

# 圧縮性流れに対する楕円型解適合格子法

山川 勝史\*, 松野 謙一\*\*, 里深 信行\*\*

## Adaptive Grid Method Using Elliptic Equation for Compressible Flows

by

Masashi YAMAKAWA, Kenichi MATSUNO and Nobuyuki SATOFUKA

### Abstract

An adaptive grid generation method using elliptic equations is developed for compressible flows. In the present adaptive method, a control function is connected with a weight function, which controls the grid density. Thus, the weight function is important to generate the adaptive grid of high quality. A new approach for making the weight function is tried in this paper. To construct the weight function, a combination of the actual distribution of a flow property with a fictitious distribution of an artificial property is used.

The adaptive method is applied to many shocked-flow problems of one and two dimension. It is shown that the new weight function works well and the present adaptive method is promising for compressible flows, especially, shocked flows.

### 1. 序論

計算流体力学の分野において格子の形成は重要な問題の一つであり、その格子形成法の一つとして解適合格子法がある。

解適合格子法とは、物理量の変化にあわせて格子間隔を大きくしたり小さくしたりして、格子間隔に対する物理量の変化の割合を一様にしようとするものである。これにより少ない格子数で、必要なだけの分解能を持つ計算格子を形成することができる。さらに解適合格子法の利点として、この最適格子形成を自動で行い、かつ見落としていた物理変化をも捕える可能性があるということがあげられる。

解適合格子形成において様々な方法が提案されているが、本論文では格子間隔の大きさを物理変化の割合と反比例するように決定する方法をとる。この方法は、物理量の変化の割合を示す重み関数を定め、この重み関数により一意的に格子間隔が決定されるように格子点を配置するというものである。

さて、格子を自動的に形成する方法はいくつかあるが、Thompsonらにより発展させられた楕円型方程式を用いる方法<sup>1)</sup>は、最もなめらかな格子分布が得られる方法である。Thompsonらはこの楕円型方程式を

用いた格子形成法において、制御関数を導入し格子配置の制御を行っている。この制御関数に格子の位置を制御する働きがあることに着目し、それに解適合の機能を結び付けたのが文献<sup>2)</sup>の楕円型解適合格子法である。文献<sup>2)</sup>において制御関数を重み関数と関連づけ、さらに隣接する格子間隔比をパラメータとして重み関数を決定する方法が提案され、急激に変化する物理場をモデルに1次元から3次元での解適合格子形成を行っている。この方法は文献<sup>3)</sup>で2次元ダクト内での超音速流れに適用されているが、その他の適用例はほとんどない。

本論文の目的は、この楕円型解適合格子法を様々な実際の圧縮性流れへの適用を行い、発展させることである。特に、本論文では重み関数に対し擬似関数を併用する方法を提案し、その有効性を示した。

