HR-SLAU2 および HR-AUSM$^+$-up：高解像度非定常空力シミュレーションに向けて

北村圭一（名古屋大学・現 横浜国立大学），橋本敦（JAXA）

HR-SLAU2 and HR-AUSM$^+$-up towards High Resolution Unsteady Aerodynamic Simulations

by
Keiichi Kitamura (Nagoya University; currently at Yokohama National University) and Atsushi Hashimoto (JAXA)

ABSTRACT
The reduced dissipation approach has been applied to AUSM-family flux functions of SLAU2 and AUSM$^+$-up towards high resolution transonic buffet simulations on unstructured grids. In this approach, the dissipation term (of the pressure flux) in each flux function is locally controlled ($0 < \gamma_{HR} < 1$, γ_{HR}: dissipation coefficient) where a cell-interface orientation angle is small (i.e., cell geometry is nearly squared) and/or where flows are smooth, and the original methods are recovered otherwise (γ_{HR} =1). Numerical tests demonstrated that the proposed HR (High-Resolution) -SLAU2 achieved better resolution (while maintaining robustness) for a double shear layer problem (Mach 0.01) and decaying isotropic turbulence (Mach 6×10^{-4}), compared with the original counterparts (γ_{HR} =1) or an existing method (HR-Roe), whereas HR-AUSM$^+$-up showed degraded resolution due to a large cutoff Mach number required for a stability reason.

1．はじめに

圧縮性流体の数値解法は，少なくともマッハ 0.1～1.5 の領域においてはほぼ成熟しており，商用ソルバーに標準実装され，比較的信頼性の高い解を出力する．これに伴い近年の CFD 手法では，非常に小さな数値誤差までも除去し，航空機全機の抵抗をより精度良く予測する事等に興味が注がれている[(1)]．しかしながら，衝撃波と乱流の干渉に代表される複雑な物理現象においては，いまだに手法による解への影響が大きい．例えば遷音速バフェット解析においては，数値流束，制限関数，再構築法，そして乱流モデルを適切に選ぶ事で，衝撃波および乱流を安定かつ精度良く捉える事が肝要である．Brunet ら[(2)]および Deck[(3)]は，Zonal DES を用いた航空機周りの 3 次元遷音速バフェット解析を行い，実験結果と良い一致を得ている．しかしこの方法では事前に剥離領域を特定しておく必要があり，汎用性に欠ける．また数値流束等，乱流モデル以外の影響については調べられていない．そして近年，航空機全機を解析対象とする場合には，非構造格子[(4)-(8)]を用いる事が一般的となりつつあるが，格子形状や分布が必ずしも滑らかでない非構造格子には特有の取り扱い[(9)-(13)]も必要となる．

こうした中，Winkler ら[(14)]は，代表的な数値流束の一つである Roe 法[(15)]の散逸項を流れの状態やセル形状に応じて調整する事で，非構造格子における乱流計算の精度を向上させた．

一方で，Roe 法にはいくつかの課題が指摘されており，近年の圧縮性流体解法ではより簡便かつ解への信頼性が高いとされる AUSM 族の手法（AUSM$^+$-up[(16)], SLAU[(17)], SLAU2[(18)]など）が用いられる事が多い．AUSM 族は，Roe 法に比べて下記の特長がある．

- 衝撃波において比較的堅牢[(19)(20)]
- 固有値行列が不要→低コスト，複雑な状態方程式に拡張可[(21)]
- 低速流れへ（時間積分への前処理と独立して）適用可[(22)]

