

格子ボルツマン法の一般座標系への拡張とその検証

今村太郎, 鈴木宏二郎^{*1}, 中村孝, 吉田正廣^{*2}, 福田正大^{*3}

Extension of Lattice Boltzmann Method to Generalized Coordinates and its Verification

by

Taro Imamura, Kojiro Suzuki^{*1}, Takashi Nakamura, Masahiro Yoshida^{*2}, Masahiro Fukuda^{*3}

Abstract

In this paper, a generalized interpolation-based lattice Boltzmann method (GILBM) is introduced. The standard lattice Boltzmann equation is transformed into generalized coordinates using metrics. The advection term of the transformed equation is discretized with sufficient spatial accuracy to suppress the numerical dissipation. Additionally, a wall boundary condition suitable for body-fitted grids and a non-reflecting outer boundary condition are introduced. With the present method, the flow around a complex geometry can be solved using structured grids. The three examples of, the cavity flow, the flow around a circular cylinder, and the flow around an airfoil are shown as validation of the method to a wide range of Reynolds number. The present results show good quantitative and qualitative agreement with other computational studies.

1. はじめに

近年, 格子ボルツマン法 (Lattice Boltzmann Method: LBM) が従来の数値流体力学 (CFD) の別法として注目を集めている^[1]. 格子ボルツマン法は非圧縮流, 圧縮流, 多孔質流, 多相流等様々な流体力学問題に適用され, 成功を収めている.

格子ボルツマン法の中で最も一般的なモデルは, 非圧縮流解析モデルであり, 衝突演算に Bhatnagar-Gross-Krook (BGK) 衝突モデルを用いる, lattice BGK (LBGK) モデルである. 従来, 非圧縮 Navier-Stokes 方程式を差分化して計算する場合, 圧力方程式がポアソン方程式の形になり, 反復計算が必要となる. しかし LBGK モデルでは圧力の反復計算は現れない. また完全陽解法であるため, 並列計算に適した計算手法である.

これらの長所を持つ LBGK モデルは, 非圧縮流体解析法として優れているが, 実用問題を取り扱うにはいくつかの障害がある. そのひとつは, 計算格子が等間隔直交格子のような等方的な格子に限られる点である. 1 time step で隣接する格子点に到達する, という物理モデルで分布関数の並進演算を表すため, 格子点は計算領域全体に均一に配置する必要がある. 従って, レイノルズ数が高い流れの計算を十分な空間解像度を有する格子で行うことは困難であった.

本研究では, 一般座標系に拡張した Generalized Interpolation-based lattice Boltzmann method (GILBM) を提案する. メトリックスを利用し, 一般座標系への座標

変換を施すことで, 任意の構造格子での計算が可能になる. 物体適合座標系では, 壁上に格子点を配置できる. そこで, 本研究では GILBM に適した境界条件を提案する. 壁面上の分布関数は, 壁面上の物理量およびその空間勾配から, 一次の非平衡量までを含んだ形で記述される. 分布関数の一次の非平衡量は Chapman-Enskog 展開^[2]を用いて導出する. また, 外部境界で非物理的な波の生成を抑えるため, 無反射境界条件^[3]を導入する.

本手法の有効性を検証するため, キャビティ流れ, 円柱周り流れ, 翼周り流れの解析を行う. 過去の計算結果との比較を行い, 本計算手法の有効性を明らかにする.

2. LBGK モデル

はじめに, 非圧縮流解析モデルであり, 衝突演算に BGK 衝突モデルを用いる, lattice BGK (LBGK) モデル^[4]について説明する.

LBGK モデルの支配方程式は, ボルツマン方程式をベースに考えると理解しやすい. BGK 衝突項を持つ 2 次元ボルツマン方程式を有次元で表記すると,

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{t}} + \hat{c}_x \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{x}} + \hat{c}_y \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{y}} = -\frac{1}{\hat{\tau}} [\hat{f} - \hat{f}^{eq}] \quad (1)$$

となる. 変数 \hat{Q} は Q の有次元表記である. 分布関数 $\hat{f} = \hat{f}(\hat{x}, \hat{c}, \hat{t})$ は, 位置 \hat{x} , 粒子の移流速度 \hat{c} , 時間 \hat{t} を変数に持つ. $\hat{\tau}$ は緩和時間, \hat{f}^{eq} は平衡分布関数である.