### 2. 楕円型解適合格子法

#### 2.1 楕円型解適合格子法

解適合格子として流れの物理量の変化を含む重み関数 $w$ に対し、格子間隔 $\Delta x$ との積が一定となるように次式を用いた。

$$w\Delta x = const. \quad (1)$$

計算面 $\xi$ に対応させて、

$$w\xi = const. \quad (2)$$

\* 京都工芸繊維大学大学院

\*\* 京都工芸繊維大学工学部

となり、右辺の評価を避けるため $\xi$ で微分すると

$$x_{\xi\xi} + (w_{\xi}/w)x_{\xi} = 0 \quad (3)$$

を得る。

一方、滑らかな格子を形成するため楕円型方程式として Thompson らの提案による、ポアソン方程式を用い、その1次元形を次式に示す。

$$\xi_{xx} = \Phi(\xi) \quad (4)$$

式(4)の $\Phi(\xi)$ は格子点分布を制御する関数であるが、より制御を効果的に行うため Thomas ら<sup>4)</sup>は、次式

$$\xi_{xx} = \phi(\xi)\xi_x^2 \quad (5)$$

を提案している。本論文では、式(5)で表わされる楕円型方程式を対象とする。

独立変数と従属変数の役割を交換するため、まずチェーン則より

$$\xi_x = \frac{1}{x_{\xi}} \Leftrightarrow 1 = \xi_x x_{\xi} \quad (6)$$

を得る。両辺を $\frac{\partial}{\partial x}$ すると、

$$0 = x_{\xi\xi}\xi_x^2 + x_{\xi}^2\xi_{xx} \Leftrightarrow \frac{\xi_{xx}}{\xi_x^2} = -\frac{x_{\xi\xi}}{x_{\xi}} \quad (7)$$

となり、これを式(5)に代入することにより

$$x_{\xi\xi} + \phi x_{\xi} = 0 \quad (8)$$

を得る。式(3)、式(8)の比較により制御関数 $\phi$ は、

$$\phi = \frac{w_{\xi}}{w} \quad (9)$$

として、重み関数に関連づけられる。

重み関数として、ここではある物理量 $f$ の1階導関数 $f_x$ を用いて、

$$w = \sqrt{1 + b(f_x)^2} \quad (10)$$

と表わす。係数 $b$ は通常、ユーザ指定の任意定数である。本論文では隣り合う格子間隔比の最大許容値 $K$ をユーザ指定のパラメータとし、

$$\frac{1}{K} \leq \frac{\Delta x_i}{\Delta x_{i-1}} \leq K \quad (11)$$

のように決めてやると、 $b$ は式(11)を満足するように自動的に決定される。すなわち任意定数 $b$ は次式となる<sup>2)</sup>。

$$b_i = \left[ 4 \frac{K-1}{K+1} \right] / \left[ \left\{ (f_x)_i \right\}^2 - 4 \frac{K-1}{K+1} (f_x)_i^2 \right] \quad (12)$$

$$b = \min(b_1, b_2, \dots, b_{i_{max}}) \quad (13)$$

なお2個の物理量( $f, g$ )を取り扱う場合重み関数 $w$ 、制御関数 $\phi$ はそれぞれ以下ようになる。

$$w = w_1 w_2 = \sqrt{1 + b_1(f_x)^2} \sqrt{1 + b_2(g_x)^2} \quad (14)$$

$$\phi = \frac{w_{\xi}}{w} = \frac{w_{1\xi}}{w_1} + \frac{w_{2\xi}}{w_2} \quad (15)$$

## 2.2 格子形成

制御関数が決定されたので、実際に格子形成を行う。まず、式(8)を中心差分を用いて離散化する。ここで、 $\Delta\xi = 1$ とおくと次式を得る。

$$x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1} + \phi_i \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_{i-1}) = 0 \quad (16)$$

最終的に格子は式(16)を解くことにより得ることができ<sup>3)</sup>、非線形であるのでここでは緩和法を用いて解く。なお途中段階において格子の移動を小さくするため緩和係数 $\omega$ を1以下(過小緩和法)にて行う。

式(16)に緩和法を適用して次式を得る。

$$\left(1 - \frac{1}{2}\phi_i\right)\delta x_{i-1} + (-2)\delta x_i + \left(1 + \frac{1}{2}\phi_i\right)\delta x_{i+1} = -R_i^a \quad (17)$$

$$x_i^{a+1} = x_i^a + \omega\delta x_i \quad (18)$$

$$R_i^a = x_{i+1}^a - 2x_i^a + x_{i-1}^a + \phi_i \frac{1}{2}(x_{i+1}^a - x_{i-1}^a) \quad (19)$$

## 2.3 計算手順

圧縮性オイラー方程式の場合の楕円型解適合格子法による計算手順の一例を以下に示す。

1. 初期格子を適当に形成する(例えば等間隔格子)。
2. 初期格子上でオイラー方程式を解き、圧力分布を物理量 $f$ とする。
3.  $f$ より制御関数 $\phi$ を決定する。
4. 格子形成方程式(16)を解く。
5. 新しく形成された格子分布上での $f$ を更新する。
6. 手続き3. から5. を指定した回数まで繰り返す。
7. 最終的に形成された格子上で、オイラー方程式を再度解く。

