

密度界面と衝撃波の干渉過程のシミュレーション

村田 喜昭 (埼玉大院)、小原 哲郎、大八木 重治 (埼玉大工)

Numerical Simulation of Interaction Between Shock Wave and Density Interface

by

Yoshiaki MURATA, Tetsuro OBARA, and Shigeharu OHYAGI

Department of Mechanical Engineering, Saitama University
Shimo-Ohkubo 255, Urawa, Saitama 338, Japan

ABSTRACT

Interactions of the planar shock wave propagating along a backward-facing step region with a density interface are simulated numerically. The time-dependent solutions of the Euler equations were obtained by using an explicit predictor-corrector TVD scheme. A flow field consists of two regions, one is the backward-facing step region filled with gas-2, the other is the region filled with gas-1 above it. A planar shock propagating in gas-1 propagates along the backward-facing step and interacts with the interface separating these two gases with different densities. Two general cases of interface are considered, which are called as a slow/fast interface and a fast/slow interface. As parameters of calculations, a density ratio of two gases and a shock Mach number were selected. In the case of slow/fast interaction, a shock transmitted in a light gas propagates with higher propagation velocity and, behind the shock, a large vortex is created which mixes two gases. For the fast/slow interaction, a shock transmitted in a heavy gas forms an oblique shock wave whose angle is determined by the density ratio and the interface is more stable in comparison with slow/fast interaction.

1. はじめに

密度の異なる異種気体界面における衝撃波と界面の挙動については、Richtmyer-Meshkov 不安定と呼ばれる流体力学的不安定現象の一つとして、実験的、理論的研究の対象となっている。Zabusky et al.¹⁾は、平面衝撃波と衝撃波に対して角度 θ だけ傾いた密度界面との干渉過程を、slow/fast、fast/slow の場合についてそれぞれ数値的に明らかにした。Kuhl et al.²⁾は、shock tube の下壁に沿って分布した Freon-12 の層と、その上方に満たした空気中を伝ばしてきた衝撃波との干渉に対する実験と数値計算を行った。これらの研究においては、密度界面における密度勾配と衝撃波によってもたらされる圧力勾配とによる、いわゆる baroclinic effect によって生じる流れの不安定性と二流体の混合過程を明らかにすることを目的として

いる。

衝撃波と密度界面が干渉する場合の流れ場の物理的状态は、入射衝撃波の伝ばマッハ数 M_s 、異種気体の密度比 η 、及び密度界面の形状によって特徴づけられる。本研究では、界面の形状を Fig.1 のように設定し、後ろ向きステップを通過することによって回折した衝撃波と密度界面の干渉過程を数値的にシミュレートし、二流体の混合過程を明らかにすることを目的とする。計算のパラメータとして、入射衝撃波の伝ばマッハ数 M_s と異種気体の密度比 η を選んだ。

2. 計算方法

2.1 問題の定式化

Fig.1 に計算する流れ場の形状を示す。伝ばマッハ数 M_s の衝撃波が gas-1 (密度 ρ_1) 中を左から右へ伝ば

していき、後ろ向きステップ領域に入射される。ステップ領域は gas-2(密度 ρ_2)で満たされており、界面を衝撃波と垂直に設定する。界面には最初、無限に薄い隔膜が存在するものと仮定し、密度を不連続に変化させる。ここで、密度比 η は $\eta = \rho_2/\rho_1$ によって与える。

気体は比熱一定の理想気体であると仮定し、かつ gas-1、gas-2 には比熱比の等しい($\gamma = 1.4$) 仮想の気体を考える。支配方程式は二次元非定常オイラー方程式系であり、保存形で次のように表される。

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

ここで、

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ m \\ n \\ E \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} c_1 m \\ c_2 m \\ p + m^2/\rho \\ mn/\rho \\ m(E+p)/\rho \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} c_1 n \\ c_2 n \\ mn/\rho \\ p + n^2/\rho \\ n(E+p)/\rho \end{bmatrix} \quad (2)$$

ρ : 総密度、 u : x -方向速度成分、 v : y -方向速度成分、 p : 圧力、 ρ_i : i 成分の密度、 c_i : i 成分の質量分率、 $m = \rho u$ 、 $n = \rho v$ 。また、 E は単位体積当たりの全エネルギーで、

$$E = \frac{p}{(\gamma-1)} + \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2) \quad (3)$$