格子ボルツマン法の支配方程式は, ボルツマン方程式において速度空間を数個から数十個の点で離散化したもので

¹ 東京大学大学院, ² 航空宇宙技術研究所, ³ 原子力研究所

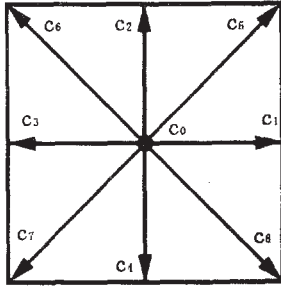


図1：2次元9速度モデルで用いられる速度ベクトルの組み合わせ

ある，と理解できる．ボルツマン方程式を無次元化し，速度空間を離散化するため， $\hat{f}(\hat{x}, \hat{c}, \hat{t})$ を粒子速度 c_i に対する分布関数 $f_i(\mathbf{x}, t)$ で置き換えると，式(1)は，

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + c_{i,x} \frac{\partial f_i}{\partial x} + c_{i,y} \frac{\partial f_i}{\partial y} = -\frac{1}{\tau} [f_i - f_i^{eq}] \quad (2)$$

となる．流れの代表長さ L ，代表速度 U_0 ，特性時間 $t_0 (= L/U_0)$ ，そして密度 ρ_0 を用い，変数を $f_i = \hat{f}_i / \rho_0$ ， $\mathbf{x}_i = \hat{\mathbf{x}}_i / L$ ， $\mathbf{c}_i = \hat{\mathbf{c}}_i / U_0$ ， $t = \hat{t} / t_0$ ， $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} / U_0$ ， $\tau = \hat{\tau} / t_0$ のように無次元化した．

二次元計算では2次元9速度モデル(2D-9Vモデル)がしばしば用いられる．2D-9Vモデルにおける速度ベクトルの組み合わせは図1のようになり，式で書くと

$$\begin{cases} \mathbf{c}_0 = (0, 0) \\ \mathbf{c}_i = c \left(\cos\left(\frac{i-1}{2}\pi\right), \sin\left(\frac{i-1}{2}\pi\right) \right) & \text{for } i=1, 2, 3, 4 \\ \mathbf{c}_i = \sqrt{2}c \left(\cos\left(\frac{i-5}{2}\pi + \frac{\pi}{4}\right), \sin\left(\frac{i-5}{2}\pi + \frac{\pi}{4}\right) \right) & \text{for } i=5, 6, 7, 8 \end{cases} \quad (3)$$

となる．速度ベクトル \mathbf{c}_i は定数であるので，波動方程式の解析解を式(2)の左辺に適用できる．計算領域を等間隔直交格子で分割し，格子間隔 Δx と分布関数の無次元移流速度 c とから，時間刻み幅を $\Delta t = \Delta x / c$ と定義する．このようにすると，分布関数は1 time stepで隣接する格子点へ移動する．これは常にCFL=1の計算に相当し，移流に伴う数値誤差を含まない．最終的に，式(2)は

$$f_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \cdot \Delta t, t + \Delta t) - f_i(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{\omega} [f_i(\mathbf{x}, t) - f_i^{eq}(\mathbf{x}, t)] \quad (4)$$

($i=0-9$ for 2D-9Vモデル)

となる．緩和時間は $\omega = \tau / \Delta t$ で定義される．これが格子ボルツマン方程式(Lattice Boltzmann Equation: LBE)である． $f_i^{eq}(\mathbf{x}, t)$ は平衡分布関数を表し，

$$f_i^{eq}(\mathbf{x}, t) = w_i \rho \left[1 + \frac{3(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u})}{c^2} + \frac{9(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u})^2}{2c^4} - \frac{3u^2}{2c^2} \right] \quad (5)$$

である． w_i は速度ベクトルの大きさに応じた定数である．2次元9速度モデルでは $w_0 = 4/9$ ， $w_1 = \dots = w_4 = 1/9$ ， $w_5 = \dots = w_8 = 1/36$ である．

マクロな物理量(密度や速度)は次式のように分布関数のモーメントから，

$$\rho = \sum_i f_i, \quad \rho \cdot \mathbf{u} = \sum_i f_i \cdot \mathbf{c}_i \quad (6)$$