## 3. 1次元ノズル内流れへの適用

### 3.1 計算条件

前章で述べた楕円型解適合格子法を非粘性流れ場、ここでは図1に示すようなノズル内を超音速(マッハ数 = 2.0)で流入する準1次元ノズル内流れに適用した。

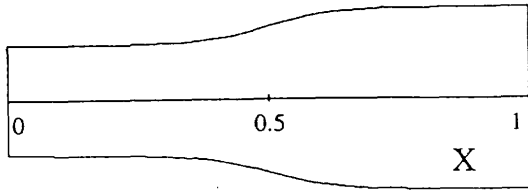


図1 ノズル形状

$$S(x) = 1.398 + 0.347 \tanh(8.0x - 4.0)$$

計算方法として、空間微分項の離散化に関しては、中心差分を用いて評価し、振動を抑えるためにJamesonにより提案された人工粘性項を導入した。時間積分は、陰的解法 (Beam-Warming 法) を用いた。

### 3.1 計算結果

重み関数の構成において、式(20)に示すような1階および2階導関数を用いた解適合格子による計算結果を図2に示す。ここで式(11)の示すパラメータKはK=2と置いた。なお図の上段における目盛は、等間隔格子および解適合格子の格子間隔を表わし、格子数はどちらも41である。

$$w = \sqrt{1 + b_1(f_x)^2} \sqrt{1 + b_2(f_{xx})^2} \quad (20)$$

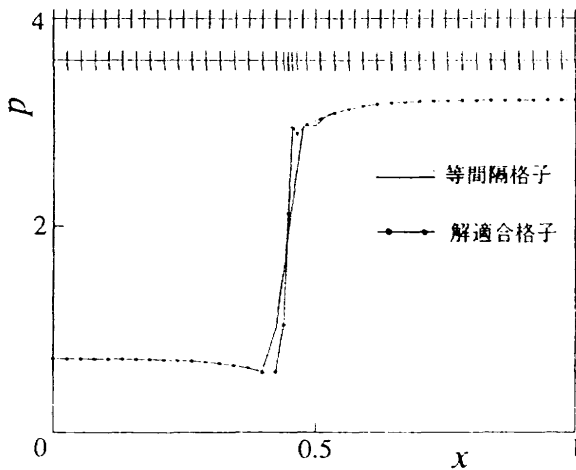


図2 1階及2階導関数を用いた解適合格子

ある程度格子は衝撃波部に集中するものの、解のなめらかな変化の所でもやはり多くの格子が残るのがわかる。これは、式(1)より判るように、たとえ物理量の変化の起こらない部分 ( $w=1.0$ ) でも、 $\Delta x$ はconstに対応している量だけ格子間隔を持つことになる。よって仮に式(11)のパラメータKを大きくしても、衝撃波上にある格子(3~4点)のみが集中するだけで、他の格子はそのまま残ってしまうことになる。

