

マルチトランスピュータシステムにおける 2次元非圧縮性流れの並列計算

小幡正規*, 鈴木智博**, 里深信行*

Parallel Computation for Two Dimensional Incompressible Flow on Array of Transputers

by

Masanori Obata, Toshihiro Suzuki and Nobuyuki Satofuka
Kyoto Institute of Technology

Abstract

The two-dimensional incompressible Navier-Stokes equations are solved on a distributed memory parallel computer. The Poisson solver based on a modified successive over-relaxation (SOR) method is implemented on an array of 16 transputers (T805), and it is applied to solve the incompressible Navier-Stokes equations in terms of the vorticity-stream function formulation. The method of lines approach using a rational Runge-Kutta time integration scheme is adopted to solve the vorticity transport equation. As a parallelizing strategy, the domain decomposition technique is used to solve the partial differential equation on a structured grid. The result of the parallelized Poisson solver for 129x129 grid points gives high speedup of 15.7 and efficiency of 0.98 of computations on 16 PEs. In the computation of the incompressible Navier-Stokes equations we get an almost linear speedup of approximately 15.96 and corresponding efficiency 0.998 is obtained through the present implementation of the parallel algorithm for 16 transputers.

1. まえがき

近年, 計算流体力学の分野においては, 計算対象の複雑形状化および問題の複雑化などにより大規模な数値シミュレーションの必要性が急速に高まり, 並列計算機の利用によりその計算速度の向上をはかろうとする研究が盛んに行われている。また, プロセッサ単体の高速化にも限界が見え始め, コンピュータメーカー各社も並列型のスーパーコンピュータの開発に力を入れている。

有限差分法などの構造格子を用いる場合の並列化手法としては, 計算格子をプロセッサの数だけの小領域に分割する領域分割法⁽¹⁾⁽²⁾を用いることが一般的である。圧縮性流れの計算などにおいてはこの領域分割法は並列化のための非常に有効な手段である。非圧縮性流れの数値解析には1つ以上のポアソン方程式を解かねばならない。ポアソン方程式の解法としては主に緩和法による反復解法を用いるが, その1反復あたりの計算量が少ないため, 相対的に通信の負荷が重くなりあまり並列化の効率は期待できない。また, 並列化しても計算の内容がシリアル計算と変わらないよう

にするためにRed-Blackなどの多色の格子点を使ったSOR法が用いられるが, この方法では, 通信されるべきデータ量は変わらないものの, 通信の回数が増えるために並列化の効率の低下を招く恐れがある。

そこで, 本研究ではポアソン方程式の反復解法の並列化手法と本論分で提案する並列化反復解法の非圧縮性流れの解析への適用について述べる。

2. ポアソン方程式の並列化手法

ポアソン方程式の並列化には主にRed-Black型の逐次過緩和(Successive Over-Relaxation;SOR)法が用いられるが, 本研究では計算格子を図1のように1方向のみに分割し, 図2に示す方法でSORの計算を行う。図1において各領域間は互いに1点だけ重なっており, ●は各プロセッサにおいて計算される点であり, また○は領域分割により生じる領域間の境界であり, プロセッサ間のデータ通信により与えられる。本手法では, 各プロセッサの計算領域は左右の2つにさらに分割され, 4段階を経て1反復とする。1段階目では左半分の緩和計算, 2段階目は左部分の重複領域を左側プロセッサへ送信し, 同様に右境界のデータを受け取る。3段階目では右半分の計算, 4段階目で右側の

* 京都工芸繊維大学, ** 京都工芸繊維大学大学院

送信と左境界の受信を行う。収束の判定は反復段階ごとに各計算領域ごとの残差を合計し、全計算領域の平均二乗残差により行っている。図2の○はk段階の数値、●はk+1段階の値を持つ点であることを示している。Red-Black型のSOR法と比較すると、通信量は等しいが、送信・受信をそれぞれ1回と数えた場合の通信回数が半分となるために通信による並列化効率の劣化が改善されると考えられる。

3. 並列計算機

用いる並列計算機は、16台のトランスピュータからなるTFSである。図3にTFSの概要を示す。

ルートにホストコンピュータと接続のためのトランスピュータが置かれるが、本研究ではルートトランスピュータは計算には用いずにホストコンピュータとTFSとの接続のインターフェースとしてのみ使用している。TFSでは、任意のトランスピュータ間の結合をソフトウェアから記述できるが、ここでは、リング型の結合としている。用いたトランスピュータは、クロック数25MHzのT805が16台である。T805のピーク性能は27.5MFLOPSで、4本の通信速度20Mbpsのシリアルリンクで互いに接続される。1台あたりの主記憶容量は、2Mbyteである。