そこで著者らは，従来の高解像度 Roe 法[(14)(23)]（以下，“HR (High Resolution) -Roe”と呼ぶ）に替わる手法として，散逸項を制御した AUSM 族スキーム“HR-SLAU”，“HR-SLAU2”および“HR-AUSM$^+$-up”を提案してきた．前々報ではその前準備として，散逸係数γ_{HR} を定数として与え，これを小さくする（散逸項を小さくする）事で実際に数値誤差が減る事を，亜音速2次元翼周りのテストケースにおいて実証した[(25)]．前報では次のステップとして，γ_{HR} の値を流れの条件に依存する変数として扱い，衝撃波の現れるケースについて本手法のロバスト性を示した[(25)]．本稿では，ダブルシアーにより生成される渦および一様等方性乱流を扱い，HR-SLAU2 および HR-AUSM$^+$-up の解像度を従来手法のそれと比較する．

2．支配方程式

支配方程式は圧縮性 Navier-Stokes 方程式であり，下記のように書ける（3 次元では下添字 k, l, m, n に 1, 2, 3 が代入される）．

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t}+\frac{\partial \mathbf{F}_k}{\partial x_k}=\frac{\partial \mathbf{Fv}_k}{\partial x_k} \tag{1a}$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{Q}=\begin{bmatrix}\rho\\ \rho u_l\\ \rho E\end{bmatrix},\quad \mathbf{F}_k=\begin{bmatrix}\rho u_k\\ \rho u_l u_k+p\delta_{lk}\\ \rho u_k H\end{bmatrix},\\ \mathbf{Fv}_k=\begin{bmatrix}0\\ \tau_{lk}\\ u_m\tau_{mk}+\kappa\dfrac{\partial T}{\partial x_k}\end{bmatrix}\end{array}\right\} \tag{1b}$$

$$\tau_{lk}=\mu\left[\left(\frac{\partial u_l}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_l}\right)-\frac{2}{3}\frac{\partial u_n}{\partial x_n}\delta_{lk}\right] \tag{1c}$$

ここで，ρ は密度，u_i は速度成分, E は全エネルギ，p は圧力，H は全エンタルピ($H = E + (p/\rho)$)である．気体は完全気体の空気（比熱比γ =1.4），プラントル数は Pr=0.72 である．分子粘性μ は一定とし，熱伝導係数κ とはκ=$c_p\mu$/Pr の関係がある（c_p は定圧比熱）．ただし非粘性計算（Euler 方程式）の場合はμ =0 である．これはデルタ形式で次のようになる．

$$\frac{V_i}{\Delta t}\Delta\mathbf{Q}_i + \sum_j \left(\mathbf{F}_{i,j} - \mathbf{Fv}_{i,j}\right) S_{i,j} = 0 \qquad (2)$$

ここで，V_i はセル i の体積，Δt は時間刻み，$\Delta\mathbf{Q}_i$ は保存量の時間変化，$\mathbf{F}_{ij}$ はセル i とその隣接セル j との界面 S_{ij} を通る非粘性（数値）流束である（図 1 を参照）．

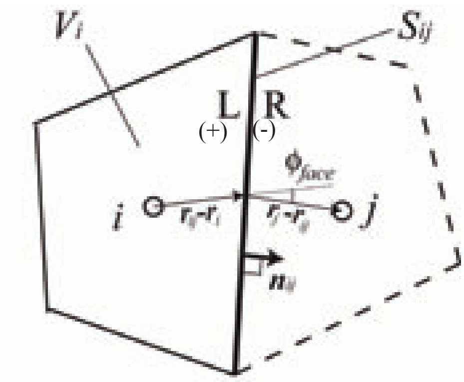

Fig. 1 Schematic of cell geometric properties.

