

航空宇宙技術研究所 山本稀義  
電気通信大学 細川巖、生出伸一

Direct Numerical Simulation of Incompressible Homogeneous Isotropic Turbulence  
Using NWT

by

Kiyoshi Yamamoto<sup>1</sup>, Iwao Hosokawa<sup>2</sup> and Shin-ichi Oide<sup>2</sup>

<sup>1</sup>National Aerospace Laboratory

<sup>2</sup>The University of Electro-Communications

Abstract

Direct numerical simulation (DNS) of incompressible homogeneous isotropic turbulence is conducted by the use of the Numerical Wind Tunnel (NWT), a parallel computer introduced to NAL last year. The DNS with  $512^3$  mesh points in space can be calculated by the NWT with 128 processor elements. The fully developed turbulent fields, velocity and temperature, are obtained by the DNS which used the Fourier spectral method for the calculation of the Navier-Stokes equation and the diffusion equation. The energy spectrum obtained takes the  $k^{-5/3}$  power law in the inertial subrange. The probability distribution function has the Gaussian distribution for the velocity, but exponential functions for the various velocity derivatives. The intense vorticity concentrates into short tube-like regions in space, but the temperature gradient into sheet-like regions.

Keywords : DNS, isotropic turbulence, parallel computer, spectral method.

1. はじめに

計算機の進歩によって流体力学に於ける計算流体力学 (CFD) の役割は益々重要になってきている。これは乱流についても同様であって、従来の実験的研究に加えて、数値シミュレーションは乱流研究の重要な源となってきている。計算方法についても従来は乱流モデルを使用した差分法が中心であったが、現在では計算精度の良いスペクトル法による直接数値シミュレーション (DNS) が多くの成果を挙げる様になってきた。これは主として最近の計算機の飛躍的發展による。スーパーコンピュータは現在ベクトル計算機から並列計算機へと発展しているが、その結果、計算速度もGFLOPSからTFLOPSへと進展しようとしている。航空宇宙技術研究所では昨年新しい並列計算機である数値風洞 (Numerical Wind Tunnel: NWT) を導入したが、その理論的ピーク速度は236 GFLOPSになっている。ここではこれを用いて行われた減衰一様等方性乱流のDNSについて述べる。

一様等方性乱流のDNSはしばしばその時点の最先端のスーパーコンピュータを用いて挑戦されてきた

研究課題である。それらの中で、Kerr(1885)<sup>1)</sup>は $128^3$ 格子点の強制乱流のDNSを行い、テイラーのマイクロスケールレイノルズ数、 $R$ が83までの乱流速度場を計算した。また、山本と細川(1988)<sup>2)</sup>は同じ $128^3$ 格子点で減衰乱流のDNSを行い、 $R \sim 100$ の乱流速度場を得た。一方、Vincent & Meneguzzi(1991)<sup>3)</sup>は $240^3$ 格子点で強制乱流のDNSを行い、 $R \sim 150$ の結果を得た。さらに、最近Chen et al(1993)<sup>4)</sup>およびJiménez et al (1993)<sup>5)</sup>等は $512^3$ 格子点で強制乱流のDNSを行い、 $R \sim 200$ までの乱流速度場を計算した。これらの内で格子点数 $128^3$ でのDNSはベクトル計算機によって行われ、これより大きい格子点数のDNSは並列計算機によって行われた。この様に、乱流のDNSの主流は現在並列計算機となってきている。

2. 数値風洞 (NWT)

NWTは1.7 GFLOPSのピーク速度を持つベクトル計算機をその要素計算機 (PE) として最大 140台並列

化した並列計算機で、その理論的ピーク速度は236 GFLOPSとなる<sup>1)</sup>。しかし、現実のCFDプログラムの計算速度はこれよりはかなり小さくなる。その原因は現実の計算プログラムでは各PE間のデータ転送が頻繁に必要となるが、これはPE内だけの計算速度に比べてかなり遅いため、PE間のデータ転送の頻度に依存して計算速度は遅くなるためである。また、各PEがベクトル計算機であるので、複雑な計算プログラムについて、ベクトル化と並列化を同時に理想的に達成する事はそれほど容易ではない。本DNSでは、計算の主要部分を3次元高速フーリエ変換(FFT)が占めているので、FFTの計算について3次元空間をそれぞれベクトル化の軸、並列化の軸、FFT演算の軸と分担して計算する事によって、ベクトル化と並列化を同時に達成することが出来た。

