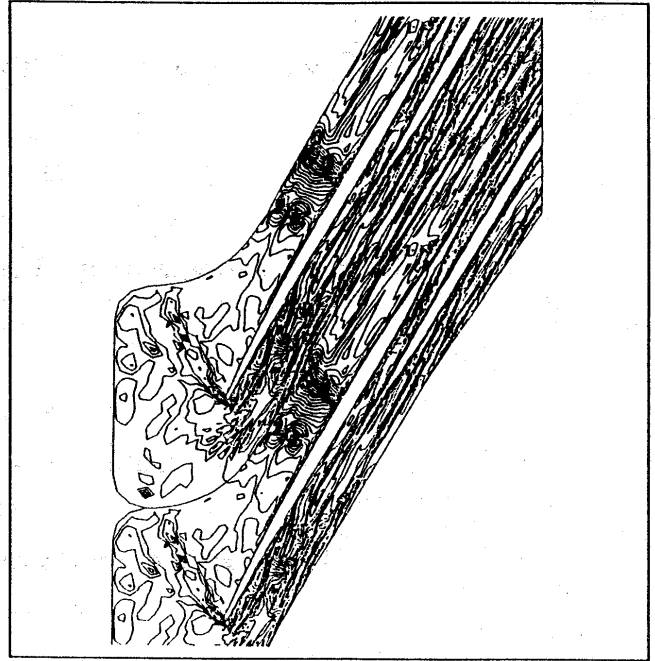


fig.1 density contours

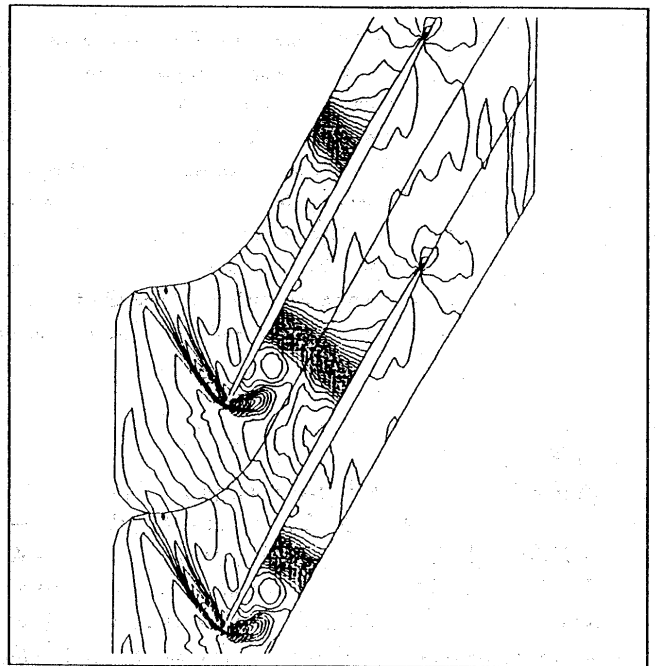


fig.2 static pressure contours

またhub付近に向かっても、程度の差はあれ同様な結果となってしまっている。このような非物理的な解を生ずる原因は、密度に関する"Roeの平均"をヤコビアンの評価に用いることにより、その固有ベクトルのscalingを崩してしまい、その結果非物理的な波の強さを算出してしまふことにある。

近似Riemann solverに於いては、特性量

$$\mathbf{a} = \mathbf{R}_{j+1/2}^{-1} \Delta \mathbf{Q} \quad (7)$$

を求め、これにlimiterを作用させているが、これは物理的には、波の強さ、即ち各特性波に沿って一定の値を取るRiemann不変量(の全微分)を意味している。もし密度に関する"Roeの平均"が、例えばPulliam-Steger, Pulliam-Chaussee系列の固有ベクトルとともに用いられると、次のような波の強さを算出する。

$$\alpha_1 = \tilde{\xi}_x (\bar{c}^2 \Delta \rho - \Delta p) / \bar{c}^2 + \tilde{\xi}_x \{ \Delta(\rho v) - \bar{v} \Delta \rho \} / \bar{\rho} - \tilde{\xi}_y \{ \Delta(\rho w) - \bar{w} \Delta \rho \} / \bar{\rho} \quad (8)$$