そこで全体にある程度の変化を持つ擬似的な量を作り出し、それを従来からの物理量と組み合わせて取り扱うことを考える。この擬似関数がある程度もとの物

理量に依存している値として、図3に示すようなもとの物理量にスムージングを施したものを使用する。

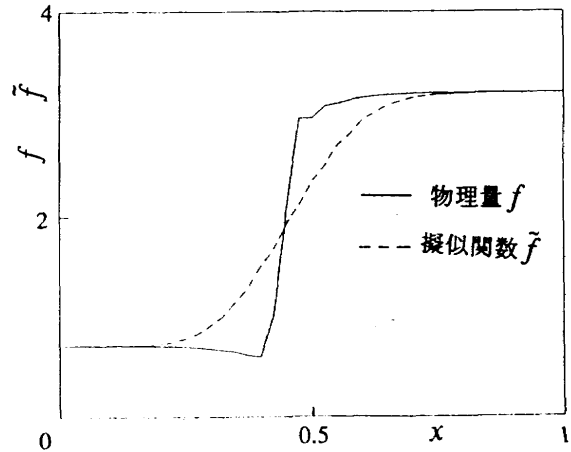


図3 物理量に対する擬似関数

このようにして作り出された擬似関数  $\tilde{f}_x$  を用いて式(21)のように重み関数を構成し、これにより形成された解適合格子及び、その格子上での計算結果を図4に示す。衝撃波の前後に十分な格子が集中しているのを確認することができる。

$$w = \sqrt{1 + b_1(\tilde{f}_x)^2} \sqrt{1 + b_2(\tilde{f}_x)^2} \quad (21)$$

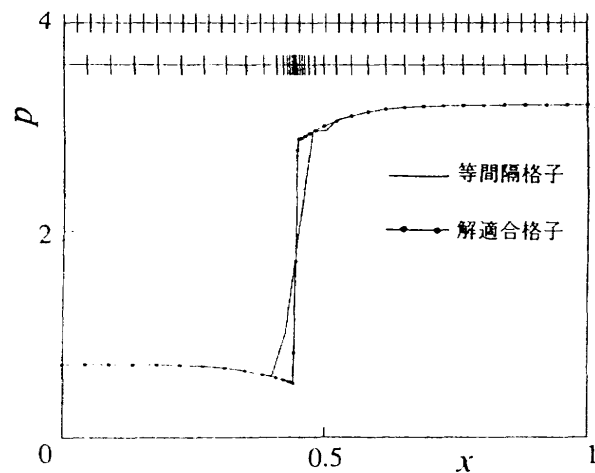


図4 擬似関数を用いた解適合格子

## 4. 2次元ダクト内流れへの適用

### 4.1 2次元楕円型解適合格子法

2次元の楕円型解適合格子法では $\xi$ 方向、 $\eta$ 方向の格子の制御を同時に行うため、式(22)に示すポアソン方程式を用いた。

$$\begin{aligned} \xi_{xx} + \xi_{yy} &= \phi(\xi, \eta)(\xi_x^2 + \xi_y^2) \\ \eta_{xx} + \eta_{yy} &= \psi(\xi, \eta)(\eta_x^2 + \eta_y^2) \end{aligned} \quad (22)$$

式(22)の独立変数と従属変数の役割を交換して書き換えると以下ようになる。

$$\begin{aligned} \alpha(x_{\xi\xi} + \phi x_{\xi}) - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma(x_{\eta\eta} + \psi x_{\eta}) &= 0 \\ \alpha(y_{\xi\xi} + \phi y_{\xi}) - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma(y_{\eta\eta} + \psi y_{\eta}) &= 0 \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \alpha &= x_{\eta}^2 + y_{\eta}^2 \\ \beta &= x_{\xi}x_{\eta} + y_{\xi}y_{\eta} \\ \gamma &= x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2 \end{aligned}$$

式(23)が本論文で用いる2次元楕円型方程式であり、この式により格子の形成を行うことにする。

さて2次元格子の形成については、格子線が曲線になってしまうので式(2)を次のように書き換え1次元的に取り扱う。

$$ws_{\xi} = const.$$

$$ws'_{\eta} = const.$$

$$\left(\frac{ds}{d\xi}\right)^2 = \left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2$$

$$\left(\frac{ds'}{d\eta}\right)^2 = \left(\frac{ds'}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{ds'}{d\eta}\right)^2 \quad (24)$$

格子間の距離と重み関数の積が一定となるように重み関数を決定する。

制御関数 $\phi, \psi$ については1次元の場合と同様に重み関数を構成する。したがって制御関数 $\phi$ については $\xi$ 方向、 $\psi$ については $\eta$ 方向にそれぞれ決定した。