である。

実際の計算には、これらの式を衝撃波前方の gas-1 の物理量で無次元化した式を用いる。ここで、支配方程式中には特性長さが含まれていないので、シミュレーションの結果は物理的に scale free である。

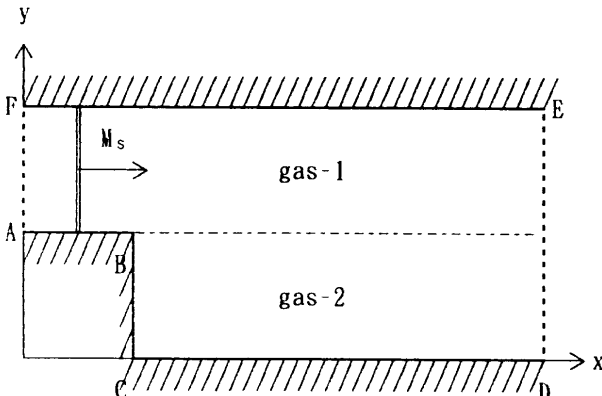


Fig.1 Schematic of the Computational Domain

2.2 数値解法

支配方程式の差分化には、Yeeによる陽的な Predictor Corrector TVD 法³⁾を用いた。以下に差分式を示す。

$$\mathbf{U}_{j,k}^{(1)} = \mathbf{U}_{j,k}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\mathbf{F}_{j,k}^n - \mathbf{F}_{j-1,k}^n \right) - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left(\mathbf{G}_{j,k+1}^n - \mathbf{G}_{j,k}^n \right) \quad (4)$$

$$\mathbf{U}_{j,k}^{(2)} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{U}_{j,k}^n + \mathbf{U}_{j,k}^{(1)} \right) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(\mathbf{F}_{j+1,k}^{(1)} - \mathbf{F}_{j,k}^{(1)} \right) - \frac{\Delta t}{2\Delta y} \left(\mathbf{G}_{j,k}^{(1)} - \mathbf{G}_{j,k-1}^{(1)} \right) \quad (5)$$

$$\mathbf{U}_{j,k}^{n+1} = \mathbf{U}_{j,k}^{(2)} + \left(\mathbf{R}_{j+\frac{1}{2}}^{(2)} \Phi_{j+\frac{1}{2}}^{(2)} - \mathbf{R}_{j-\frac{1}{2}}^{(2)} \Phi_{j-\frac{1}{2}}^{(2)} \right) + \left(\mathbf{R}_{k+\frac{1}{2}}^{(2)} \Phi_{k+\frac{1}{2}}^{(2)} - \mathbf{R}_{k-\frac{1}{2}}^{(2)} \Phi_{k-\frac{1}{2}}^{(2)} \right) \quad (6)$$

ここで、 $\Phi_{j+\frac{1}{2}}$ は数値粘性項を表すベクトルであり、その l 番目の要素 $\phi_{j+\frac{1}{2}}^l$ は次式のように表される。

$$\phi_{j+\frac{1}{2}}^l = \frac{1}{2} [\psi(v_{j+\frac{1}{2}}^l) - (v_{j+\frac{1}{2}}^l)^2] (\alpha_{j+\frac{1}{2}}^l - \hat{Q}_{j+\frac{1}{2}}^l) \quad (7)$$

$$v_{j+\frac{1}{2}}^l = \frac{\Delta t}{\Delta x} a_{j+\frac{1}{2}}^l \quad (8)$$

$$\alpha_{j+\frac{1}{2}}^l = \mathbf{R}_{j+\frac{1}{2}}^{-1} \left(\mathbf{U}_{j+1,k} - \mathbf{U}_{j,k} \right) \quad (9)$$

$$\psi(z) = \begin{cases} |z| & |z| \geq \delta \\ (z^2 + \delta^2)/2\delta & |z| < \delta \end{cases} \quad (10)$$