第一項はエントロピー波に対するRiemann不変量(の全微分)の差分近似になっていることが判る。問題となるのは密度に関する"Roeの平均"を積極的に用いたことに伴って出てくる第二項および第三項である。第一項が密度のオーダーであるのに対し、第二項と第三項は速度のオーダーになってしまっていて、このような波の強さが物理的に受け入れられないのは明らかである。なぜこのような波の強さを算出するかというとscalingの崩れた固有ベクトル

$$\tilde{\xi}_x v + \tilde{\xi}_z \rho \quad (9)$$

etc.を用いているからであるが、一方固有ベクトルのscalingを崩さずに密度に関する"Roeの平均"を用いようとすると、各固有ベクトルの係数として用いるしかなく、その場合定数と区別できないので、(1)式の形は解析的意味を失い、よって又この時密度の平均の定義に他のいかなる式を用いても同等に演算可能である。結局これは無駄な演算量を増やしているに過ぎない。

以上の議論から、理想気体の場合、密度に対してはRoeの平均はProperty Uからは導出され得ず、また無理に定義したところでヤコビアン \hat{A} の評価には使い途がないものであることが判る。ここで注意しなければならないのは、前述のような非物理的な波の強さが算出されていても、無次元化して計算していると、見かけ上計算が通ってしまうことがあるということである。

例として、(9)式を無次元化すると、

$$\tilde{\xi}_x \dot{v} + \tilde{\xi}_z \dot{\rho} \quad (10)$$

但し、()は無次元量を表す。

これを再び有次元に戻すと

$$\tilde{\xi}_x v + \tilde{\xi}_z \rho (v_{ref} / \rho_{ref}) \quad (11)$$

但し、()_{ref}はreference値を示す。

つまり、無次元化して計算が行われる場合、 v_{ref} / ρ_{ref} のようなscaling factorが自動的に掛かり、見かけ上のオーダーが釣り合ってしまうことを示している。むしろこのような調節は物理的に意味のあるものではなく、また $\rho(v_{ref} / \rho_{ref})$ のような量が流れ場のどのような状態量を表しているのかも不明であり、このような量を用いて計算された波の強さが正しく流れ場を反映していないのは明らかである。また、計算が通ったとしても数値粘性項が正しく評価されていないわけであるから、安定性や収束性に影響を及ぼしている可能性は大きい。

3 支配方程式

支配方程式は、 x 軸まわりに角速度 Ω で回転するデカルト座標系で表されたEuler方程式を保存型で一般曲線座標系に変換すると以下ようになる。

$$\frac{\partial \hat{Q}}{\partial \tau} + \frac{\partial \hat{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{G}}{\partial \zeta} = \hat{T}$$

\hat{Q} は保存変数、 \hat{E} , \hat{F} および \hat{G} はそれぞれ ξ -, η -および ζ -方向の流束ベクトルを表し、 \hat{T} は回転によって生ずる生成項を示す。

$$\hat{Q} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ e \end{bmatrix} \quad \hat{E} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \rho U \\ \rho u U + \xi_x p \\ \rho v U + \xi_y p \\ \rho w U + \xi_z p \\ (e+p)U - \xi_x p \end{bmatrix}$$

$$\hat{T} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \rho w \\ -\Omega \rho v \\ 0 \end{bmatrix}$$

但し

$$U = \xi_x + \xi_x u + \xi_y v + \xi_z w, \xi_x = \Omega(\xi_y z - \xi_z y)$$

また、静圧は

$$p = (\gamma - 1) [e - .5\rho(u^2 + v^2 + w^2)]$$

\hat{F} , \hat{G} も \hat{E} , U 中の ξ をそれぞれ η , ζ に変換することにより同様に得られる。

ρ は密度、 u, v, w はデカルト座標系での速度成分、 e は全内部エネルギーである。

メトリックや、座標変換のヤコビアンは全て有限体積的に評価されている。

4 計算格子

本研究においては、leading edgeにおいて高い解像度の得られるC型格子を用いた (fig.3)。C型格子は、StegerとSorensonによって開発された手法[4]と同様の方法を用いて解析的に作成されている。翼面上では直交性と細かな格子間隔が得られるように、また周期境界とwakecut境界では上下面で格子が滑らかに接続し、且つ適度な格子間隔が得られるよう制御されている。このようにして作成された2次元格子を半径方向にstackingすることにより3次元格子を作成した。格子点数は155×21×19である。

5 解析手法

数値解法としては近似Riemann solverである、Harten-Yeeのnon-MUSCL型Implicit Upwind TVD Scheme[5]を用いている。