#### 4.2 超音速流への適用

##### 4.2.1 計算条件

楕円型解適合格子法を、図5に示すような厚み比10%の円弧状の隆起を持つダクト内を超音速(マッハ数=2.0)で流入する2次元圧縮性流れ場に適用した。

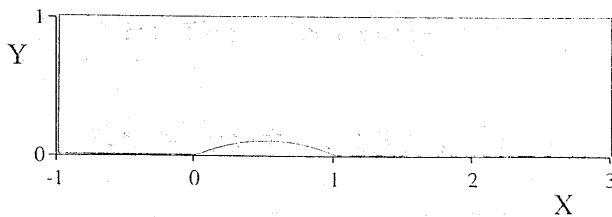


図5 ダクト形状

計算方法として、空間微分項の離散化においてはRoeのFDS(Flux Difference Splitting)法を用いたセル中心有限体積法を、時間積分には前進オイラー法を用いた。

##### 4.2.2 計算結果

初期格子として図6に示すような境界から境界までを等間隔に切ったものを使用し、この初期格子上での圧力分布の等高線を図7に示す。

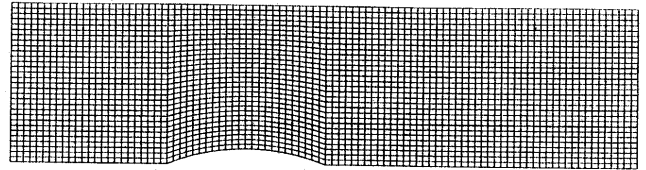


図6 初期格子(97×31)

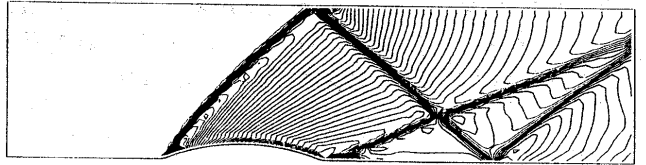


図7 初期格子による解(等圧力線図 Δp=0.05)

次に図7の圧力分布を制御関数に用いて解適合格子を形成した。重み関数は、擬似関数 $\tilde{f}$ の一階導関数 $\tilde{f}'_s$ のみを用いても十分効果が見られたので、演算量の削減をも踏まえて式(25)のように構成する。

$$w = \sqrt{1 + b(\tilde{f}'_s)^2} \quad (25)$$

図8に解適合格子を示し、その格子による解を図9に示した。図6に比べより急峻に圧力変化を捕えられているのを確認することができる。

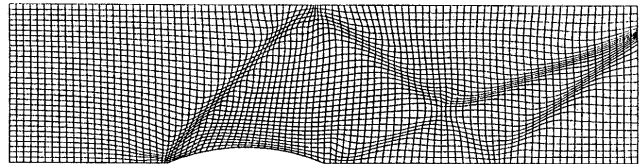


図8 解適合格子(97×31)

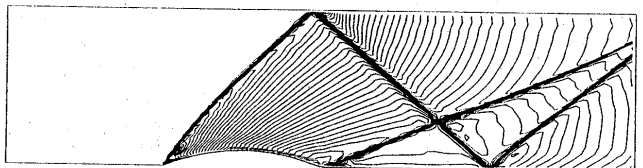


図9 解適合格子による解(等圧力線図 Δp=0.05)

この解適合格子での解の分解能を比較するため格子数を4倍に増やした等間隔格子を図10に、その格子による解を図11に示す。解適合格子による解がこれとほぼ同様の分解能を持つことが確認された。

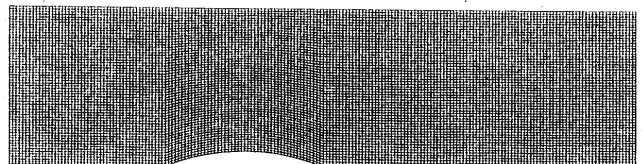


図10 比較用格子(193×61)