で与えられる．格子ボルツマン方程式にChapman-Enskog展開を適用すると，Navier-Stokes方程式が導かれ，動粘性係数と緩和時間の関係が導かれる^[1]．格子サイズから決まる時間刻み幅と計算で与えられるレイノルズ数から，緩和時間は，

$$\omega = \frac{3U_0 L}{\text{Re} \cdot \Delta t \cdot c^2} + \frac{1}{2} \quad (7)$$

で与えられる．また，圧力は

$$p = \frac{\rho}{3} c^2 \quad (8)$$

となる．

3. Generalized Interpolation-based LBM

3.1 GILBMの導出

格子ボルツマン方程式(4)を衝突演算，並進演算と独立に記述すると，

$$f_i^*(\mathbf{x}, t) = f_i(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{\omega} [f_i(\mathbf{x}, t) - f_i^{eq}(\mathbf{x}, t)] : \text{衝突} \quad (9)$$

$$f_i(\mathbf{x}, t + \Delta t) = f_i^*(\mathbf{x} - \mathbf{c}_i \cdot \Delta t, t) : \text{並進} \quad (10)$$

となる． $f_i^*(\mathbf{x}, t)$ は衝突演算後の分布関数を表す．衝突後の分布関数は，速度ベクトル \mathbf{c}_i に従って隣り合う格子点に移動する．式(9)および(10)に関して，物理空間 \mathbf{x} から計算空間 ξ への一般座標変換を考える．ここでも簡単のため二次元計算について説明する．

まず衝突演算は，格子点上で起こるため，一般座標系上でも直交等間隔格子の時と等しく，

$$f_i^*(\xi, t) = f_i(\xi, t) - \frac{1}{\omega} [f_i(\xi, t) - f_i^{eq}(\xi, t)] \quad (11)$$

となる．一方，一般座標系での並進演算では，何らかの補間法を用いる必要がある．並進演算は次式のようになる．

$$f_i(\xi, t + \Delta t) = f_i^*(\xi - \Delta \xi_{up}, t) \quad (12)$$

ただし，

$$\Delta \xi_{up} = (\Delta \xi_{up}, \Delta \eta_{up}) = \int_0^{\Delta t} d\xi = \int_0^{\Delta t} \tilde{\mathbf{c}}_i dt \quad (13)$$

である． $\tilde{\mathbf{c}}_i$ は計算空間における反変速度を表す．反変速度は座標変換から導かれるメトリックスを利用し，次式から求められる．

$$\begin{cases} \tilde{c}_{i,\xi} = c_{i,x} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + c_{i,y} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \tilde{c}_{i,\eta} = c_{i,x} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} + c_{i,y} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{cases} \quad (14)$$

移流計算ではラグランジュ的な内挿法を用いる．空間二次精度を保ち，多次元風上内挿法を用いることが数値粘性を抑える上で重要である．そのため，式(13)の数値積分で

は 2-Step Runge-Kutta 法を採用した.

$$\Delta \xi_{up}^{(1)} = \frac{1}{2} \Delta t \cdot \tilde{c}_i(\xi) \quad : 1 \text{ step} \quad (15)$$

$$\Delta \xi_{up} = \Delta t \cdot \tilde{c}_i(\xi - \Delta \xi_{up}^{(1)}) \quad : 2 \text{ step} \quad (16)$$

最後に式(12)の右辺に対し, 二次元風上補間関数を用い,

$$f_i(\xi, t + \Delta t) = \sum_{j=0}^2 \sum_{k=0}^2 a_j \cdot b_k \cdot f_i^*(\xi - \xi_j, \eta - \eta_k, t) \quad (17)$$

とする. ただし $\xi_j = \text{sign}(\Delta \xi_{up}) \cdot j$, $\eta_k = \text{sign}(\Delta \eta_{up}) \cdot k$ である. また補間関数の係数は

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{2}(|\Delta \xi_{up}| - 1)(|\Delta \xi_{up}| - 2) \\ a_1 = -|\Delta \xi_{up}|(|\Delta \xi_{up}| - 2) \\ a_2 = \frac{1}{2}|\Delta \xi_{up}|(|\Delta \xi_{up}| - 1) \end{cases} \quad (18)$$

$$\begin{cases} b_0 = \frac{1}{2}(|\Delta \eta_{up}| - 1)(|\Delta \eta_{up}| - 2) \\ b_1 = -|\Delta \eta_{up}|(|\Delta \eta_{up}| - 2) \\ b_2 = \frac{1}{2}|\Delta \eta_{up}|(|\Delta \eta_{up}| - 1) \end{cases} \quad (19)$$

となる.