右辺の数値流束関数は、有限体積法的に評価されていて、以下のようになる。

$$\begin{aligned} \bar{E}_{j+1/2,k,l} = & \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\xi_x}{J} \right)_{j+1/2} (Q_{j,k,l} + Q_{j+1,k,l}) + \left(\frac{\xi_x}{J} \right)_{j+1/2} (E_{j,k,l} + E_{j+1,k,l}) \right. \\ & + \left(\frac{\xi_y}{J} \right)_{j+1/2} (F_{j,k,l} + F_{j+1,k,l}) + \left(\frac{\xi_x}{J} \right)_{j+1/2} (G_{j,k,l} + G_{j+1,k,l}) \\ & \left. + \frac{1}{J_{j+1/2}} R_{j+1/2} \Phi_{j+1/2} \right] \end{aligned}$$

上式の数値粘性項 $R_{j+1/2} \Phi_{j+1/2}$ には前述の考察に基づいてRoeの平均を用いている。

$\Phi_{j+1/2}$ はupwind型で、

$$\phi'_{j+1/2} = \frac{1}{2} \psi(a'_{j+1/2})(g'_j + g'_{j+1}) - \psi(a'_{j+1/2} + \gamma'_{j+1/2}) \alpha'_{j+1/2}$$

ここで、

$$\gamma'_{j+1/2} = \frac{1}{2} \psi(a'_{j+1/2}) \begin{cases} (g'_{j+1} - g'_j) / \alpha'_{j+1/2} & \alpha'_{j+1/2} \neq 0 \\ 0 & \alpha'_{j+1/2} = 0 \end{cases}$$

また、 ψ はentropy correction functionで、

$$\psi(z) = \begin{cases} |z| & |z| \geq \delta_1 \\ z^2 + \delta_1^2 & |z| < \delta_1 \\ 2\delta_1 & \end{cases}$$

本計算では、流束制限関数としては van Leer の Monotonized Central Difference Algorithmを用いた。

$$g'_j = \min \text{mod}(2\alpha'_{j+1/2}, 2\alpha'_{j-1/2}, 1/2(\alpha'_{j+1/2} + \alpha'_{j-1/2}))$$

$\alpha'_{j+1/2}$ は前述の特性変数で

$$\alpha'_{j+1/2} = \mathbf{R}_{j+1/2}^{-1} (Q'_{j+1} - Q'_j)$$

一方、左辺はConservative Linearized Implicit Formを用いており、

$$\begin{aligned} & \left[\mathbf{I} + \frac{\lambda^s \theta}{1+\omega} (\mathbf{H}_{j+1/2,k,l}^s - \mathbf{H}_{j-1/2,k,l}^s) \right] \mathbf{D}^{**} \\ & - \frac{\lambda^s}{1+\omega} (\bar{\mathbf{E}}_{j+1/2,k,l}^n - \bar{\mathbf{E}}_{j-1/2,k,l}^n) - \frac{\lambda^n}{1+\omega} (\bar{\mathbf{F}}_{j,k+1/2,l}^n - \bar{\mathbf{F}}_{j,k-1/2,l}^n) \\ & - \frac{\lambda^s}{1+\omega} (\bar{\mathbf{G}}_{j,k,l+1/2}^n - \bar{\mathbf{G}}_{j,k,l-1/2}^n) + \frac{\Delta t}{1+\omega} \hat{\mathbf{T}}_{j,k,l}^n + \frac{\omega}{1+\omega} \Delta \hat{\mathbf{Q}}_{j,k,l}^{n-1} \\ & \left[\mathbf{I} + \frac{\lambda^n \theta}{1+\omega} (\mathbf{H}_{j,k+1/2,l}^n - \mathbf{H}_{j,k-1/2,l}^n) \right] \mathbf{D}^* - \mathbf{D}^{**} \\ & \left[\mathbf{I} + \frac{\lambda^s \theta}{1+\omega} (\mathbf{H}_{j,k,l+1/2}^s - \mathbf{H}_{j,k,l-1/2}^s) \right] \mathbf{D}^* - \mathbf{D}^* \end{aligned}$$

$$\mathbf{D}^n = \Delta \hat{\mathbf{Q}}^n; \hat{\mathbf{Q}}^{n+1} = \hat{\mathbf{Q}}^n + \mathbf{D}^n$$