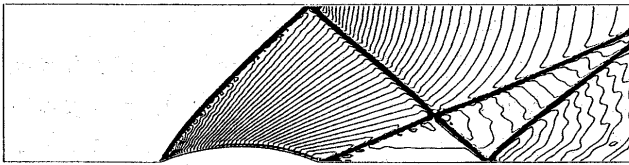


図11 比較格子による解 (等圧力線図  $\Delta p = 0.05$ )

4.3 遷音速流への適用

4.3.1 計算条件

楕円型解適合格子法を、図12に示すような厚み比10%の円弧状の隆起を持つダクト内を遷音速(流入マッハ数=0.675)で通過する2次元圧縮性流れ場へ適用した。

計算方法としては超音速流の場合と同様に、空間微分項の離散化に関してRoeのFDS(Flux Difference Splitting)法を用いたセル中心有限体積法を、時間積分には前進オイラー法を用いた。

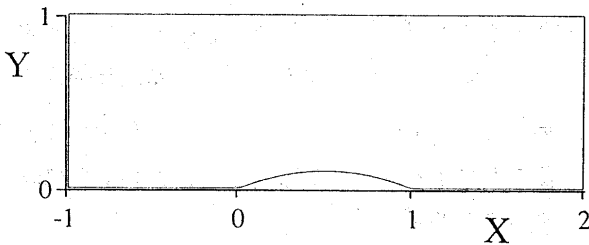


図12 ダクト形状

4.3.2 計算結果

初期格子として、図13に示すような隆起部で格子が密となるように切ったものを使用した。初期格子上で計算した圧力分布の等高線を図14に示す。

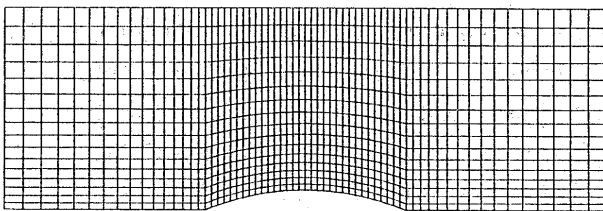


図13 初期格子 (65 × 17)

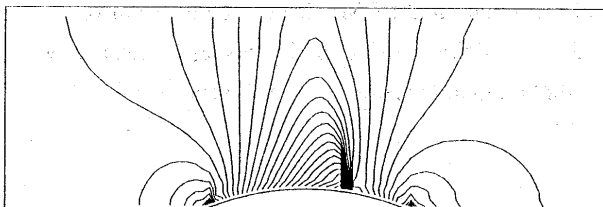


図14 初期格子による解 (等圧力線図  $\Delta p = 0.02$ )

初期格子上で圧力分布を用いて形成した解適合格子を図15に示し、その解適合格子上での圧力分布の等高線を図16に示す。ここで重み関数は式(25)に示されている超音速流へ適用したときに用いたものを使用

した。

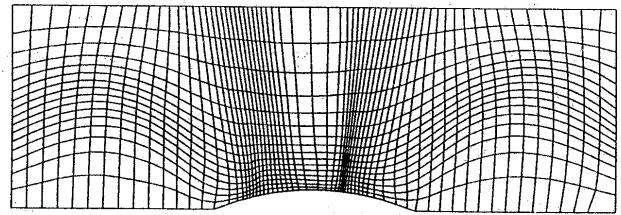


図15 解適合格子 (65 × 17)

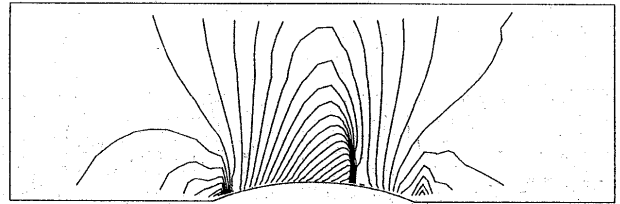


図16 解適合格子による解 (等圧力線図  $\Delta p = 0.02$ )