３．結果および考察

３－１．HR-Roe

まず，従来方法である Roe[15]および HR-Roe[14][23] について説明する．HR-Roe のセル境界における数値流束を $\mathbf{F}_{HR\text{-}Roe}$ と表記すると，セル界面の左右における流束 $\mathbf{F}_{L/R}$ および保存量 $\mathbf{Q}_{L/R}$ を用いて，以下のように書ける．

$$\mathbf{F}_{HR-Roe} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{F}_L + \mathbf{F}_R\right) - \frac{\gamma_{HR}}{2}\left|\hat{\mathbf{A}}\right|\cdot\left(\mathbf{Q}_R - \mathbf{Q}_L\right) \qquad (3)$$

右辺第 1 項は中心差分項，第 2 項は散逸項である．ここで γ_{HR} は 0 から 1 の間の値であり，$\gamma_{HR}=0$ で中心差分，$\gamma_{HR}=1$ の時オリジナルの Roe 法に帰着する．ただし実際に $\gamma=0$ と設定すると，計算が不安定になる事が知られており，Winkler ら[14]は γ_{HR} を以下のように与えた．

$$\gamma_{HR} = \max\left(\gamma_{\min},\ \gamma_2,\ \gamma_w\right) \qquad (4a)$$

ここで $\gamma_{\min}=0.2$ とする[25]．また γ_2 は，

$$\gamma_2 = \begin{cases} 1 & \phi_{face} \geq 120^\circ \\ 1 - f_d\cdot\left[\dfrac{2}{3}\cos\left(\phi_{face}\right) + \dfrac{1}{3}\right] & 0^\circ \leq \phi_{face} < 120^\circ \end{cases} \qquad (4b)$$

である．ϕ_{face} はセル中心 i，セル境界の中心 ij，そしてセル中心 j の 3 点で作られる角度であり，これら 3 点が一直線上に並ぶ時にゼロとなる（図 1 参照）．この時は，$f_d=1$ ならば $\gamma_2=0$ である．ϕ_{face} が 120 度以上の時は，常にオリジナルの Roe が用いられる．そして f_d は DDES におけるパラメタ[26]であるが，本稿のような非粘性もしくは層流計算では単に 1 とする．

一方 γ_w は，以下を満たす場合に 1，そうでない場合は 0 とする．

$$\left[\left(\nabla\phi\right)_{ij}^{L}\cdot\mathbf{n}_{ij}\right]\cdot\left[\left(\nabla\phi\right)_c\cdot\mathbf{n}_{ij}\right] < 0 \qquad (4c)$$

$$\left[\left(\nabla\phi\right)_{ji}^{R}\cdot\mathbf{n}_{ij}\right]\cdot\left[\left(\nabla\phi\right)_c\cdot\mathbf{n}_{ij}\right] < 0 \qquad (4d)$$

ここで，$\phi = (\rho, u, v, w, p)$，$\left(\nabla\phi\right)_c\cdot\mathbf{n}_{ij} = \left(\phi_j - \phi_i\right)/\left|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i\right|$ である．物理量 ϕ_{ij} が振動する箇所(wiggle)で $\gamma_w=1$ となる為，γ_w は wiggle detector と呼ばれる．

以上より，セルが幾何的に整然と配置され，物理量が滑らかに分布する場合にのみ γ_{HR} が 1 より小さい値を取り，Roe 法が低散逸となる．そうでない場合にはオリジナルの Roe が使用される．なお安定性を維持する観点から，実際に $\gamma_{HR}<1$ が適用されるのは（セル境界法線方向の）運動量保存の式のみであり，質量保存の式およびエネルギ保存の式には修正は施されない．

なお本稿では，等方な 2 次元格子のみを対象とするため，単に $\gamma_2=0$ となる．また，式(4c)-(4d)は

$$\phi_1 \equiv \left(\phi_i - \phi_{i-1}\right)\cdot\left(\phi_{i+1} - \phi_i\right) < 0 \qquad (4e)$$

$$\phi_2 \equiv \left(\phi_{i+2} - \phi_{i+1}\right)\cdot\left(\phi_{i+1} - \phi_i\right) < 0 \qquad (4f)$$

と簡略化される．そして条件を整理すると，

$$\gamma_w = \frac{1 - sign\left(\min\left(\phi_1,\ \phi_2\right)\right)}{2} \qquad (4g)$$