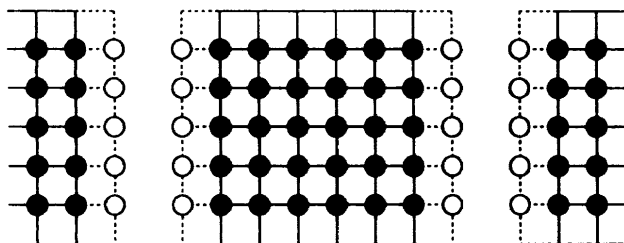


図1 計算格子の分割

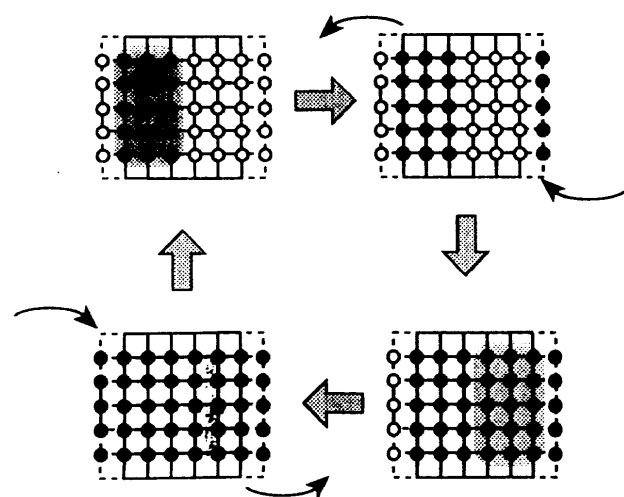


図2 並列化SOR法

4. ポアソン方程式の並列計算

本並列化SOR法の検定問題として、2次元のデカルト座標においてポアソン方程式の計算を行う。

用いたポアソン方程式は2次元のデカルト座標(x,y)において、

$$\nabla^2\phi = f(x,y) \tag{4.1}$$

と表されるが、ここで生成項f(x,y)は、

$$f(x,y) = -\sin x - \cos y \tag{4.2}$$

とする。このとき式(4.1)の解析解は

$$\phi = \sin x + \cos y \tag{4.3}$$

のようになる。

計算領域は $0 \leq x,y \leq 2\pi$ とし、初期値として計算領域全体においてfの値を0とする。境界はディリクレ境界として式(4.3)で与えられる解析解で固定する。

格子点数は33x33, 65x65 および 129x129 の3通りについて、プロセッサ数は1, 2, 4, 8 および 16 の5通りについてそれぞれ計算時間の測定を行う。収束条件は、 ψ の平均二乗残差が 10^{-5} 未満になることとし、計算時間の測定は、反復計算の開始から収束解が得られるまでとする。並列化によりどのように計算が高速化するかを測るために加速比を導入する。加速比Spは次式で定義される。