時間刻み幅は最小格子幅 Δx_{\min} と移流速度の絶対値の最大 (対角成分 $\sqrt{2}c$) から次式のように決定する.

$$\Delta t = \frac{\Delta x_{\min}}{\sqrt{2}c} \quad (20)$$

緩和時間は式(7)より, 最小格子サイズから決まる時間刻み幅と計算で与えられるレイノルズ数から決定される.

3.2 境界条件の設定

3.2.1 壁境界条件

壁面上での分布関数は, 一次の非平衡量 $f^{(1)}$ を Chapman-Enskog 展開^[2]を用いて見積もることで,

$$\begin{aligned} f_i &= f_i^{eq} + f_i^{(1)} \\ &= f_i^{eq} \left[1 - \omega \cdot \Delta t \left(\frac{3U_\alpha U_\beta}{c^2} - \delta_{\alpha\beta} \right) \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} \right] \end{aligned} \quad (21)$$

と与えられる. $U_\alpha \equiv c_{i,\alpha} - u_\alpha$ で, $\delta_{\alpha\beta}$ はクロネッカーのデルタを表す. 下付き文字は総和規約を表す. 式(21)では, 壁面上での密度および速度が必要である. 壁に垂直な圧力勾配を 0 と仮定すれば, 式(8)のように圧力と比例関係にある密度に関しても密度勾配 0 を仮定できる. 従って, 壁面の隣の点 (流体側) の密度を 0 次外挿する. 速度については壁速度を境界条件として用いる. 分布関数にマクロな速度の空間勾配 $\partial u_\alpha / \partial x_\beta$ を考慮することで, 壁の勾配が分布関数に与える影響を数値的に決定できる.

3.2.2 外部境界条件の設定

外部境界では, 非物理的な波の生成を抑えるため, 無反射境界条件を適用する. これは, 超音速流出境界条件の考え^[8]を格子ボルツマン法に適用したものである. 計算領域から出て行く分布関数については, 計算領域内部と同様の計算をし, 計算領域に入ってくる分布関数については, 初期条件で固定する. このように設定することで, 外部境界での非物理的な波を押さえることが出来る.

4. 計算結果

4-1 二次元キャビティ流れ

本計算コードを検証するため, 二次元キャビティ流れの計算を行った. 四方を壁で囲まれており, 上面側の壁が一定速度 U_{top} で移動している. 代表速度を U_{top} , 代表長さをキャビティの一辺の長さとしてレイノルズ数を定義し, レイノルズ数 100, 1000, 10000 の三ケースについて計算を行った. 図2は計算格子である. 壁面近傍の最小格子幅は, $0.1/\sqrt{Re}$ で決定し, 壁近傍に格子点が寄せてある.