となる．なお簡単の為，ここでは $\phi = p$ とする．

３－２．HR-SLAU および HR-SLAU2

次に Shima らによって発表され，以降，様々な空力問題，音響問題等に利用されている AUSM 族スキームである SLAU[17]とその散逸項制御について示す．SLAU の数値流束 $\mathbf{F}_{SLAU}$ は

$$\mathbf{F}_{SLAU} = \frac{\dot{m} + |\dot{m}|}{2}\mathbf{\Psi}^+ + \frac{\dot{m} - |\dot{m}|}{2}\mathbf{\Psi}^- + \tilde{p}\mathbf{N} \qquad (5a)$$

$$\mathbf{\Psi} = \left(1, u, v, w, H\right)^T,\quad \mathbf{N} = \left(0, n_x, n_y, n_z, 0\right)^T \qquad (5b)$$

と書け，質量流束は

$$\left(\dot{m}\right)_{SLAU} = \frac{1}{2}\left\{\rho_L\left(V_{nL} + \left|\overline{V}_n\right|^+\right) + \rho_R\left(V_{nR} - \left|\overline{V}_n\right|^-\right) - \frac{\chi}{\overline{c}}\Delta p\right\} \qquad (5c)$$

$$\begin{aligned} |\overline{V}_n|^+ &= (1-g)\,|\overline{V}_n| + g\,|V_{nL}|, \\ |\overline{V}_n|^- &= (1-g)\,|\overline{V}_n| + g\,|V_{nR}| \end{aligned} \qquad (5d)$$

$$\left|\overline{V}_n\right| = \frac{\rho_L\left|V_{nL}\right| + \rho_R\left|V_{nR}\right|}{\rho_L + \rho_R} \qquad (5e)$$

$$\begin{aligned} g &= -\max\left[\min\left(M_L, 0\right), -1\right] \\ &\cdot\min\left[\max\left(M_R, 0\right), 1\right] \quad \in [0, 1] \end{aligned} \qquad (5f)$$

$$\chi = (1 - \hat{M})^2 \qquad (5g)$$

$$\hat{M} = \min\left(1.0, \frac{1}{\overline{c}}\sqrt{\frac{\mathbf{u}_L{}^2 + \mathbf{u}_R{}^2}{2}}\right) \qquad (5h)$$

$$M = \frac{V_n}{\overline{c}} = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}}{\overline{c}} \qquad (5i)$$

$$\overline{c} = \frac{c_L + c_R}{2} \qquad (5j)$$

であり，圧力流束は

$$(\tilde{p})_{SLAU} = \frac{p_L + p_R}{2} + \frac{\mathrm{P}^+|_{\alpha=0} - \mathrm{P}^-|_{\alpha=0}}{2}(p_L - p_R) + (1-\chi)\left(\mathrm{P}^+|_{\alpha=0} + \mathrm{P}^-|_{\alpha=0} - 1\right)\frac{p_L + p_R}{2} \quad (5k)$$

$$\mathrm{P}^{\pm}|_{\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 \pm sign(M)), & if\ |M| \ge 1 \\ \frac{1}{4}(M \pm 1)^2 (2 \mp M) \pm \alpha M (M^2 - 1)^2, & otherwise \end{cases} \quad (5l)$$

である．式(5k)右辺の第 1 項は中心差分項，第 2 項および第 3 項は散逸項である．低速流れでは第 2 項は O(M^2)，第 3 項は O(M)となり，第 2 項は微小となる．そこで HR- SLAU では，この圧力流束の右辺第 3 項にγ_{HR}を乗ずる事で，式(5k)を以下のように変更する．

$$(\tilde{p})_{HR-SLAU} = \frac{p_L + p_R}{2} + \frac{\mathrm{P}^+|_{\alpha=0} - \mathrm{P}^-|_{\alpha=0}}{2}(p_L - p_R) + \gamma_{HR} \cdot (1-\chi)\left(\mathrm{P}^+|_{\alpha=0} + \mathrm{P}^-|_{\alpha=0} - 1\right)\frac{p_L + p_R}{2} \quad (6)$$