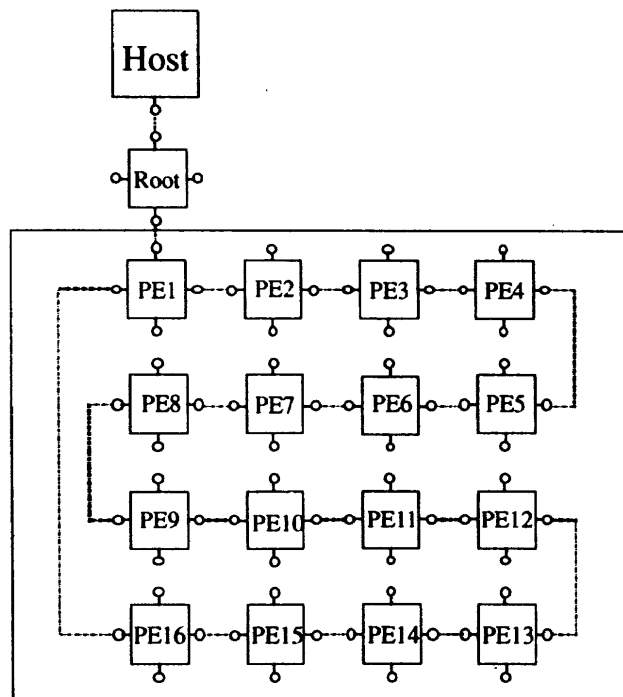


図3 TFSの概要

$$S_p = T_1 / T_p \quad (4.4)$$

ここで、 T_1 および T_p は 1 および p プロセッサで要する計算時間である。

図4 および表. 1 に得られた加速比を示す。格子点数が 33x33 の場合は 1 プロセッサあたりで計算される格子点数が少なく、計算される格子点の数と通信される格子点の数が 1 : 1 になる最も通信の負荷の高い場合であるが、このときは 16 プロセッサで 12.76 倍の加速比が得られている。格子点数が 65x65 および 129x129 の場合では約 15.7 倍の加速比ではほぼプロセッサ数に対して比例して加速比が増加していくことがわかる。実際の流れの数値シミュレーションに用いられる格子点数は 129x129 以上であることから本並列化 SOR 法がポアソン方程式の並列計算に対して有効な手法であることが確認できる。

また、格子点が少ない場合には最適過緩和係数が小

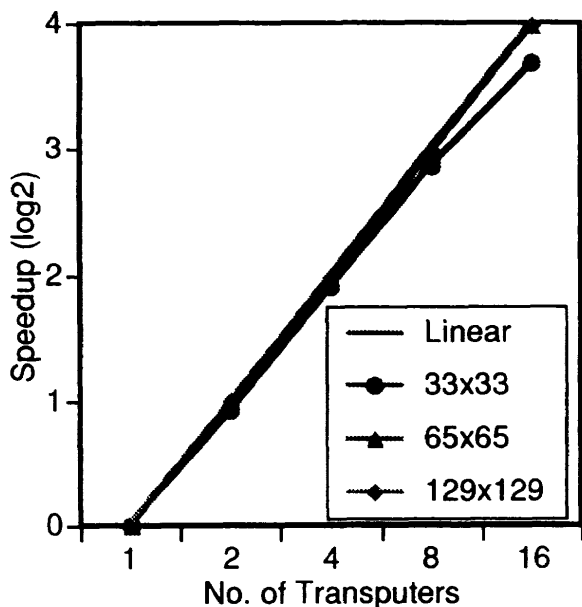


図4 加速比 (ポアソン方程式)

表1 加速比 (ポアソン方程式)

No. of Transputers	33x33	65x65	129x129
1	1.00	1.00	1.00
2	1.90	1.99	2.00
4	3.76	3.94	3.98
8	7.26	7.86	7.90
16	12.76	15.65	15.67

さくなっていくという傾向があるが、これは分割された計算領域を通常の SOR 法で計算した場合も同様である。図5は、格子点数 129x129 の計算領域でポアソン方程式を通常の SOR 法と並列化 SOR 法でプロセッサの数だけ 1 方向に計算格子を等分割した場合の最適過緩和係数の変化を示したものである。本並列化 SOR 法では単一領域で計算を行う場合と同じ最適過緩和係数を使用できることがわかる。

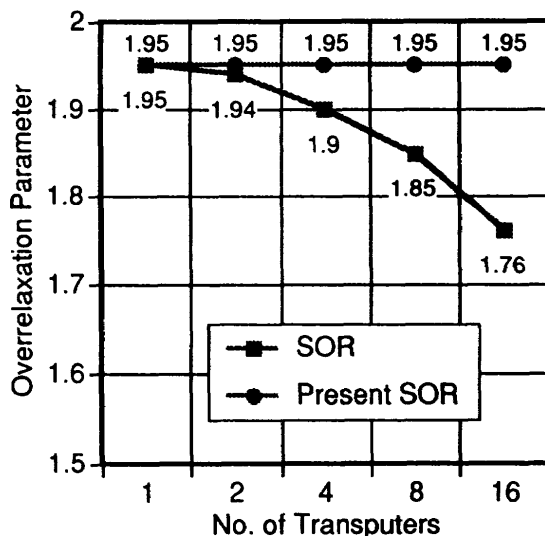


図5 最適過緩和係数

5. 非圧縮性流れの数値計算への適用

次に、本並列化 SOR 法の 2 次元非圧縮性流れへの適用として円柱まわりのレイノルズ数 $Re=40$ の定常流れおよび $Re=100$ の非定常流れの計算を行う。