$$\delta = \epsilon (|u| + |v| + c)_{j+\frac{1}{2}} \quad (11)$$

(11) 式中の ϵ は経験的に決められる小さな正のパラメータで、一般的には $0.01 \leq \epsilon \leq 0.2$ の範囲で選ばれる。本計算では、 $\epsilon = 0.1$ とした。また $\hat{Q}_{j+\frac{1}{2}}^l$ は制限関数であり、幾つか提案されているが、本計算では次のものを用いた。

$$\hat{Q}_{j+\frac{1}{2}}^l = \min \text{mod} \left(\alpha_{j-\frac{1}{2}}^l, \alpha_{j+\frac{1}{2}}^l \right) + \min \text{mod} \left(\alpha_{j+\frac{1}{2}}^l, \alpha_{j+\frac{3}{2}}^l \right) - \alpha_{j+\frac{1}{2}}^l \quad (12)$$

また、TVDによる差分式の中に見られる $j + \frac{1}{2}$ 等の添字を持った物理量、つまりセル境界における物理量は Roe average によって与える。

計算格子は均一な正方格子で、格子サイズは $\Delta x = \Delta y = 0.0025$ である。また、格子数はステップ内も含めて x -方向に 400 セル、 y -方向に 200 セルである。ただし、実際の計算ではステップの内部は計算していない。

境界条件は、Fig.1 中の FA を流入境界、ED を流出境界とし、流入境界はランキン-ユゴニオの式から得られるマッハ数 M_s の衝撃波背後の物理量で固定する。それ以外の境界はスリップ壁である。

2.3 計算条件

前述のように、本計算の本質的なパラメータは密度比 η と入射衝撃波マッハ数 M_s である。

入射衝撃波マッハ数については、Klein et al. の計算⁴⁾ を参考にして設定した。90°コーナーにおける衝撃波の回折については、多くの研究者によって実験的、数値的に研究されてきた。この流れ場は、比熱比 γ を一定とすると、主に衝撃波マッハ数 M_s によって支配され、Klein et al.⁴⁾ によれば、 M_s の値によって Fig.2 のような三つの場合に分類することができる。ここで、 $\gamma = 1.4$ である。

M_s が 1 より僅かに大きい (A) の場合、流れは全域で亜音速である。(B) の場合、流入してくる流れは亜音速であるが、ステップによる膨張等によって部分的に超音速の領域が存在する。この流れ場は、幾つかの二次衝撃波系の出現によって特徴づけられる。また、(C) の場合には入射衝撃波背後の流れが超音速となり、 M_s を変化させても流れ場の形態はそれほど大きく変化しない。

本計算においても、 M_s によって同様に流れ場が変化するものと考えられるため、上述の三つの場合について計算を行った。各々の M_s に対して slow/fast ($\eta < 1$) と fast/slow ($\eta > 1$) の場合をそれぞれ計算した。計算条件を表-1 にまとめる。

表-1 計算条件

| M_s | η | |
|-------|-----------|-----------|
| | slow/fast | fast/slow |
| 1.2 | 0.25 | 5.0 |
| 1.4 | 0.25 | 5.0 |
| 1.6 | 0.1, 0.25 | 5.0, 10.0 |
| 2.0 | 0.25 | 5.0 |
| 4.0 | 0.1 | 5.0 |
| 6.0 | 0.1 | 5.0 |

3. 計算結果及び考察

まず結果を見ると、計算を安定化させるために導入されている数値粘性の影響によって、密度界面等の勾配の急な領域が数値的に弛緩し、厚みを有しているのがわかる。そのため、界面上に現れると思われる不安定性等の微細な構造については、あまり詳細には捉えていないと思われる。得られた範囲で結果をまとめると、次のようになる。

3.1 slow/fast の場合

Fig.3 は slow/fast の場合の等密度線図である。gas-2 の密度が小さいため、等密度線図上では gas-2 中へ入射した衝撃波面が表されていないが、音速の違いに比例した速さで先行している。