ここでγ_{HR}は，HR-Roe と同じく式(4a)で与える．式(5a)から明らかであるように，圧力流束は運動量保存の式にのみ含まれる為，HR-SLAU でも HR-Roe と同じく運動量保存の式の散逸項のみが制御される．

なお，SLAU2[18]は圧力流束の散逸項（右辺第 3 項）を式(5k)から以下のように変更したものである．

$$(\tilde{p})_{SLAU2} = \frac{p_L + p_R}{2} + \frac{\mathrm{P}^+|_{\alpha=0} - \mathrm{P}^-|_{\alpha=0}}{2}(p_L - p_R) + \sqrt{\frac{\mathbf{u}_L^{\ 2} + \mathbf{u}_R^{\ 2}}{2}} \cdot \left(\mathrm{P}^+|_{\alpha=0} + \mathrm{P}^-|_{\alpha=0} - 1\right)\overline{\rho c} \quad (7a)$$

$$\bar{\rho} = \frac{\rho_L + \rho_R}{2} \quad (7b)$$

これに対しても HR-SLAU と同様の改良が可能である（HR-SLAU2）．

$$(\tilde{p})_{HR-SLAU2} = \frac{p_L + p_R}{2} + \frac{\mathrm{P}^+|_{\alpha=0} - \mathrm{P}^-|_{\alpha=0}}{2}(p_L - p_R) + \gamma_{HR} \cdot \sqrt{\frac{\mathbf{u}_L^{\ 2} + \mathbf{u}_R^{\ 2}}{2}} \cdot \left(\mathrm{P}^+|_{\alpha=0} + \mathrm{P}^-|_{\alpha=0} - 1\right)\overline{\rho c} \quad (7c)$$

散逸量は HR-SLAU の場合に比べ，比熱比 1.4 倍になる（完全気体の場合）．前報[25]より，HR-SLAU2 と HR-SLAU の振る舞いはほぼ同じだが，衝撃波が存在する場合には HR-SLAU2 の方がやや安定である事が確認されている．従って本稿では，HR-SLAU2 のみを取り扱う．ちなみにこれらの手法では，一様流マッハ数 M_∞，参照速度 V_{ref}などの参照パラメタは依然として不要である．

３－３．HR-AUSM$^+$-up

最後に，Liou によって提案された AUSM$^+$-up[16]およびその数値粘性制御について述べる．AUSM$^+$-up の数値流束を SLAU 等と同様に

$$\mathbf{F}_{AUSM+-up} = \frac{\dot{m} + |\dot{m}|}{2}\mathbf{\Psi}^+ + \frac{\dot{m} - |\dot{m}|}{2}\mathbf{\Psi}^- + \tilde{p}\mathbf{N} \quad (8a)$$

$$\mathbf{\Psi} = (1, u, v, w, H)^T, \quad \mathbf{N} = (0, n_x, n_y, n_z, 0)^T \quad (8b)$$

と表現するとき，質量流束は

$$(\dot{m})_{AUSM+-up} = M_{1/2} c_{1/2} \begin{cases} \rho_L & if\ M_{1/2} > 0 \\ \rho_R & otherwise \end{cases} \quad (8c)$$

$$M_{1/2} = \mathrm{M}^+ + \mathrm{M}^- + M_p \quad (8d)$$

$$\mathrm{M}^{\pm} = \begin{cases} \frac{1}{2}(M \pm |M|), & if\ |M| \ge 1 \\ \pm\frac{1}{4}(M \pm 1)^2 \pm \frac{1}{8}(M^2 - 1)^2, & otherwise \end{cases} \quad (8e)$$

$$M_p = -\frac{K_p}{f_a}\max(1 - \sigma\overline{M}^2, 0)\frac{p_R - p_L}{\bar{\rho} c_{1/2}^2} \quad (8f)$$

