

No.27

付着線不安定の級数解について

伊藤信毅（流れ研究集団）

On Series Solutions of Attachment-Line Instability

Nobutake ITOH

Institute of Flow Research, 4-11-14 Kitanodai, Hachioji, Tokyo 192-0913, JAPAN

ABSTRACT

Rigorous stability analysis of swept Hiemenz flow has given an exact solution describing spanwise-traveling Tollmien-Schlichting waves just on the attachment line and asymptotic behavior of oblique-wave disturbances away from the attachment line. But there is a great gap between the critical Reynolds number $R_c=583$ of the T-S mode and $R_c=89.1$ of the asymptotic solution. So some attempts are now made to bury the gap in the critical value near the attachment line.

Key Words: linear stability theory, laminar-turbulent transition, three-dimensional boundary layer

1. はじめに

後退翼に沿う三次元境界層の安定性を考えるとき、基本流が時間と翼前縁に平行な方向（スパン方向）の座標に依存しない場合でも、前縁に直角な方向（翼弦方向）には境界層の厚さや外部ポテンシャル流の速度が変化するため、厳密な線形攪乱方程式は翼面に垂直な方向の座標と翼弦方向座標に関する偏微分方程式になる。この方程式の中で、境界層の非平行性に関する項は、粘性項と同じく、レイノルズ数の逆数に比例する。従って、これらの微小項を無視して平行流近似を行うと、攪乱方程式はRayleighの非粘性方程式に退化する。平行流に対して粘性を考慮して導かれるOrr-Sommerfeld方程式を境界層の安定解析に適用する、いわゆる「平行流近似理論」には全く数学的根拠が無いのである。

厳密な偏微分攪乱方程式にある種の微小パラメータ展開を適用して常微分方程式の列に分解できれば、級数解の初項は同次方程式の固有値問題に支配される。この同次方程式が粘性項を含む形に導かれるとき、それはO-S方程式に代わる「非平行安定性方程式」と呼ばれるべきものになる。

このような非平行安定性解析を進める際に、最も基本的な流れはFalkner-Skan-Cookeの相似境界層である。この相似境界層に対する厳密な線形攪乱方程式を導くと、やはり、壁に垂直な方向と局所レイノルズ数の増加する方向の二つの座標に関する偏微分方程式になる。しかし特別な場合として、圧力勾配パラメータが $m=1$ の流れ、すなわち付着線境界層においては、すでにいくつかの非平行安定解析が行われている。まず、付着線に沿う方向（スパン方向）に伝播するT-S波型攪乱を考えると、厳密方程式はそのまま常微分に退化し、解は固有値問題で記述される¹⁾。さらに、付着線流中の一般的な斜行波攪乱も厳密な偏微分攪乱方程式の級数解で表わされる²⁾。解は付着線からの距離 x の逆数のべきに展開されているので付着線から離れたところで精度を増し、そこでの斜行波が横流

れモードと流線曲率モードから成ること、両者ともスパン方向T-Sモードに比べて1/5以下の極めて低い臨界レイノルズ数を持つことなどが明らかにされている。

本論文では、付着線流に対する非平行安定解析をさらに前進させ、上述のスパン方向T-S波解と斜行波漸近解の間を埋めるべき解を導く。

2. 付着線境界層に対する線形攪乱方程式

物体表面に沿って付着線に垂直な下流方向に x 、付着線に平行に y 、壁面に垂直に z を取るとき、付着線流の速度は

$$\bar{U} = U_E F'(\zeta), \quad \bar{V} = V_\infty G(\zeta), \quad \bar{W} = -(v/\delta) F(\zeta) \quad (1)$$

の形に表される。ただし、 $U_E \propto x$ 、 $V_\infty = \text{const.}$ 、 $\delta = \sqrt{vx/U_E}$ 、 $\zeta = z/\delta$ で、関数 F と G は $m=1$ に対するFalkner-Skan-Cooke 方程式の解である。

この基本流に重ねられた微小な波動攪乱の速度と圧力を

$$(\bar{u}^*, \bar{v}^*, \bar{w}^*, \bar{p}^*) = (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{p}) \exp(i(\bar{\alpha}x + \bar{\beta}y - \bar{\omega}t)) \quad (2)$$