図1は本DNSの実際の計算におけるNWTの性能測定の結果を示す。横軸の $N_{PE}$ はNWTに使用されたPE台数を表し、縦軸はDNSの時間方向の積分において単位時間ステップ進むのに必要なCPU時間(秒)である。図中のいろいろな記号はDNSに使用された格子点数を示す。また、実線は $1/N_{PE}$ の勾配を示し、これはプログラムの並列化が理想的に行われた時の性能曲線と考えられる。それぞれの計算結果は $N_{PE}$ の最大の点を除いてはほぼ実線と同じ勾配に並んでいて、この範囲では並列化はほぼ理想的に行われていると考えられる。一方、 $N_{PE}$ の最大の点のデータが直線からずれるのは、PE内の計算量に比べてPE間のデータ転送の時間が無視出来なくなるからである。以下のDNSでは $N_{PE}$ はこの直線の範囲で選ばれる。すなわち、 $128^3$ のDNSは16台のPEを使用し、 $256^3$ のDNSは64台のPEを使用して行う。また、 $512^3$ のDNSは128台のPEで可能となる。その結果、NWTによる本DNSの計算速度は53 GFLOPSとなっている。

3. 基礎方程式

流れの周期性を仮定し、速度場 $u(x, t)$ を

$$u(x, t) = \sum_k u(k, t) \exp(ik \cdot x) \quad (1)$$

とフーリエ級数展開すると、 $u(k)$ の基礎方程式はナビエ・ストークス方程式から

$$\frac{\partial u(k)}{\partial t} = -i \sum_{k'} u(k') k \cdot u(k - k') - i k p(k) - \frac{k^2}{R} u(k) \quad (2)$$

とえられる。ここではさらに、受動的スカラーとして温度場 $\theta(x, t)$ を考えるとそのフーリエ成分の方程式

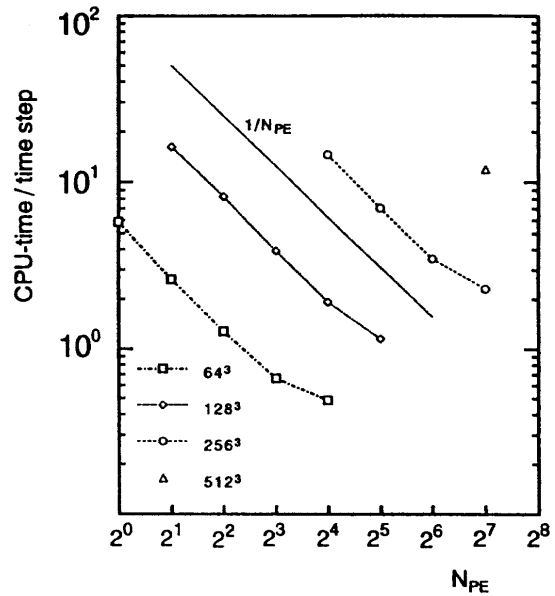


図1 DNSのプログラムによって測定されたNWTの性能  $N_{PE}$ はNWTに使用されたPE台数を表す。

は

$$\frac{\partial \theta(k)}{\partial t} = -i \sum_{k'} \theta(k') k \cdot u(k - k') - \frac{k^2}{RPr} \theta(k) \quad (3)$$

となる。ここで、 $R$ は初期の流れに基づくレイノルズ数、 $Pr$ はプラントル数である。これらの方程式はフーリエ・スペクトル法で計算されるが、その計算法の主たる特徴は(2)、(3)式のコンボリューション和を高速フーリエ変換で効率的に行うことである。乱流の計算においてはこの際に発生する aliasing 誤差を消去することが特に重要となるが、これにはシフト法を使用して消去する<sup>1)</sup>。そのため、スペクトル法は一般に差分法にくらべて計算精度が良いことが知られている。また、時間方向の積分には精度の良いRunge-Kutta-Gill法が使用される。

ここでは減衰等方性乱流を取り扱うので初期の乱流場、速度と温度の両方、を与える必要がある。これには初期の乱れのスペクトルを

$$E(k) = \frac{16}{3} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} k^4 \exp(-2k^2) \quad (4)$$