$$\left.\begin{aligned} c_{1/2} &= \min(\tilde{c}_L, \tilde{c}_R), \\ \tilde{c}_L &= c^{*2}/\max(c^*, V_n^{\ +}), \\ \tilde{c}_R &= c^{*2}/\max(c^*, -V_n^{\ -}) \end{aligned}\right\} \quad (8g)$$

$$c^{*2} = \frac{2(\gamma - 1)}{(\gamma + 1)}H \quad (8h)$$

$$\alpha = \frac{3}{16}\left(-4 + 5f_a^2\right) \quad (8i)$$

$$f_a(M_o) = M_o \cdot (2 - M_o) \quad (8j)$$

となる．ここで K_p=0.25, σ=1.0,

$$M_o^{\ 2} = \min\left(1, \max\left(\overline{M}^2, M_{co}^2\right)\right) \quad (8k)$$

$$\overline{M}^2 = \frac{V_n^{+2} + V_n^{-2}}{2c_{1/2}^2} \quad (8l)$$

であり，カットオフ・マッハ数 M_{co}は一様流マッハ数 M_∞等で与えられるユーザ指定パラメタである．

そして圧力流束は，

$$(\tilde{p})_{AUSM+-up} = \mathrm{P}^+|_{\alpha} \cdot p_L + \mathrm{P}^-|_{\alpha} \cdot p_R + p_u \quad (8m)$$

$$p_u = -K_u \cdot \mathrm{P}^+ \cdot \mathrm{P}^- \cdot (\rho_L + \rho_R) \cdot (f_a c_{1/2}) \cdot \left(V_n^{\ -} - V_n^{\ +}\right) \quad (8n)$$

であり，K_u=0.75 とする．

M_{co}=M_∞とすれば（注：以下，特に断らない限りこの設定とする），超音速流れでは M_∞の大きさに依らず f_a=1 となる．一方で低速流れでは，式(8m)は次のように近似される．

$$(\tilde{p})_{AUSM+-up} \to \frac{p_L + p_R}{2} + O(M^2) \cdot \frac{15}{16} \cdot (M_L p_L - M_R p_R) - O(M) \cdot K_u \cdot \frac{1}{4} \cdot 2\bar{\rho} \cdot c_{1/2}^2 \cdot (M_R - M_L) \quad (8o)$$

右辺の第 1 項は中心差分項，第 2 項および第 3 項は散逸項であり，第 2 項は微小である．そこで HR-AUSM$^+$-up でも，HR-SLAU と同様に圧力流束の右辺第 3 項の散逸項を制御する．すなわち，

$$(\tilde{p})_{HR-AUSM+-up} = \mathrm{P}^+|_{\alpha} \cdot p_L + \mathrm{P}^-|_{\alpha} \cdot p_R + \gamma_{HR} \cdot p_u \quad (9)$$

である．

４．数値例

前節で述べた数値流束を用いて数値計算を行う．本稿では散逸係数γ_{HR}を

$$\gamma_{HR} = \max(\gamma_{\min},\ \ \gamma_2,\ \ \gamma_w) \quad (4a)$$

で与え，$\gamma_{\min}$ =0.2, γ_2 =0,

$$\gamma_w = \frac{1 - sign(\min(\phi_1,\ \ \phi_2))}{2} \quad (4g)$$

である（ただし$\phi = p$）．

空間精度は 2 次とする．非粘性項についてはκ= 1/3 の MUSCL[27]を limiter 無しで使用する．粘性計算の場合，粘性項は中心差分により求める．時間積分には 4 次の Runge-Kutta 法を用いる．

４－１．ダブルシアー問題（Double Shear Layer 問題）

この問題は E-Shu[28]が非粘性非圧縮性流体として取り扱い，その後 Ishiko ら[29]が圧縮性流体に拡張したものである．計算を開始すると，二つのせん断層(shear layer)が徐々に渦を生成していく．