b.、c.、d.、e. の場合の流れ場は遷音速であり、ステップ背後の膨張によって slipstream に沿って超音速の領域が現れる。この場合の流れ場は、Fig.2-(B) の場合に相当する。入射衝撃波背後の界面は大きく湾曲し、上方から流入する gas-1 が gas-2 を巻き込むように大きな渦を形成して混合していく。形成される渦は、この範囲の M_s であれば M_s が大きいほど、また η が小さいほど規模が大きくなる。この渦とステップの間には圧縮波が形成され、渦によってステップの角の方へ押される気体を減速させている。Fig.4 を見ると、d. と e. の場合にはこの圧縮波の背後に超音速領域が存在するが、実際には、壁面のごく近傍では粘性の影響が大きいため、超音速領域の形状や大きさはこれとは異なったものになると思われる。e. の場合には、渦の周りの超音速流中に slipstream とある角度をなすようにして二次衝撃波が形成されている。また、d. と e. の場合に見られる湾曲した界面の直上に渦に沿って形成される衝撃波は、入射衝撃波が下壁で反射した際の反射波によるものである。

a. の場合流れは全域で亜音速であり、Fig.2-(A) の場合の流れ場に相当する。この場合には、ステップにより近い位置にステップに付着するようにして渦が形

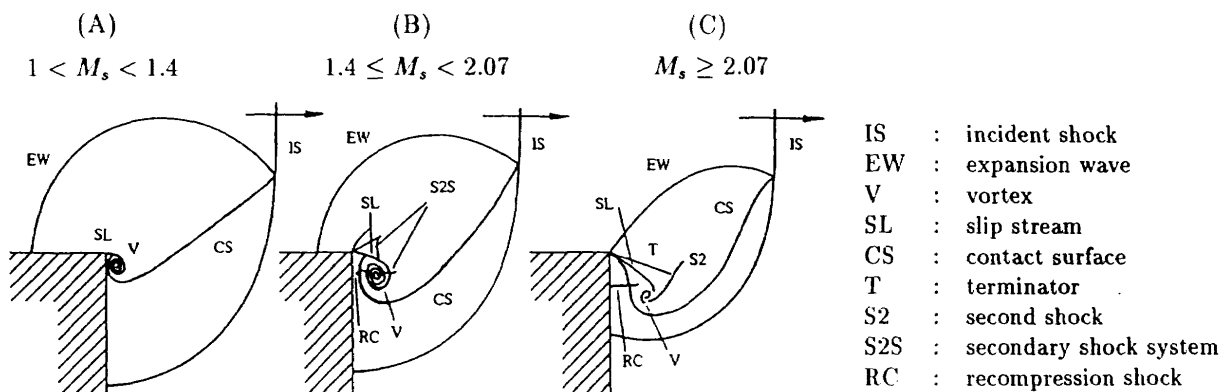
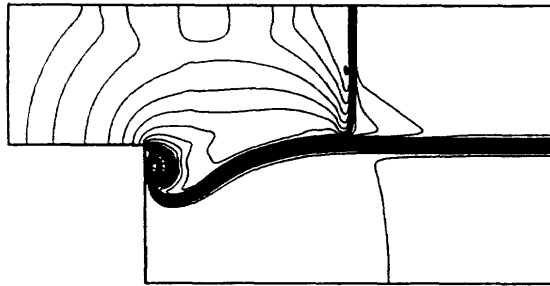


Fig.2 Classification of Shock Wave Diffraction by Klein et al.⁴⁾

成され、渦とステップの間に圧縮波は形成されていない。また、渦の成長は前述の遷音速の場合に比べて緩やかであり、時間が経過してもほぼ同じ位置に停滞している。

f.、g. の場合には入射衝撃波背後の流れが超音速であるため、ステップの角から発生する膨張波がステップの上流に伝わっていない。この場合の流れ場は

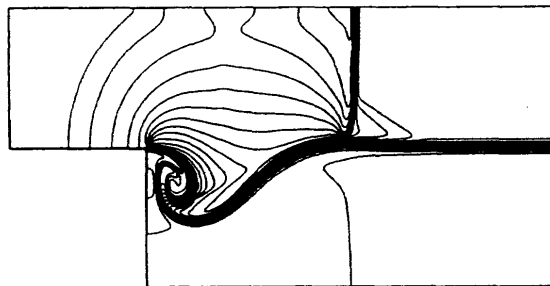
Fig.2-(C) の場合に相当する。亜音速の場合と遷音速の場合に形成されたような大規模な渦構造は形成されず、混合は主に界面が下壁に衝突した後に起こるものと思われる。また f. と g. を比較すると、二次衝撃波の形成される位置や湾曲した界面の形状等がほぼ一致しており、この場合の流れ場の形態は、 M_s が変わってもほとんど変化しないと考えられる。