と置き、 $\bar{\beta}$ と $\bar{\omega}$ は定数、 $\bar{\alpha}$ は x の関数、振幅関数

$(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{p})$ は z と x の関数とする。諸量を

$$\begin{aligned} x/\delta &= R_1, \quad z/\delta = \zeta, \quad \delta\bar{\alpha} = \alpha, \quad \delta\bar{\beta} = \beta, \quad \delta\bar{\omega}/V_\infty = \omega, \\ \bar{U}/U_E &= U(\zeta), \quad \bar{V}/V_\infty = V(\zeta), \quad \bar{W}/V_\infty = (1/R_0)W(\zeta), \\ \bar{u}/U_E &= u(\zeta, R_1), \quad \bar{v}/V_\infty = v(\zeta, R_1), \quad \bar{w}/V_\infty = w(\zeta, R_1), \\ \bar{p}/(\rho V_\infty^2) &= p(\zeta, R_1), \quad R_0 = V_\infty \delta/\nu, \quad R_1 = U_E \delta/\nu \end{aligned} \quad (3)$$

の形に無次元化し、 $(R_0/R_1)\alpha = \hat{\alpha}$ のように置き換えると、線形攪乱方程式は次式のように表される。

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{R_0} \hat{\nu}^2 + i\omega - U \left(i\hat{\alpha} \frac{R_1^2}{R_0^2} + \frac{2}{R_0} + \frac{R_1}{R_0} \frac{\partial}{\partial R_1} \right) - i\beta V - \frac{W}{R_0} D \right] u \\ - U'w - \left(i\hat{\alpha} + \frac{R_0}{R_1} \frac{\partial}{\partial R_1} \right) p = 0, \\ \left[\frac{1}{R_0} \nabla^2 + i\omega - U \left(i\hat{\alpha} \frac{R_1^2}{R_0^2} + \frac{R_1}{R_0} \frac{\partial}{\partial R_1} \right) - i\beta V - \frac{W}{R_0} D \right] v - V'w - i\beta p = 0, \end{aligned}$$

$$\left[\frac{1}{R_0} \nabla^2 + i\omega - U \left(i\hat{\alpha} \frac{R_1^2}{R_0^2} + \frac{R_1}{R_0} \frac{\partial}{\partial R_1} \right) - i\beta V - \frac{W}{R_0} D - \frac{W'}{R_0} \right] w - Dp = 0,$$

$$\left(i\hat{\alpha} \frac{R_1^2}{R_0^2} + \frac{1}{R_0} + \frac{R_1}{R_0} \frac{\partial}{\partial R_1} \right) u + i\beta v + Dw = 0 \quad (4)$$

ただし、

$$\nabla^2 = D^2 - \beta^2 - \hat{\alpha}^2 \frac{R_1^2}{R_0^2} + \frac{i}{R_0} \left(\hat{\alpha} + R_1 \frac{d\hat{\alpha}}{dR_1} \right) + \frac{2i\hat{\alpha}R_1}{R_0} \frac{\partial}{\partial R_1} + \frac{\partial^2}{\partial R_1^2},$$

$$\hat{\nabla}^2 = D^2 - \beta^2 - \hat{\alpha}^2 \frac{R_1^2}{R_0^2} + \frac{i}{R_0} \left(\hat{\alpha} + R_1 \frac{d\hat{\alpha}}{dR_1} \right) + \frac{2i\hat{\alpha}}{R_0} \left(1 + R_1 \frac{\partial}{\partial R_1} \right) + \left(\frac{2}{R_1} \frac{\partial}{\partial R_1} + \frac{\partial^2}{\partial R_1^2} \right)$$

$D \equiv \partial/\partial \zeta$ である。境界条件として壁面 $\zeta = 0$ と遠方 $\zeta = \infty$ で $u=v=w=0$ が要求される。

3. 攪乱方程式の厳密解と漸近解

上式において $\alpha=0$ と置くと R_1 に依存しない解を考えると、問題は常微分方程式の固有値を求めることに帰着する。Hallら¹⁾がスパン方向に伝播するT-S波に対して導いた厳密解が得られる。臨界レイノルズ数は $R_0 = 583$ 、対応する波数と振動数は $\beta = 0.288$ と $\omega = 0.110$ である。

一方、固有値 $\alpha = (R_1/R_0)\hat{\alpha}$ が ω, β, R_0 および R_1 の関数として定まる場合を想定して、解をつぎのような $1/R_1^2$ のべき級数形に置くことができる。

$$\alpha = \frac{R_0}{R_1} \left[\alpha_0(\beta, \omega, R_0) + \alpha_1(\beta, \omega, R_0) \frac{1}{R_1^2} + \dots \right],$$

$$q = q_0(\zeta; \beta, \omega, R_0) + q_1(\zeta; \beta, \omega, R_0) \frac{1}{R_1^2} + \dots \quad (5)$$