さらに解適合格子による計算結果の分解能を調べるため、超音速流同様に初期格子を格子数4倍にして形成した比較用格子を図17に、比較用格子による圧力分布の等高線を図18に示す。

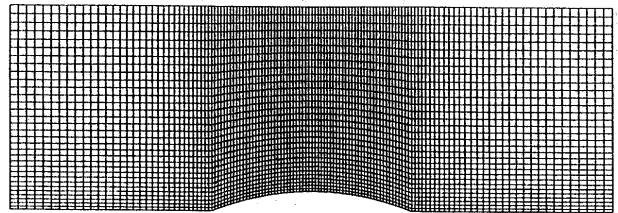


図17 比較用格子 (129 × 33)

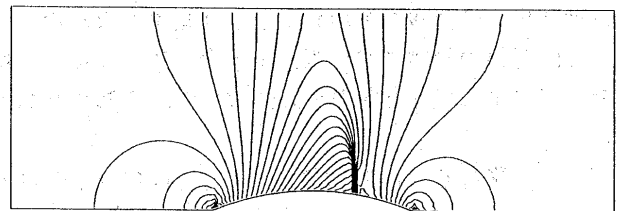


図18 比較格子による解 (等圧力線図  $\Delta p = 0.02$ )

図16について衝撃波部における分解能は向上したものの、隆起部以外において初期格子から大きくかけ離れてしまった。そこで、初期格子の情報を得るため、式(23)を制御関数 $\phi_{i,j}, \psi_{i,j}$ について逆に解くと、

$$\phi_{i,j} = \frac{1}{J} \left\{ y_{\eta} \left( -x_{\xi\xi} + \frac{2\beta}{\alpha} x_{\xi\eta} - \frac{\gamma}{\alpha} x_{\eta\eta} \right) - x_{\eta} \left( -y_{\xi\xi} + \frac{2\beta}{\alpha} y_{\xi\eta} - \frac{\gamma}{\alpha} y_{\eta\eta} \right) \right\}$$

$$\psi_{i,j} = \frac{1}{J} \left\{ y_{\xi} \left( \frac{\alpha}{\gamma} x_{\xi\xi} - \frac{2\beta}{\gamma} x_{\xi\eta} + x_{\eta\eta} \right) + x_{\xi} \left( -\frac{\alpha}{\gamma} y_{\xi\xi} + \frac{2\beta}{\gamma} y_{\xi\eta} - y_{\eta\eta} \right) \right\}$$

$$J = x_{\xi} y_{\eta} - x_{\eta} y_{\xi} \quad (26)$$

を得る。

初期格子における $x_{\xi}, x_{\xi\xi} \dots$ を式(26)に代入すること

により初期格子を形成する制御関数 $\phi_{i,j}, \psi_{i,j}$ の値が得られ、それを $\phi_g, \psi_g$ とする。この $\phi_g, \psi_g$ 及び解適合により得られた制御関数 $\phi_a, \psi_a$ を組み合わせ、新たに制御関数を式(27)のように決定する。

$$\begin{aligned}\phi &= 0.3\phi_g + \phi_a \\ \psi &= 0.3\psi_g + \psi_a\end{aligned}\quad (27)$$

この制御関数の操作により形成した解適合格子を図19に示し、その格子における圧力分布の等高線を図20に示す。

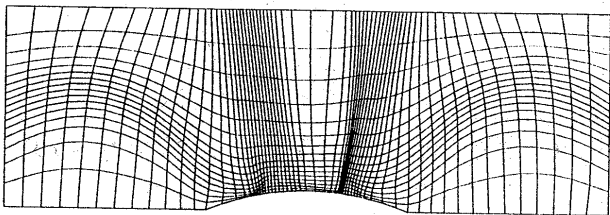


図19 制御関数の操作による解適合格子 I (65 × 17)