基礎方程式として渦度一流れ関数表示のナビエ・ストークス方程式を用いる。渦度一流れ関数表示のナビエ・ストークス方程式は、一般曲線座標系 (ξ, η) で

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{1}{J} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \omega}{\partial \xi} - \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \right) \\ &= \frac{1}{Re} \frac{1}{J^2} \left(\alpha \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} + \sigma \frac{\partial \omega}{\partial \xi} + \tau \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \right) \\ & \alpha \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + \sigma \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \tau \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = -J^2 \omega \end{aligned} \quad (5.1)$$

と記述される。ここで、 ω は渦度、 ψ は流れ関数であり、デカルト座標 (x, y) において流速 (u, v) についてそれぞれ、

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y},$$

$$(u, v) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}, -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \quad (5.2)$$

と定義される。また、 $\alpha, \beta, \gamma, \sigma, \tau$ および J はメトリックおよび座標変換のヤコビアンであり、

$$\alpha = \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2, \quad \beta = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta},$$

$$\gamma = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2,$$

$$\sigma = \frac{1}{J} \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} D_y - \frac{\partial y}{\partial \eta} D_x \right), \quad \tau = \frac{1}{J} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} D_x - \frac{\partial x}{\partial \xi} D_y \right),$$

$$J = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad (5.3)$$

である。ただし、

$$D_x = \alpha \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2},$$

$$D_y = \alpha \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} \quad (5.4)$$

である。

渦度輸送方程式の数値計算法には、線の方法を用い、空間を中心差分で離散化し、2段階有利ルンゲ・クッタ法⁽³⁾で時間積分を行う。2段階有理ルンゲ・クッタ法の計算手順は、空間微分項の離散化をしたのちの時間に対する常微分方程式を

$$\frac{d\omega}{dt} = W(\omega) \quad (5.5)$$

としたとき、

$$g_1 = \Delta t W(\omega^n), \quad g_2 = \Delta t W(\omega^n + c_2 g_1),$$

$$g_3 = b_1 g_1 + b_2 g_2,$$

$$\omega^{n+1} = \omega^n + \frac{2g_1(g_1, g_3) - g_3(g_1, g_1)}{(g_3, g_3)} \quad (5.6)$$

の様に表される。ここで (g_1, g_3) はベクトル g_1, g_3 の内積を表し、 b_1, b_2, c_2 は

$$b_1 + b_2 = 1, \quad b_2 c_2 \leq -0.5 \quad (5.7)$$

を満たす必要がある。本計算では

$$b_1 = 2, \quad b_2 = -1, \quad c_2 = 0.5 \quad (5.8)$$

を用いている。

流れ関数のポアソン方程式の解法には2. のポアソン方程式の並列化手法を用いる。

まず、第1の計算対象は $Re=40$ の円柱周りの定常流れである。

計算格子は、 $32 \times 33, 64 \times 33, 128 \times 33$ とする。図6に 128×33 のときの計算格子を示す。図7は、このとき16台のトランスペュータによって計算を行ったときの等 ψ 線図である。この結果は1プロセッサの結果と完全に一致し、並列化 SOR 法の信頼性が確認できる。図8に得られた並列効率を示す。計算は、1~16台のトランスペュータを用いた。16台のトランスペュータで 32×33 のときの並列効率が低いのは、このとき1プロセッサあたりの計算領域が2ライン分のみで最も全体の計算量に比べて通信の負荷が高くなる場合となるためである。従ってこのとき16プロセッサに対して得られる加速比11.23が最も低い加速比となる。また、計算格子が 128×33 の場合で2,4および8プロセッサについてリニア以上の加速比が出ているが、これは、本並列化 SOR 法に要する反復回数が、1プロセッサに対するSOR法の計算の反復回数より少なくて済むためである。

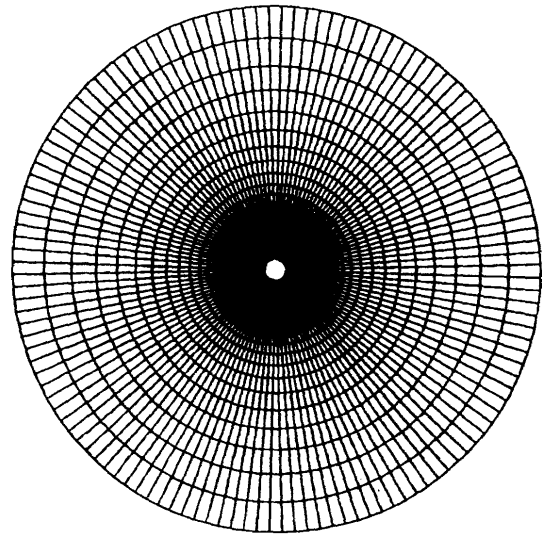


図6 計算格子 (128x33)