ただし、ベクトル q は (u, v, w, p) を表す。実際にこれを(4)に代入し、 $1/R_1^2$ の各べきの係数を0に等値すれば常微分方程式の列が導かれる。級数解の初項は下流方向距離 R_1 が大きいときに成立する漸近解を与える。このときに得られる斜行波攪乱の臨界レイノルズ数は $R_0 = 87.1$ となり、 $\alpha=0$ の場合の1/6以下である。有限な R_1 における臨界値を得るには級数解(5)の高次項まで計算する必要がある²⁾。

4. 付着線まわりの級数展開

付着線近傍における攪乱の性質を調べるため、攪乱方程式(4)において、固有値 ω と固有関数 $q = (u, v, w, p)$ を R_1^2 のべき級数に展開する。この問題では、級数の高次項が低次項に影響するために低次からの逐次近似解法は適用できず、全ての係数に関する連立常微分方程式を解かねばならない。しかし R_1 の比較的小さい領域では、高次項の影響が弱まるために、級数をある程度大きい項数で打切る方法で、十分な精度の近似解が得られる。この近似解では、 R_1 の大きさとともに打ち切り項数の影響が強まるため、項数を変えた計算を行って精度を確認する必要がある。

5. 翼弦方向波数 α に関する級数展開

攪乱方程式(4)において、 $\hat{\alpha} = (R_0/R_1)\alpha$ を微小パラメータとみなし、解を $\hat{\alpha}$ と R_1^2 の二重べき級数に展開する。すなわち、この方程式から固有値問題が導かれ、固有値 ω が $\hat{\alpha}, \beta, R_0$ および R_1 の関数として定まる場合を想定し、解を次の級数形に置く。

$$\omega = \omega_{00}(\beta, R_0) + [\omega_{10}(\beta, R_0) + \omega_{11}(\beta, R_0)R_1^2] \hat{\alpha} + \dots,$$

$$q = q_{00}(\zeta) + [q_{10}(\zeta) + q_{11}(\zeta)R_1^2] \hat{\alpha} + \dots \quad (6)$$

ただし、 $q = (u, v, w, p)$ である。これを(4)に代入し、 $\hat{\alpha}$ と R_1^2 の各べきの係数を等値すれば、常微分方程式の列が得られる。級数解の初項を支配する方程式はHallら¹⁾がスパン方向T-S波に対して導いた同次方程式に一致し、高次項は非同次方程式の列を逐次的に解くことで定まる。

6. 計算結果と考察

翼弦方向波数に関する級数解の数値結果は別稿に譲り、ここでは付着線まわりの級数解に対する計算結果を紹介する。図1はスパン方向波数をスパン方向T-S波の臨界点 $\beta = 0.288$ に固定し、翼弦方向波数 $\hat{\alpha}$ のいくつかの値に対して、中立安定の曲線群を描いたものである。それぞれの曲線は R_1 が大きくなるにつれて級数の打ち切り項数 N への依存性が強くなり、発散する。この発散がなければ、波数 $\hat{\alpha}$ と β の全てに対する曲線群の包絡線が臨界曲線を与える。級数解は発散するけれども、この図からT-S波解と斜行波解をつなぐ臨界曲線の概要を推測できる。

参考文献

- 1) Hall, P., Malik, M. R. and Poll, D. I. A.: *Proc. R. Soc. Lond. A* **395** (1984), 229-245.
- 2) Itoh, N.: *Fluid Dyn. Res.* **27** (2000), 143-161.

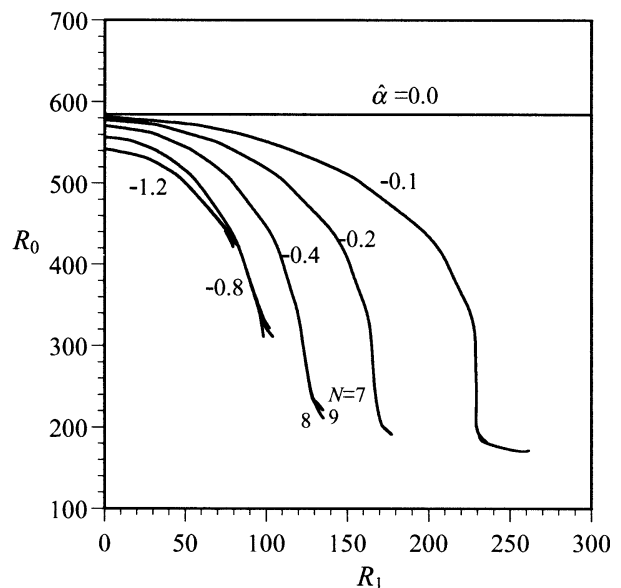


Fig.1 Neutral curves for several values of α at $\beta = 0.288$.