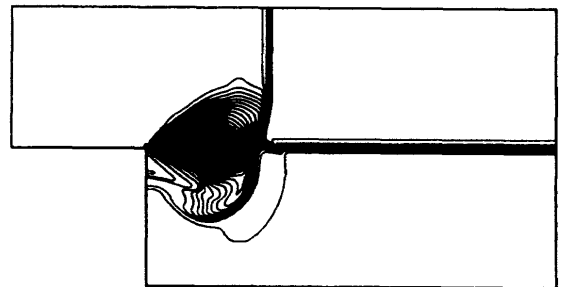
a. $M_s=1.2, \eta=0.25, \bar{t}=0.342$



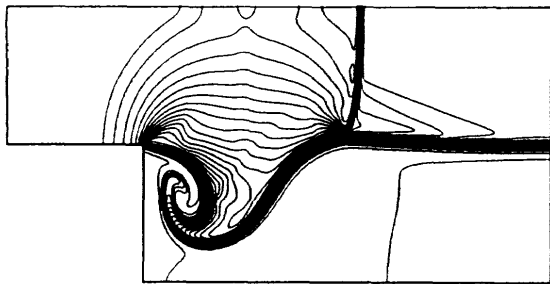
e. $M_s=2.0, \eta=0.25, \bar{t}=0.240$



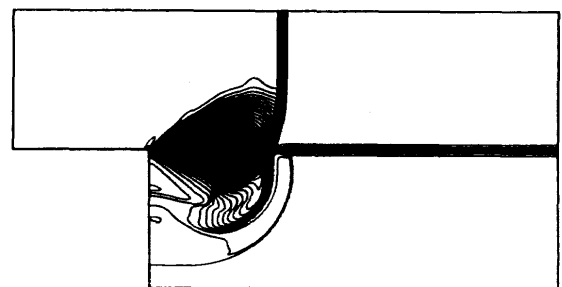
b. $M_s=1.4, \eta=0.25, \bar{t}=0.294$



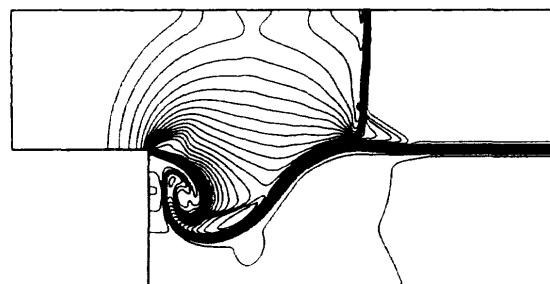
f. $M_s=4.0, \eta=0.1, \bar{t}=0.0630$



c. $M_s=1.6, \eta=0.1, \bar{t}=0.266$



g. $M_s=6.0, \eta=0.1, \bar{t}=0.0459$



d. $M_s=1.6, \eta=0.25, \bar{t}=0.269$

Fig.3 Density Contours for slow/fast Interactions

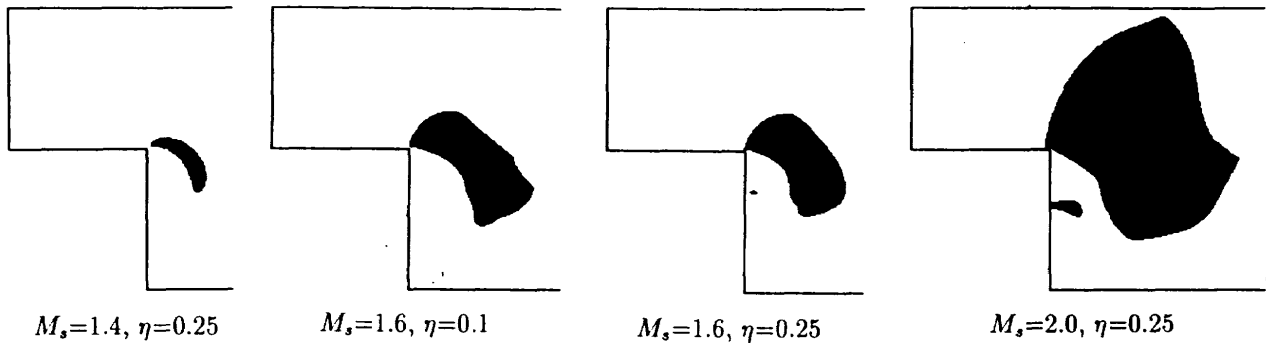


Fig.4 Supersonic Regions for slow/fast Interactions

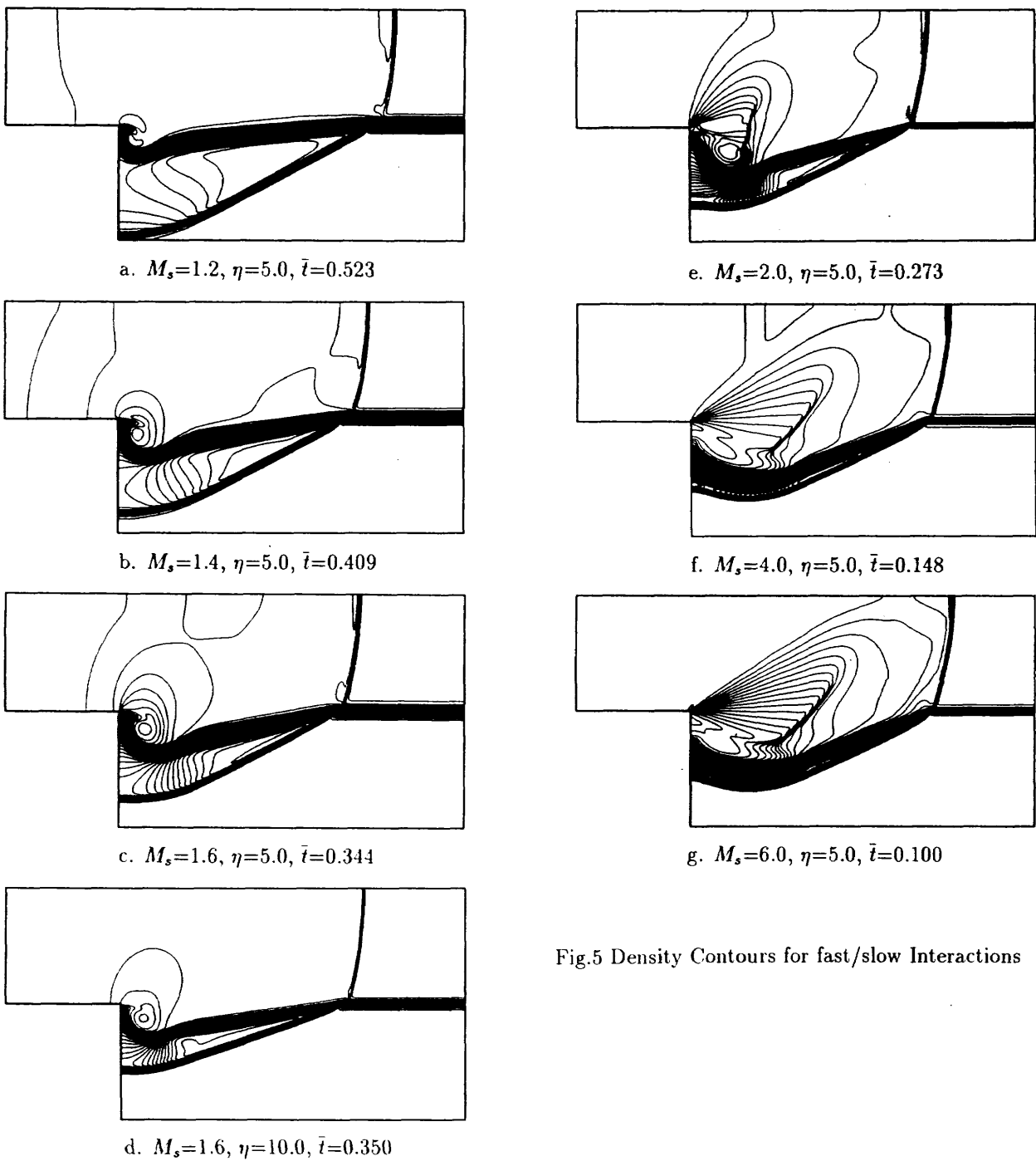


Fig.5 Density Contours for fast/slow Interactions

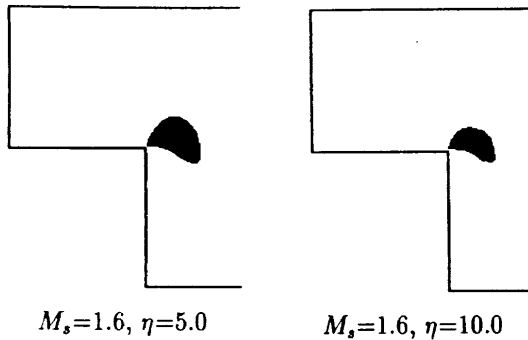


Fig.6 Supersonic Regions for fast/slow Interactions

3.2 fast/slow の場合

Fig.5は fast/slow の場合の等密度線図である。gas-2 の音速が gas-1 の音速よりも小さいため、gas-2 中に斜め衝撃波が形成される。