ここで、 $\lambda^s = \Delta t / \Delta \xi$, etcを表す。

従って3組の3重対角行列群を反転することになる。本計算では非粘性解析ということで、backward Euler時間差分($\theta = 1, \omega = 0$)が用いられている。ここで、

$$\mathbf{H}_{j+1/2,k,l}^s \mathbf{D}^{**} = 1/2 \left[\hat{\mathbf{A}}_{j+1,k,l} \mathbf{D}_{j+1,k,l}^{**} + \hat{\mathbf{A}}_{j,k,l} \mathbf{D}_{j,k,l}^{**} - \Omega_{j+1/2,k,l}^s \mathbf{D}^{**} \right]$$

左辺も右辺と同様有限体積的に評価されており、

$$\hat{\mathbf{A}}_{j,k,l} = \left[\left(\frac{\xi_x}{J} \right)_{j+1/2} + \left(\frac{\xi_x}{J} \right)_{j+1/2} A_{j,k,l} + \left(\frac{\xi_y}{J} \right)_{j+1/2} B_{j,k,l} + \left(\frac{\xi_z}{J} \right)_{j+1/2} C_{j,k,l} \right]_{j,k,l}$$

$$\hat{\mathbf{A}}_{j+1,k,l} = \left[\left(\frac{\xi_x}{J} \right)_{j+1/2} + \left(\frac{\xi_x}{J} \right)_{j+1/2} A_{j+1,k,l} + \left(\frac{\xi_y}{J} \right)_{j+1/2} B_{j+1,k,l} + \left(\frac{\xi_z}{J} \right)_{j+1/2} C_{j+1,k,l} \right]_{j+1,k,l}$$

また差分演算子 $\Omega_{j+1/2,k,l}^s$ に関しては、diagonal formを用いた。

$$\Omega_{j+1/2,k,l}^s \mathbf{D}^{**} = \text{diag} \left[\max_i \psi(a'_{j+1/2}) \right] (\mathbf{D}_{j+1,k,l}^{**} - \mathbf{D}_{j,k,l}^{**})$$

5 境界条件及び初期条件

流入境界条件としては、tip付近でのunique incidenceを考慮して、全温、全圧、周方向速度、半径方向速度を規定し、上流方向に向かうRiemann不変量

$$R^- = q - \frac{2c}{\gamma - 1}$$

ただし、 $q = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$

を外挿している。流出境界では静圧を各断面で規定し、密度及び速度を線形外挿している。

壁面境界では、速度に関してはslip条件、静圧はnormal momentum equationより算出し、密度は温度条件より求めている。周期境界及びwakecut境界は上下の物理量を平均して求めている。初期条件としては、inlet hubの一樣流からCFL = 3、local time stepを用いてimpulsive startしている。

6 計算結果

計算対象は単段の高負荷遷音速圧縮機動翼列である。主要諸元を表-1に示す。相対流入マッハ数はtipで1.3, hubで0.9となっている。設計点状態での計算結果をfig.4~6に示す。それぞれ hub, mid span, tipでの密度分布 ($\Delta \rho = 0.05 [kg/m^3]$) を表している。fig.1との差は一目瞭然である。hubでは流入マッハ数が亜音速であるため衝撃波は見られず、翼間でスムーズに減速している。mid spanでは流入マッハ数が音速を超えるため、bow shockが見られ、なお且つ翼間に弱いpassage normal shockが現れ始めていて、multi-shock structureを鮮明に捉えている。tip付近では強いpassage normal shockが生じている。この場合、skewな格子の中を斜めに衝撃波が横切ってくるにも関わらず、4点以内で衝撃波を捉えている。この計算の場合の収束履歴をfig.7に示す。計算対象が遷音速の流れ場で、複雑な3次元衝撃波構造を有すること、かなり複雑な3次元格子にTVD schemeが適用されていることを考えれば、残差の落ちは単調で速く、3次元計算の収束の一つの目安である残差の3桁の落ちは簡単に達成されており、またいわゆる“flattening out”の気配は見られない。

7 結論

- 密度に関する”Roeの平均”はRoeの”Property U”から導出されるものではなく、従ってヤコビアンの評価に用いるには適していない。
- 密度に関する”Roeの平均”をヤコビアンに無理に(あるいは積極的に)用いると非物理的な波の強さ(Riemann不変量の全微分)が生じ、正しい解が得られない。
- また、そのような非物理的な波の強さを算出しても、無次元化して計算する場合、物理的に根拠のないscalingの調節が自動的に行われ、見かけ上計算が通ってしまうことがある。
- Roeの近似Riemann solverにおいては、流束のヤコビアン固有ベクトルは全く任意に選んで良いという訳ではない。
- Harten-Yeeの non-MUSCL 型 implicit upwind TVD schemeは3次元回転翼列計算に安定に適用でき、翼列内の複雑な遷音速の3次元衝撃波構造が鮮明に捉えられ、且つ十分な残差の落ちとmonotoneな収束性が得られた。