計算空間は周期境界条件を課した[0, 2π]×[0, 2π]とし，128^2 セルで等間隔に分割する（$\Delta x = \Delta y = 2\pi/128$）．速度の初期条件は

$$u(x,y) = \begin{cases} U_\infty \tanh((y - \pi/2)/\delta_1), & y \le \pi \\ U_\infty \tanh((3\pi/2 - y)/\delta_1), & y > \pi \end{cases} \qquad (10a)$$

$$v(x,y) = \delta_2 \sin(x) \qquad (10b)$$

であり，$U_\infty = 1.0$, $\delta_1 = \pi/15$, $\delta_2 = 0.05$ とする．Ishiko ら[29]は，この問題を（低速の）圧縮性流体として扱う際，初期密度および初期圧力を一定と仮定した．そして初期圧力を様々な値で与える事で，マッハ数の異なる種々の初期条件を設定した[1]．これを踏まえ，ここでは密度と圧力の初期条件を次のように与える．

$$\rho = 1.0 \qquad (11a)$$

$$p = 1/(\gamma M_\infty^2) \qquad (11b)$$

こうする事で，音速 $c = (\gamma p/\rho)^{0.5} = 1/M_\infty = U_\infty/M_\infty$となる．

一様流マッハ数 M_∞は 0.1 もしくは 0.01 とする．それぞれの場合の時間刻みはΔt=1.e-3（CFL≈0.23）およびΔt=1.e-4（CFL≈0.21）とし，4 次精度 Runge-Kutta 法で t=8.0 まで計算を行う（本稿ではマッハ 0.01 の結果のみ示す）．なお 512^2セル（Very Fine 格子）で Roe を用いた計算（Δt=1.e-3; CFL≈0.93）も行い，この結果を参照データとする．

図 2 は HR-SLAU2, SLAU2, HR-AUSM$^+$-up (M_{co}=0.1), AUSM$^+$-up (M_{co}=0.1), HR-Roe, そして Roe の渦度等値面である．なお $M_{co}=M_\infty$および $M_{co}=3M_\infty$とした場合の HR-AUSM$^+$-up および AUSM$^+$-up は，計算が発散してしまった．このため，これらの手法については $M_{co}=10M_\infty=0.1$ の場合のみの結果を示した．

HR-SLAU2 と SLAU2 は渦を精度良く捉えている．しかし HR-AUSM$^+$-up (M_{co}=0.1), AUSM$^+$-up (M_{co}=0.1) では，M_∞=0.1 の場合と比べて渦がやや拡散している．これは M_{co}=0.1 という大きなカットオフ・マッハ数を用いたために，ロバスト性が確保された代償として，散逸量が増大してしまった事に因る（この時の式(8o)の第 3 項の散逸項は，$O(M_{co})$である）．そして HR-Roe および Roe では，更に渦が拡散している．これらの手法が低速流れ向けでなく，散逸項が $O(1)$である為である．これらの事は，図 3 の $x = \pi$ 断面における速度 v の分布からも確認できる．そして図 3c, 3d より，HR（高解像度）手法の方が，オリジナルの方法よりも実際に高解像度である（512^2 セルの場合に近い）事も分かった．