a. 及び b. の場合、流れは全域で亜音速であり、Fig.2-(A) の場合に相当する。ステップの角部に付着するようにして渦が形成され、この渦によって界面の一部が湾曲している。 $M_s=1.4$ の場合に注目すると、先の slow/fast の場合には流れ場は遷音速であり、ステップ背後に超音速領域が一部存在したが、fast/slow の場合には流れは全域で亜音速となっている。これは、slow/fast の場合に比べて fast/slow の場合は界面の湾曲が小さく、ステップ背後で気体が十分に膨張できないためであると考えられる。

c.、d.、e. の場合の流れ場は遷音速であり、Fig.6 に示すように、ステップの背後に形成される渦の上方で流れが超音速となっている。しかし、 $M_s=1.6$ の場合の流れ場と、全域亜音速である a. 及び b. の場合の流れ場との間には何ら明確な差異はなく、 $M_s=1.6$ の場合の流れ場は、むしろ亜音速の場合の流れ場に近い形態であるように思われる。一方 $M_s=2.0$ の場合には、渦に接するようにして二次衝撃波が形成されており、Fig.2-(B) の場合に相当する流れ場となっている。

f.、g. の場合は入射衝撃波背後の流れが超音速であり、Fig.2-(C) の場合の流れ場に相当する。先の slow/fast の場合と同様に、大規模な渦構造は形成されておらず、また f. と g. を比較すると、二次衝撃波

の形成される位置等、流れ場の形態がほぼ一致しているのがわかる。

fast/slow の場合、slow/fast の場合に比べてステップ角から発生する渦の成長が抑えられており、界面は slow/fast の場合ほど大きく湾曲できない。そのため、混合は主に衝撃波が下壁に反射した後、反射波によって引き起こされると考えられる。

4. まとめ