8 謝辞

本研究は東京大学と航技研の共同研究により航技研のNWTを用いて行われたものである。共同研究の幹事と第一著者の研修を担当された原動機部坂田公夫室長に感謝の意を表します。
また翼型データを提供して下さった川崎重工株式会社にも感謝の意を表します。

表-1 圧縮機主要諸元

動翼枚数	24
回転数	49000rpm
空気流量	2.54kg/sec
圧力比	1.7

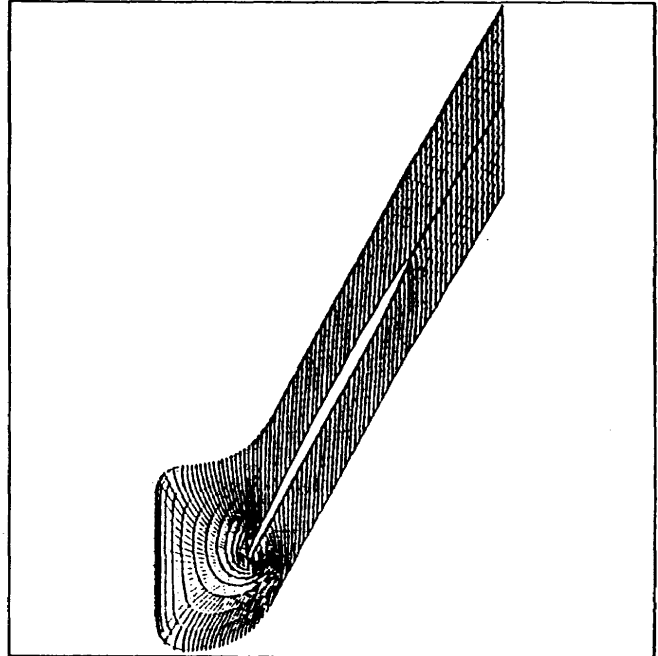


fig.3 C-type grid (tip section)

Reference

[1]Roe, P.L.:Approximate Riemann Solvers, Parameter vectors,and Difference Schemes,J.Comp.Phys, 43, 357 -372 (1981)
 [2]Roe, P.L.:Characteristic-based Schemes for the Euler Equations,Annual Review of Fluid Mechanics, 18,337-365 (1986)
 [3]Pulliam, T.H. and Chaussee, D.S.:A Diagonal Form of an Implicit Approximate Factorization Algorithm, J.Comp.Phys, 39, 372-397 (1981)
 [4]Steger, J.L. and Sorenson, R.L.:Automatic Mesh-point Clustering near a Boundary in Grid Generation with Elliptic Partial Differential Equations, J.Comp.Phys, 33, 405-410 (1979)
 [5]Yee, H.C. , Klopfer, G.H. and Montagne, J.-L.:High-Resolution Shock-capturing Scheme for Inviscid and Viscous Hypersonic Flows,J.Comp.Phys, 88, 31-61 (1990)