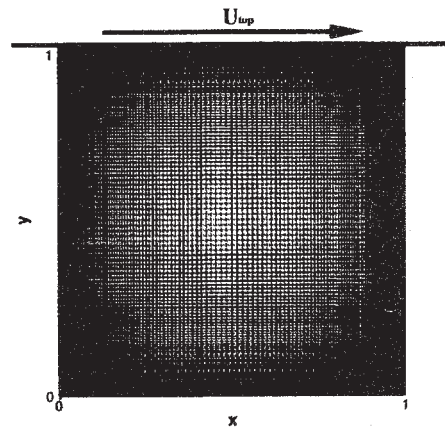


図2: 二次元キャビティの計算格子

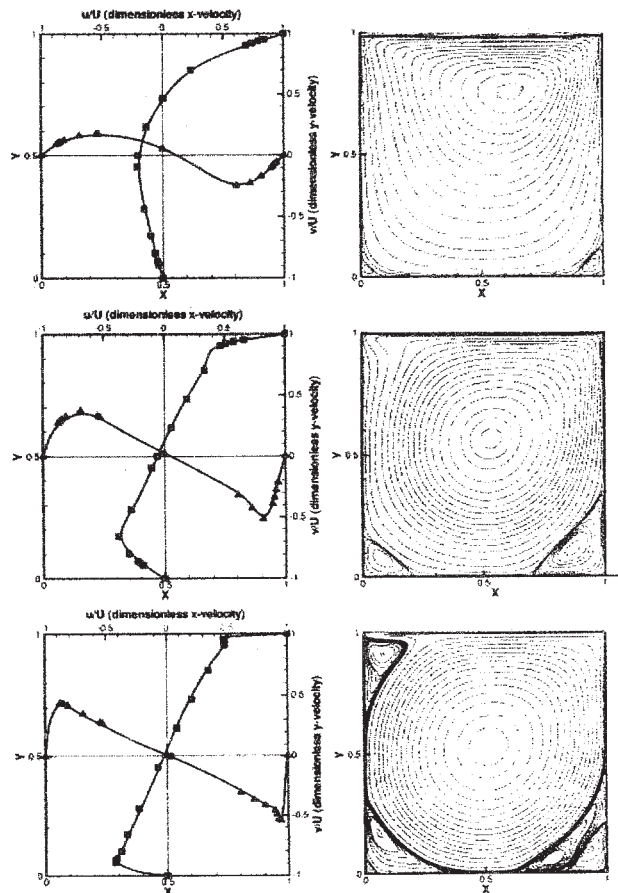


図3: 右図は各軸の中心線上における速度分布 (実線が本計算結果, 記号が Ghia の計算結果) 左図は流線分布 (上からレイノルズ数が 100, 1000, 10000)

定常解への収束判定は相対速度変化率を用い、

$$\delta = \max \left| \frac{|\mathbf{u}^{n+1}| - |\mathbf{u}^n|}{|\mathbf{u}^n|} \right| \leq 10^{-7} \quad (22)$$

を満たすまで、計算を行った。ゼロ割を防ぐため、 $|\mathbf{u}^n| = \text{Max} |\mathbf{u}^n| \times 0.01$ を満たす格子点のみで(22)式を評価した。

図3左は鉛直方向の中心線上におけるx方向速度成分分布および水平方向の中心線上におけるy方向速度成分分布を表したものである。上から、レイノルズ数 100, 1000, 10000 の結果である。実線が本計算結果、記号が Ghia らによる計算結果^[4]である。広範囲なレイノルズ数について Ghia の差分解と一致することが確認できた。図3右は左図に対応した流線を表している。レイノルズ数が増加するにつれ、右下、左下および左上で発生する渦の数が増加する。これら主渦や二次渦の位置、またこれらに付随して発生する細かい渦の数も、Ghia らの計算結果と一致している。表1は主渦について、その渦度と位置についてまとめたものである。Hou^[5]や Guo^[6]らの計算結果は等間隔直交格子の LBM を用いた計算結果である。Hou や Guo らの計算では、壁近傍で数値的な不安定が発生していた。しかし本計算では壁近傍に格子点を集めた結果、高いレイノルズ数でも安定に計算できた。

表1：キャピティ流れに関する過去の計算例との比較 (主渦の渦度とその位置の比較)

Re		Primary vortex		
		ψ_c	x_c	y_c
100	Ghia <i>et al.</i>	0.1034	0.6172	0.7344
	Hou <i>et al.</i>	0.1030	0.6196	0.7373
	present work	0.0938	0.6089	0.7388
1000	Ghia <i>et al.</i>	0.1179	0.5313	0.5625
	Hou <i>et al.</i>	0.1178	0.5333	0.5647
	Guo <i>et al.</i>	0.1170	0.5313	0.5625
	present work	0.1104	0.5308	0.5741
	present work	0.1197	0.5117	0.5333
10000	Ghia <i>et al.</i>	0.1197	0.5117	0.5333
	present work	0.1136	0.5136	0.5330

4-2 二次元円柱周り流れ

続いて二次元円柱周り流れの解析を行った。カルマン渦の発生する臨界レイノルズ数(47近傍)以上の流れについて解析を行い、非定常計算への適用性について明らかにする。Navier-Stokes 方程式の差分解^[7-11]と比較するため、レイノルズ数 100, 200, 1000, 10000 の4ケースについて計算を行った。