ステップを通過する衝撃波と密度界面の干渉過程を数値的にシミュレーションした。結果をまとめると次のようになる。

1. slow/fast の場合も fast/slow の場合も、流れ場は M_s の値によって三つの場合に分類することができる。
2. fast/slow の場合の密度界面の湾曲は slow/fast の場合に比べて小さい。
3. slow/fast の場合も fast/slow の場合も、流れ場が遷音速になる場合が最も混合に適している。

参考文献

- 1) Zabusky N.J., Samtaney R., Yang X., Chern I-L., "Vorticity in shock-accelerated density-stratified interfaces: Deposition and intermediate time evolution of coherent structures", Proc. 18th ISSW, 1992, Springer-Verlag, pp.19-28.
- 2) Kuhl A.L., Reichenbach H., Ferguson R.E., "Shock interactions with a dense-gas wall layer", Proc. 18th ISSW, 1992, Springer-Verlag, pp.159-166.
- 3) Yee H.C., "Upwind and symmetric shock-capturing schemes", NASA TM-89464, 1987.
- 4) Kleine H., Ritzerfeld E., Grönig H., "Shock wave diffraction at a 90° corner-Results of a combined numerical/experimental analysis", 平成5年度衝撃波シンポジウム講演論文集, 1994, pp.425-428.