と与える。これよりレイノルズ数は $R = v_0 / k_0 \nu$ と定義される。ここで、 $v_0$ は $v_0 = \sqrt{2 \int E(k) dk}$ 、 $k_0$ は初期スペクトル $E(k)$ が最大値を持つ波数(すなわち、 $k_0=1$ )である。

(1) 式のフーリエ成分の個数はレイノルズ数  $R$  が 1000 の場合は  $256^3$  個、2000 の場合には  $512^3$  が選ばれる。この様にしてフーリエ成分で与えられた速度場は (1) 式によって物理空間に変換されるので、その結果は物理空間の同じ数の空間格子点で与えられた場合と等価である。

4. 計算結果と検討

4.1 エネルギースペクトル

図2は速度場のエネルギースペクトルの時間的発達の結果を示す。レイノルズ数  $R$  は2000である。点線は初期に与えられたエネルギースペクトル、(4)式を表す。エネルギースペクトルは時間と共に低波数領域のエネルギーが高波数領域に流れて、時間と共に発達した乱流スペクトルが形成される。そして、無次元時間  $t$  がほぼ10で高波数領域におけるエネルギースペクトルは最大になり、その後は全領域でほぼ単調に減衰する。そして、この  $t=10$  で得られたエネルギースペクトルの波数の中間領域 (波数  $k$  が2 ~ 30の範囲) で  $k^{-5/3}$  分布、コルモゴロフ・スペクトル、が観測される。しかし、その一致は必ずしも厳密ではない。この不一致はこれまでのDNSでも見られる傾向で<sup>1)</sup>、今後の問題である。しかし、この  $t=10$  で得られた速度場は発達した乱流の速度場と考えることが出来るので、これを数値解析して乱流のいろいろな力学的性質を調べてみる。

図3は温度場の分散のスペクトルの時間的発達の結果を示す。プラントル数は1と選んだ。スペクトルの発達の傾向は図2のエネルギースペクトルとはほぼ同様であるが、その発達の時間スケールはエネルギースペクトルに比べて早く、 $t=7$  で高波数領域の最も発達したスペクトルが得られている。この温度分散スペクトルについては Batchelor<sup>2)</sup> によって慣性領域で同様に  $k^{-5/3}$  分布となることが予測されている。計算結果におけるこのスペクトルの実現性は図2のエネルギースペクトルに比べて良くない。

4.2 確率分布関数

乱流の力学を記述する基本的な物理量は速度の確率分布関数である。 $t=10$  で得られた速度場と温度場のデータからいろいろな流れ場の確率分布を計算してみる。

図4は速度  $u$  の確率分布の計算結果を示す。実線はガウス分布を示す。計算結果はガウス分布と良く一致している。速度場のガウス分布については実験的にも検証されている<sup>10)</sup>。