図4に計算格子を示す。O型格子で、周方向に241点、

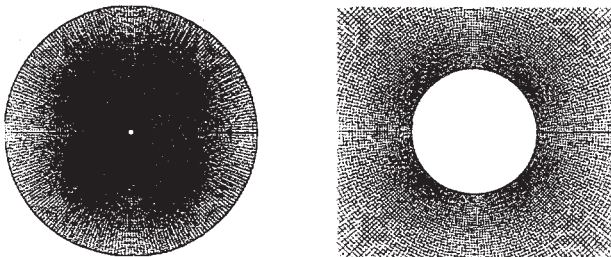


図4：二次元円柱周りの計算格子

法線方向に181点配置した。外部境界は円柱直径の20倍の位置に設定した。壁面近傍の最小格子幅は $0.1/\sqrt{\text{Re}}$ である。円柱後流のつなぎ目には周期境界条件、円柱表面には壁境界条件、外部境界には無反射境界条件を採用した。

図5は揚力係数が最大になった瞬間の圧力分布を表し、上から、レイノルズ数 100, 200, 10^3 , 10^4 の図である。臨界レイノルズ数よりも高い流れであるため、円柱後流にカルマン渦の放出が確認できる。またその間隔は、レイノルズ数が増加するにつれ短くなっていることが確認できる。

図6はレイノルズ数 1000 の時の揚力係数および抵抗係数の時間履歴を表したものである。このグラフからも周期的な渦の放出が確認できる。

表2は抵抗係数、揚力係数およびストローハル数について、Navier-Stokes 方程式の差分解^[7-11]と比較したものである。ストローハル数は渦放出の周波数を f 、円柱直径を D 、遠方場の流速を U_∞ とすると、 $St = fD/U_\infty$ で定義される。抵抗係数については、時間平均とその振幅もあわせ

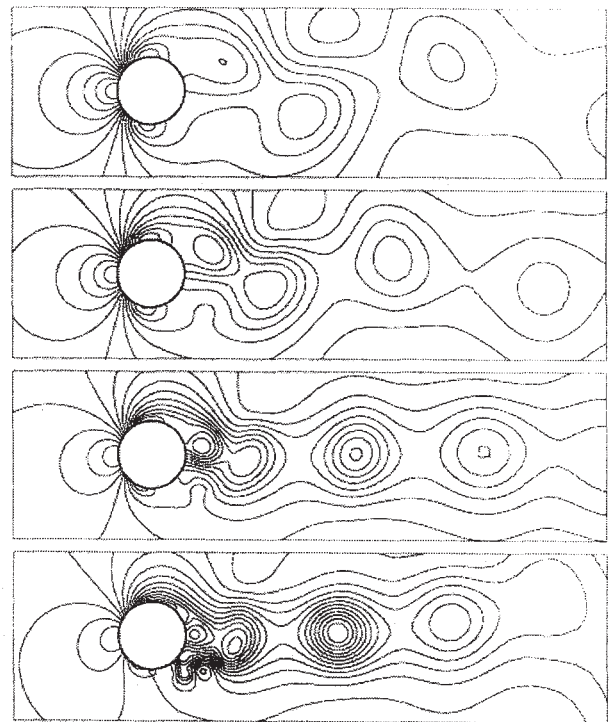


図5：揚力係数が最大時の円柱周り流れの圧力分布 (上から Re=100, 200, 10^3 , 10^4)

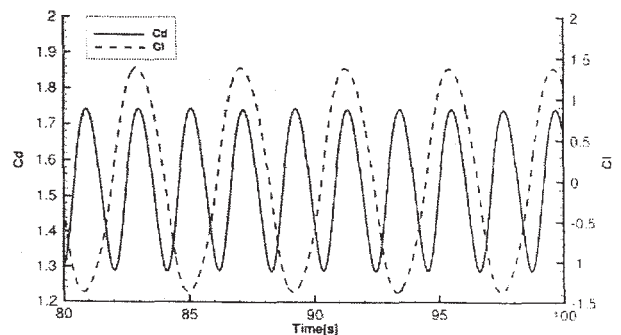


図6：揚力係数および抵抗係数の時間履歴 (Re=1000)

表2：円柱周り流れに関する過去の計算例との比較

Re		C_d	C_l	St
100	Braza et al.	1.28	± 0.298	0.16
	Present work	1.341 ± 0.0095	± 0.3008	0.165
200	Braza et al.	1.30	± 0.77	0.20
	Rosenfeld et al.	1.31 ± 0.04	± 0.65	0.19
	Present work	1.337 ± 0.0444	± 0.6438	0.195
1000	Behr et al.	1.53		0.241
	Mittal et al.	1.53 ± 0.245	± 1.37	0.245
	Present work	1.515 ± 0.2311	± 1.382	0.240
10000	Cox et al.	1.75 ± 0.35	± 1.7	0.24
	Present work	1.895 ± 0.5589	± 2.066	0.244