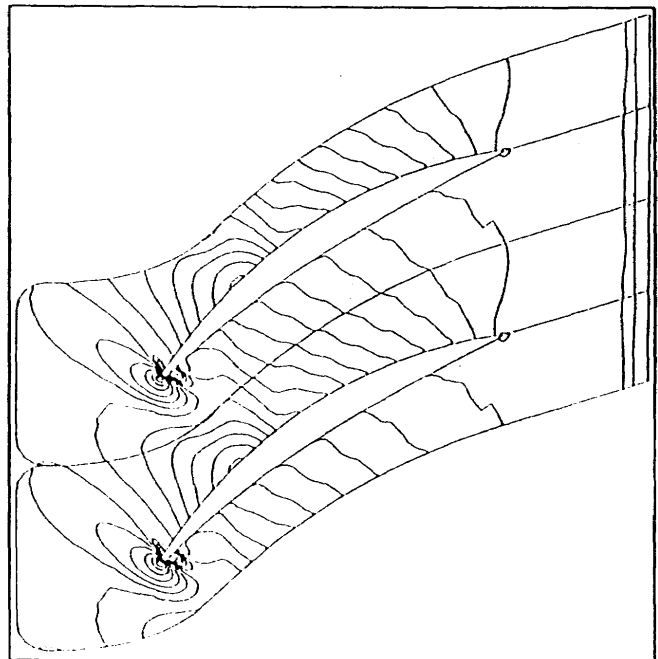


fig.4 density contours at hub

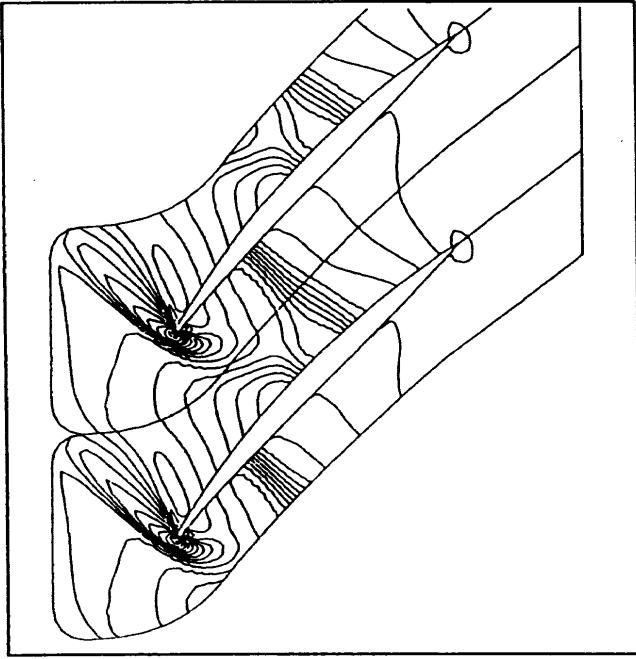


fig.5 density contours at mid span

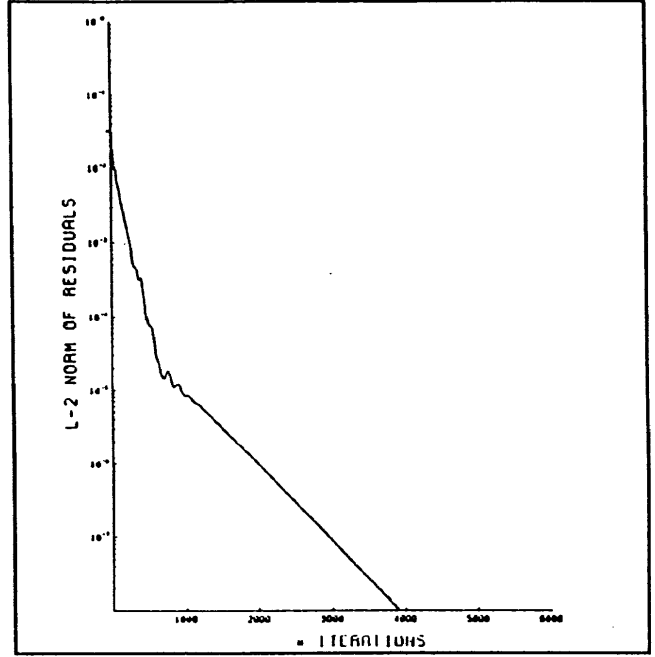


fig.7 convergence history

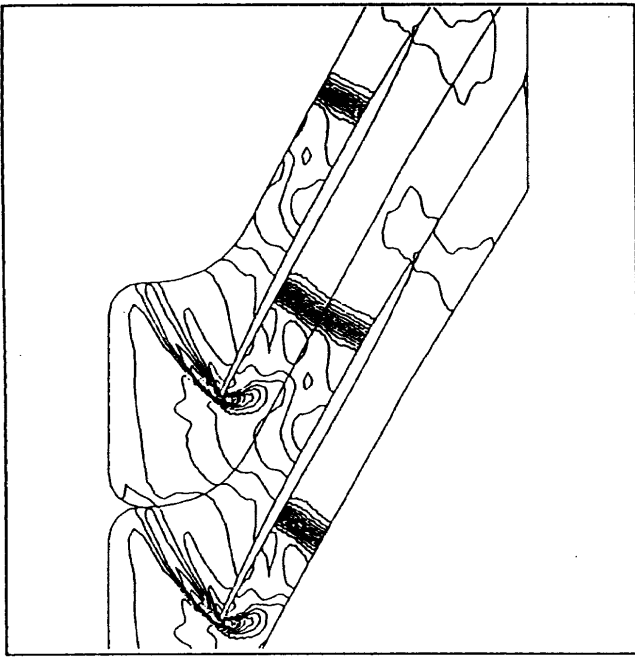


fig.6 density contours at tip