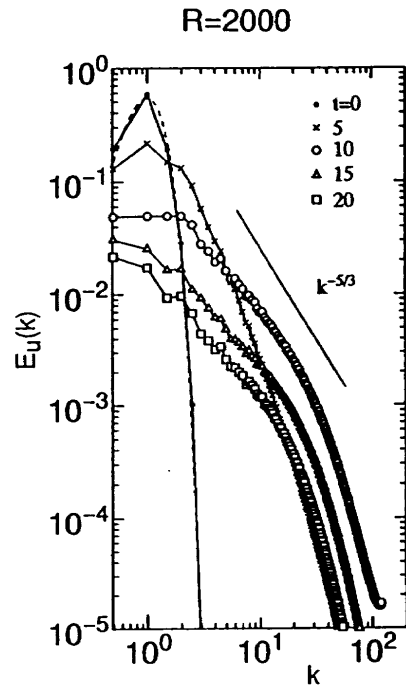


図2 エネルギースペクトルの時間的発達  $R = 2000$ 、点線は初期スペクトル(4)を表す。

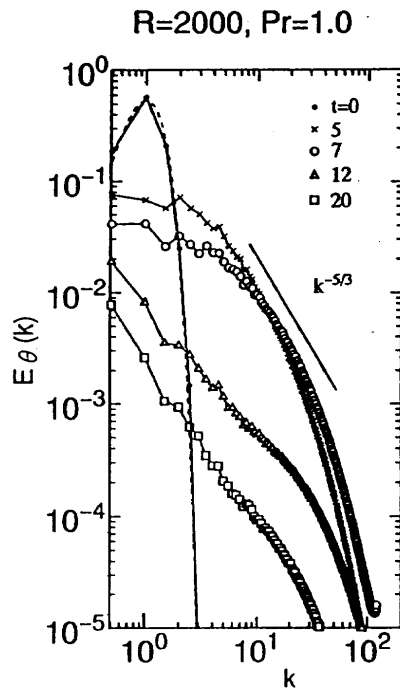


図3 温度場の分散スペクトルの時間的発達  $R = 2000, Pr = 1$ 、点線は初期スペクトル(4)を表す。

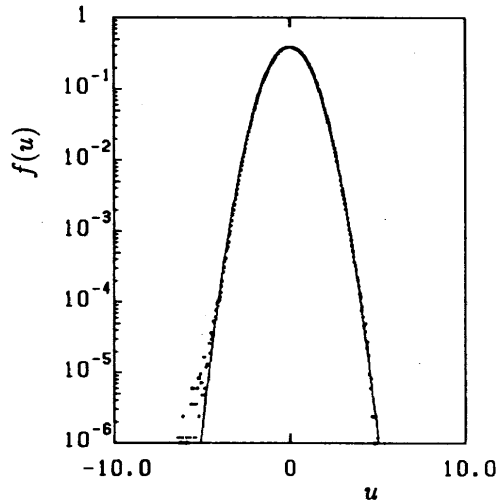


図4 速度  $u$  の確率分布関数  
 $R = 2000, t = 10$ 。  
 実線はガウス分布を示す。

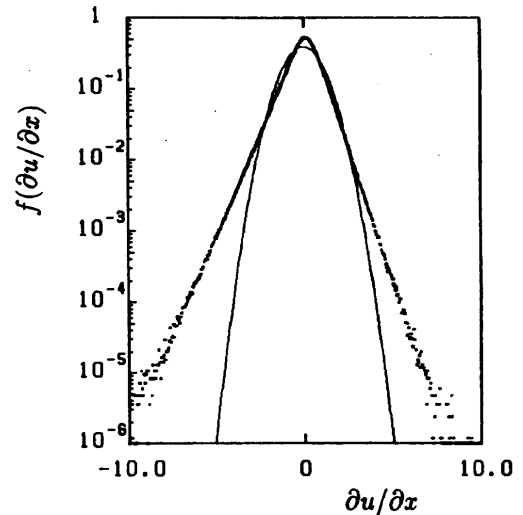


図5 速度の縦微分  $\partial u/\partial x$  の確率分布関数  
 $R = 2000, t = 10$ 。実線はガウス分布を示す。

一方、図5は速度の縦微分  $\partial u/\partial x$  の確率分布の計算結果を示す。計算結果はガウス分布とは全く異なり指数分布をしている。乱流におけるこのような指数分布は最近のDNSによって検出された結果で<sup>11), 12), 13)</sup>、乱流ではしばしば現れる分布であることが分かってきた。図5の結果の他の特徴は分布が横軸の原点について非対称で、負の領域の確率が正の領域の確率より大きくなっていることである。これは乱流におけるカスケード機構に関連している重要な性質である。他方、図6は速度の横微分  $\partial u/\partial y$  の計算結果を示す。この場合も分布は指数関数を示すが、分布は原点について対称である。また、温度場の確率分布も計算されたが、その結果はほぼガウス分布となっている（結果はここでは省略）。

#### 4.3 乱流の微細構造

乱流場の変動のデータを時空間で得られるのがDNSの大きな利点である。これを数値解析することによって、乱流場の時空間の微細構造を直接調べることが出来る。

図7は高渦度領域の空間的集中を示す計算結果で、等高線は $3.5 \langle \omega \rangle$ のレベルで描いてある。ここで $\langle \omega \rangle$ は渦度の自乗平均である。図から渦度は細長い管状の