てまとめてある。いずれのパラメータについても、広範囲なレイノルズ数について定量的な一致が見られた。このことから非定常流れについても、本計算手法が有効であることが確認できた。

4-3 二次元翼周り流れ

航空宇宙分野への適用例として、翼周り(NACA0012^[12])流れの計算を行った。図7に計算格子を示す。C型格子で、用いた格子数は周方向に373点、法線方向に141、翼面上に251点配置した。法線方向の最小格子幅は、 $0.01/\sqrt{Re}$ とした。計算結果は、CFL3D^[13](圧縮性 Navier-Stokes 解析コード)、およびPowerFLOW^[13](汎用の格子ボルツマン法コード)の結果と比較した。

図8はレイノルズ数が500、迎角(AOA)が0度の時の圧力分布および瞬間流線である。定常流れであるので、式(22)を満たすまで収束させた。この計算結果の妥当性を検証するため、表面圧力分布および翼面上の境界層速度分布について、詳細な検討を行った。図9はNACA0012翼表面の圧力係数分布である。GILBMを用いた計算結果は、CFL3Dの計算結果と一致している。PowerFLOWは等間隔直交格子を用いるため、翼型のような形状の計算には適していないとされる。しかし一般座標系を導入したことで、格子ボルツマン法でも翼表面近傍の流れを精度良く再現できた。図10は75%コード長における鉛直方向断面の境界層速度分布である。やはり本計算結果はCFL3Dの結果と一致し、PowerFLOWの結果との差異は明確である。抵抗係数 C_d についても、CFL3D(0.1741)、PowerFLOW(0.1807)、GILBM(0.1725)と、CFL3Dと比べて1%程度の誤差で一致した。