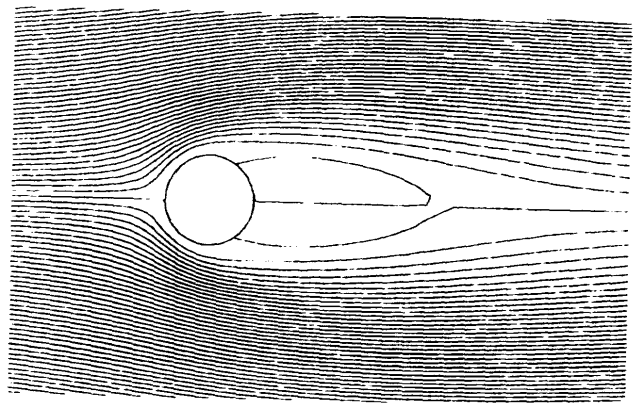


図7 等 ψ 線図 (Re=40)

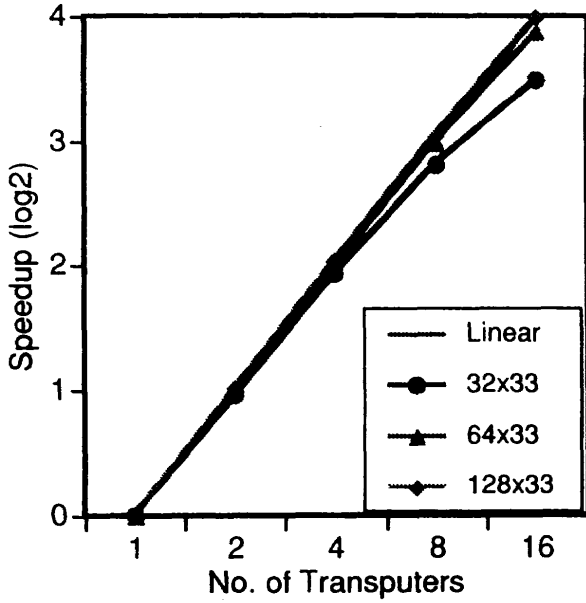


図8 加速比 (非圧縮性N-S方程式)

次に計算格子を 256x65 として $Re=100$ のカルマン渦列の発生する非定常流れの計算を16プロセッサを用いて計算を行った。図9に円柱の中心より流れの後方3.5の位置の渦度の時間変化を示す。これより流れが完全に周期的となっていることがわかる。図10に流れが周期的になったときの渦度場を周期を T として $0.2T$ ごとに示す。渦が交互にはがれていく様子が再現され、また、 $t=0.0T$ と $t=1.0T$ の流れの様子が一致し、これからも流れの周期性が確認でき、非定常問題に対しても並列化SOR法の信頼性が確認できる。