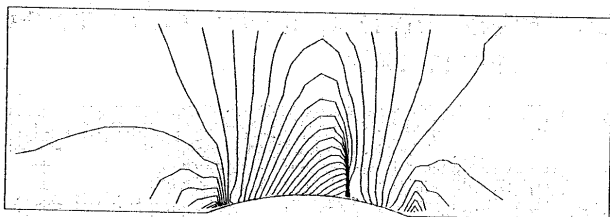


図20 制御関数の操作を行った解適合格子 I による解(等圧力線図  $\Delta p = 0.02$ )

この場合 $\xi$ 方向は改善されるものの、やはり $\eta$ 方向は初期格子の情報が失われてしまう結果となった。そこで隆起部の両側において、格子を必要とする下部境界へ戻すように $\eta$ 方向の制御関数について修正を試みる。

まず、隆起部の両側において、 $\eta$ 方向の格子線は初期格子のまま制御を行わず $\xi$ 方向の格子線のみ制御を行った。この制御関数の操作による解適合格子を図21に示す。

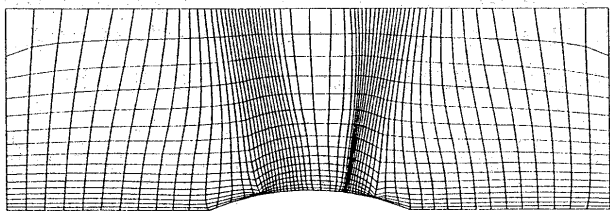


図21 制御関数の操作による解適合格子 II (65 × 17)

次に隆起部の両側において、擬似関数をさらになめらし微小な物理変化を取り去ることにより、格子を衝撃波部にのみ集中するようにした。この擬似関数の操

作により形成した解適合格子を図22に示す。

いずれにしても擬似関数のスムージングにより隆起部前後端部で淀み点圧がなまってしまい、そこでの格子の集中がなくなってしまう。少なくとも単なるスムージングによる擬似関数の構成には改良の余地がある。

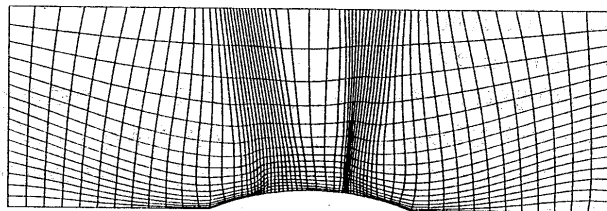


図22 擬似関数の操作による解適合格子 (65 × 17)

## 5. 結論

本論文では楕円型解適合格子法を圧縮性流れに適用し、発展させた。その結果次のような結論を得た。

1. 重み関数に流れの物理量 $f$ の擬似関数 $\tilde{f}$ を含ませることにより、より効果的な解適合格子を構成することが可能となった。
2. 制御関数に初期格子の情報を取り入れることにより、解適合格子をさらに発展させた。

現時点においては適用例が少ないこともあり、試行錯誤により格子を形成している。特に結論2においてまだまだ研究の余地があると考えられる。

## 参考文献

- 1) J.F.Thompson, Z.U.A.Warsi, and C.W.Mastin, *Numerical Grid Generation*, North-Holland, (1985)
- 2) K.Matsuno and H.A.Dwyer, *Adaptive Methods for Elliptic Grid Generation*, JCP Vol.72(1988)40-52
- 3) 松野謙一, H.A.Dwyer, 楕円型方程式を用いた解適合格子生成法とその応用, 第19期日本航空宇宙学会講演会論文集, (1988)
- 4) P.D.Thomas and J.F.Middlecoff, *Direct Control of the Grid Point Distribution in Meshes Generated by Elliptic Equations*, AIAA J., Vol.18(1980),652