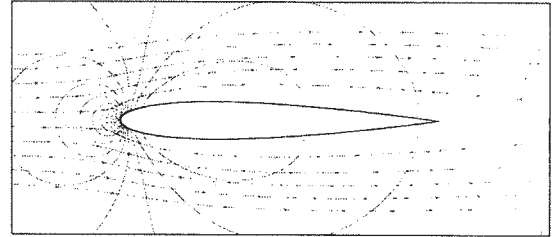


図8：NACA0012周りの圧力分布および流線

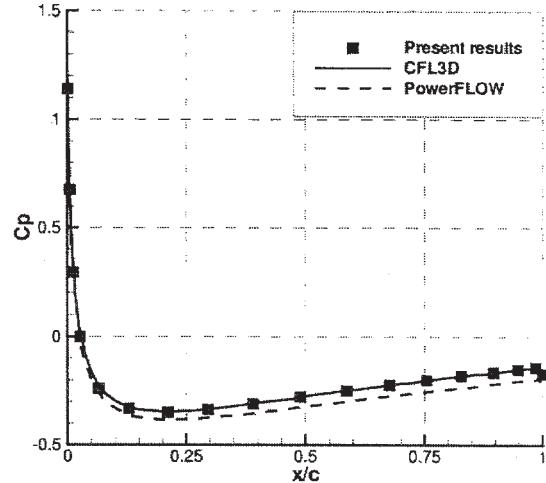


図9：NACA0012翼面上の C_p 分布

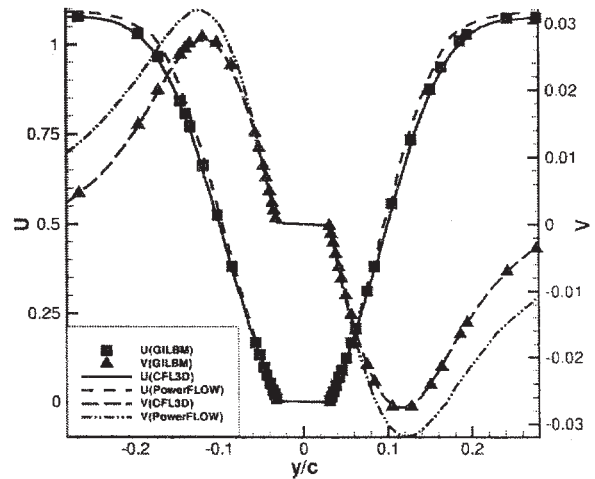


図10：NACA0012, AOA=0[deg], 75%コード長での境界層の速度分布

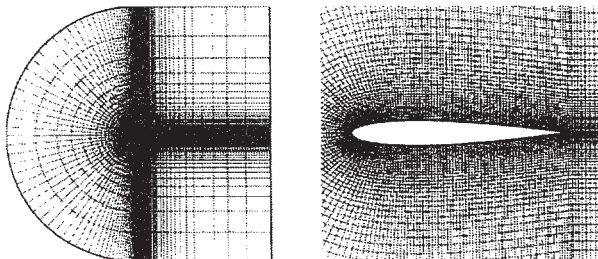


図7：二次元翼周りの計算格子

5. 結論

直交座標系などの等方的な格子を用いる格子ボルツマン法を一般座標系に拡張する方法を構築した。本計算手法を用いることで、格子点の増加を押さえつつ、境界層内の格子解像度を上げることができ、従来格子ボルツマン法では困難であった、高いレイノルズ数を有する任意形状周りの流れ解析が可能になった。

二次元キャビティ流れのような定常流れ, および二次元円柱周り流れのような非定常流れについて解析を行い, どちらについても適用できることを計算で示した. また円柱のような鈍頭物体周りの流れだけでなく, 翼型のような形状に対し GILBM を適用できることを示した. 抵抗係数などのパラメータは等間隔直交格子を用いた場合より正確に予測できる.

今後は乱流モデルを GILBM に実装し, より高いレイノルズ数への適用性について明らかにしていく予定である.

NACA/CR-2000-210550, ICASE Report No. 2000-40, (2000)

参考文献

- [1] S.Chen and G.D.Doolen, Lattice Boltzmann Method for Fluid Flows, *Annu.Rev.Fluid Mech.* 1998. 30:329-364
- [2] Walter G.Vincenti and Charles H. Kruger, Jr., Introduction to Physical Gas Dynamics, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1965 p. 375.
- [3] Kevin W. Thompson, Time Dependent Boundary Conditions for Hyperbolic Systems, *J.Comput.Phys.* 68, 1 (1987)
- [4] U.Ghia, K.N.Ghia, and C.T. Shin, High-Re Solution for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method, *J.Comput.Phys.* 48, 387 (1982)
- [5] S.Hou, Q.Zou, S.Chen, G.Doolen, and A.C.Cogley, Simulation of Cavity Flow by the Lattice Boltzmann Method, *J.Comput.Phys.* 118, 329 (1995)
- [6] Zhaoli Guo, Baochang Shi, and Nengchao Wang, Lattice BGK Model for Incompressible Navier-Stokes Equation, *J.Comput.Phys.* 165, 288 (2000)
- [7] M. Braza, P.Chassaing, and H. Ha Minh, Numerical study and physical analysis of the pressure and velocity fields in the near wake of a circular cylinder, *J. Fluid. Mech.* 165 p.79 (1986)
- [8] M.Rosenfeld, D.Kwak, and M.Vinokur, A Fractional Step Solution Method for the Unsteady Incompressible Navier-Stokes Equations in Generalized Coordinates Systems, *J.Comput.Phys.* 94, p.102 (1991)
- [9] M.Behr, A.Johnson, J.Kennedy, S.Mittal, and T.E.Tezduyar, Computation of incompressible flows with implicit finite element implementation on the Connection Machine, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.* 108 p. 99 (1993)
- [10] S.Mittal, V.Kumar, and A.Raghuvanshi, Unsteady incompressible flows past two cylinders in tandem and staggered arrangements, *Int. J. Numer. Meth. Fluids* 25 p.1315 (1997)
- [11] Jared S. Cox, Christopher L. Rumsey, Kenneth S. Brentner and Bassam A. Younis, Computation of Sound Generated by Viscous Flow Over a Circular Cylinder, NASA TM-110339, March 1997, pp. 10,
- [12] H.Abbot and A.E. Von Doenhoff, Theory of Wing Sections, Including a Summary of Airfoil Data, Dover, New York, (1959)
- [13] David P.Lockard, Li-Shi Lou, Bart A.Singer, Evaluation of the Lattice-Boltzmann Equation Solver PowerFLOW for Aerodynamic Application,