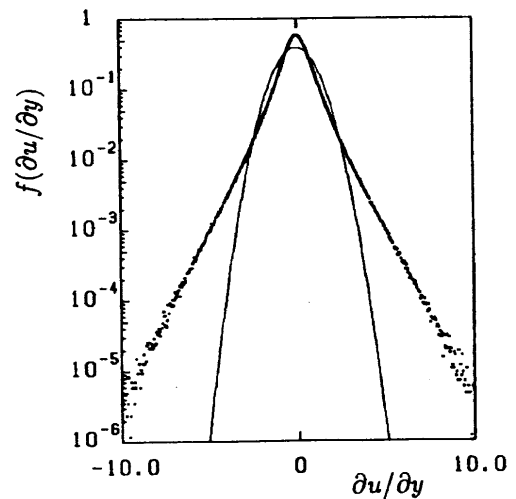


図6 速度の横微分  $\partial u/\partial y$  の確率分布関数  
 $R = 2000, t = 10$ 。実線はガウス分布を示す。



図7 高渦度領域の空間的集中する形状  
 $R = 2000, t = 10$ 。等高線は  
 $3.5 < \omega >$  の高さを示す。



図8 高渦度格子点における渦度ベクトルと速度ベクトル  
 図7の四角で囲まれた領域を拡大して高渦度領域(渦管)に含まれる格子点上で渦度ベクトルと速度ベクトルを描く。

領域に集中し、その内部が渦度の高い部分である。このような高渦度の管状の領域はしばしばワーム (worm) と呼ばれている<sup>2), 5)</sup>。ワームが渦管であることを確認するために図7の四角で囲われた部分の渦管内の格子点で渦度ベクトルと速度ベクトルを拡張して描いた結果を図8に示す。(原図では渦度ベクトルは黒い矢印、速度ベクトルは赤い矢印で区別して示されている。その結果、渦度ベクトルは比較的組織的に並び、渦管を形成するが、速度ベクトルはその方向がかなり偶然的事であることが示されている。また、渦度の集中する形状に関してはこれまで理論的に渦管<sup>14)</sup>およびシート<sup>15)</sup>が予測されているが、図7の結果は前者を支持する。

他方、図9は温度勾配 $H$ の強い部分が空間的に集中する領域を示す。ここで、 $H = \nabla\theta$  である。図から分かることは $H$ の強い領域は2次元的なシート状を形成することである。このような渦場と温度勾配の渦管およびシート状集中の力学機構はまだ必ずしも明確ではない。



図9 温度場の高勾配領域が空間的に集中する形状  
 $R = 2000, Pr = 1, t = 10$ 。等高線は  
 $3.0 < H >$  の高さを示す。

## 5. 結 び

航空宇宙技術研究所に導入された数値風洞 (NWT) を応用して減衰等方性乱流の空間格子点数が $512^3$ までのDNSを行い、乱流の速度場や温度場のエネルギースペクトルの時間的発達を調べた。また、 $t=10$ で得られた発達した乱流場を数値解析して、いろいろな乱流場の確率分布を計算した。さらに、渦度場や温度勾配の空間的集中領域を数値解析した結果、渦度場は空間的に1次元的な管状領域に集中し、温度勾配は2次元的なシート状領域に集中することが分かった。このような乱流場の空間的集中の力学機構はまだ明確には分かっていないので、今後の課題である。

## 参 考 文 献

- 1) R. M. Ker: J. Fluid Mech., 153 (1985) 31.
- 2) K. Yamamoto and I. Hosokawa: J. Phys. Soc. Japan, 57 (1988) 1532.
- 3) A. Vincent and M. Meneguzzi: J. Fluid Mech., 225 (1991) 1.
- 4) S. Chen et al: Phys. Fluids, A 5 (1993) 458.
- 5) J. Jiménez et al: J. Fluid Mech., 255 (1993) 65.
- 6) T. Iwamiya et al: to appear in Proc. Parallel CFD' 93.
- 7) C. Canuto et al: Spectral Methods in Fluid Dynamics, 1988, Springer-Verlag, New York.
- 8) Z-S. She et al: Phys. Rev. Letts., 70 (1993) 3251.
- 9) G. K. Batchelor: J. Fluid Mech., 5 (1956) 113.
- 10) A. S. Monin and A. M. Yaglom: Statistical Fluid Mechanics, Vol. 1, 2, 1975, MIT Press Cambridge.
- 11) Z-S. She et al: J. Sci. Comput. 3 (1988) 497.
- 12) I. Hosokawa and K. Yamamoto: J. Phys. Soc. Japan, 58 (1989) 20.
- 13) K. Yamamoto and T. Kambe: Fluid Dynamics Research, 8 (1991) 65.
- 14) H. Tennekes: Phys. Fluids, 11 (1968) 669.
- 15) R. Betchov: J. Fluid Mech., 1 (1956) 497.