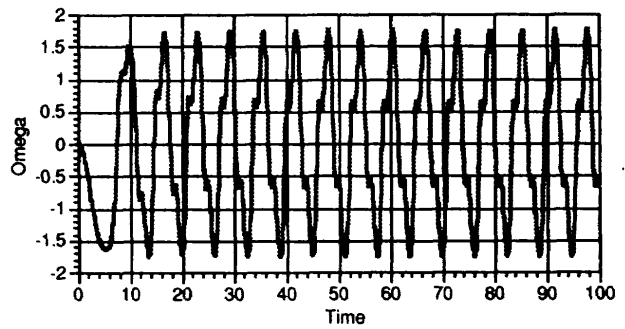


図9 渦度の時間変化

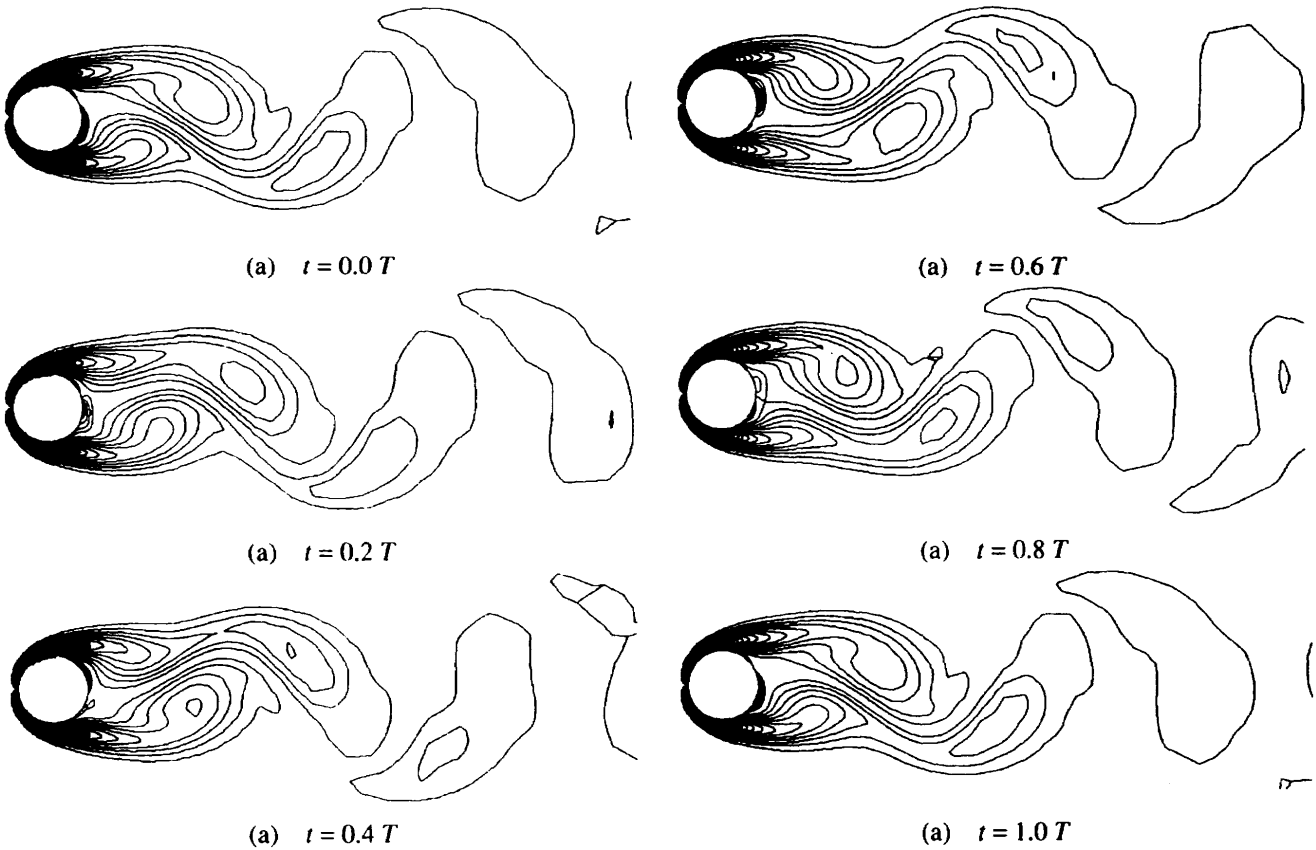


図10 等渦度線図 ($Re=100$)

5. まとめ

本研究では、領域分割法を用いたポアソン方程式の効果的な並列化手法である並列化SOR法を示している。ポアソン方程式の数値計算の検定問題に適用した結果、16台のトランスペュータを用いて128x129の格子点のときに加速比15.67が得られた。また、渦度-流れ関数表示の非圧縮性Navier-Stokes方程式を用いた定常流れの数値計算に適用し、解の信頼性の確認を行った。また、このとき128x33の格子点において加速比15.96が得られた。さらに非定常流れにも応用し、その解の信頼性の確認を行った。本手法はその他の並列計算機にも容易に応用可能であると期待される。

参考文献

- (1) Osama El-Giar and Tim Hopkins, A Generally Configurable Multigrid Implementation for the Solutions of Three-Dimensional Elliptic Equations on a Transputer Network, Transputer/Occam JAPAN 3 pp.35-45, 1990.
- (2) K.-H. Hoffman and Hun Zou, Parallel Efficiency of Domain Decomposition Methods, Parallel Computing Vol.19 No.12 1375-1391, 1993.
- (3) N. Satofuka and T. Tsujita, A New Explicit Methods for the Numerical Solution of the Compressible Navier-Stokes Equations, Proc. of th BAIL II Conf. pp.364, 1982.