４－２．一様等方性乱流

一様等方性乱流の減衰を計算した．検証には，Comte-Bellote らの格子乱流の実験データ[30]を用いた．無次元時間 t^*=42 を初期条件とし，t^*=98 におけるスペクトルを実験と比較した．初期条件における変動速度の rms は 0.22m/s である．これをマッハ数にすると $M=6\times10^{-4}$であり，非常に遅い流れを解くことになる．紙面の都合上，計算条件等は文献(31)に譲る事として，ここでは結果のみを示す（図 4）．図 4a より，保存性を考慮した中心差分法である Kinetic Energy Preserving (KEP)法が全体的に実験に良い一致を示している．Roe や AUSM$^+$-up は全体的に減衰しているが，SLAU や SLAU2 は低周波において良い一致を示すことが分かった．また，AUSM$^+$-up は M_{co}=1 まで上げないと計算ができなかった．この場合の結果は，Roe とほぼ同等となった．図 4b に，HR-Roe と HR-SLAU2 の効果を示す．先ほどのダブルシアー問題と同様，HR-SLAU2 が最も KEP に近く，次いで SLAU2 となり，いずれも HR-Roe，Roe よりも良い結果が得られた．なお，HR-SLAU2 はγ_{HR} =0.2 を採用したが，HR-Roe ではγ_{HR} =0.2 で計算ができなかったため，γ_{HR} =0.5 の結果を示している．

５．結論

散逸項を制御する事で，数値誤差の少ない AUSM 族流束関数（HR-SLAU2 および HR-AUSM$^+$-up）を提案し，ダブルシアー問題でオリジナルの AUSM 族手法や既存の散逸項制御 Roe (HR-Roe)との比較を行った．

・HR-SLAU2 は低マッハ数になるほど散逸量が減る為，低速（マッハ 0.01）では最も高解像度であった．

・HR-AUSM$^+$-up はカットオフ・マッハ数を一様流マッハ数の 10 倍にする必要があった．その結果，渦の解像度は中程度であった．

・HR-Roe はマッハ 0.01 では渦が拡散してしまった．

・いずれの高解像度手法もオリジナルの手法に比べて解像度の向上が見られた．

一様等方性乱流（マッハ 6×10^{-4}）においても，ほぼ同様の結果が得られた．HR-SLAU2 では，マッハ数を下げても安定して高解像度な結果が得られた．

謝辞

JAXA 宇宙科学研究所の野々村拓助教，JAXA 情報・計算工学センターの嶋英志博士には，圧力流束の第 2 項について貴重なご意見をいただきました．ダブルシアーについては，JAXA 航空本部の石向桂一博士に貴重なご助言を頂きました．感謝致します．

参考文献

1) Mavriplis, D.J., et al.: Grid Quality and Resolution Issues from the Drag Prediction Workshop Series, *J. Aircraft*, Vol. 46, No. 3 (2009), pp. 935-950.
2) Brunet, V. and Deck, S.: Zonal-Detached Eddy Simulation of Transonic Buffet on a Civil Aircraft Type Configuration, AIAA 2008-4152, 2008.
3) Deck, S.: Zonal-Detached Eddy Simulation of the Flow around a High-Lift Configuration, *AIAA J.*, vol. 43, No. 11, pp 2372-2384, 2005.
4) Wang, Z.J.: A Quadtree-based Adaptive Cartesian/Quad Grid Flow Solver for Navier-Stokes Equations, *Computers and Fluids*, Vol. 27, 1998, pp. 529-549.
5) Luo, H., Spiegel, S., and Lohner, R.: Hybrid Grid Generation Method for Complex Geometries, *AIAA J.*, Vol.48 (2010), pp. 2639-2647. doi:10.2514/1.J050491
6) Kidron, Y., Mor-Yossef, Y., and Levy, Y.: Robust Cartesian Grid Flow Solver for High-Reynolds-Number Turbulent Flow Simulations, *AIAA J.*, Vol.48 (2010), pp. 1130-1140.
7) Hashimoto, A., Murakami, K., Aoyama, T., Ishiko, K., Hishida, M., Sakashita, M., and Lahur, P.: Toward the Fastest Unstructured CFD Code 'FaSTAR,' AIAA-2012-1075, 2012.
8) Kitamura, K., Fujimoto, K., Shima, E., Kuzuu, K., and

[1] 石向桂一(JAXA)，私信，2014年5月9日．

Wang, Z.J.: Validation of an Arbitrary Unstructured CFD Code for Aerodynamic Analyses, *Trans. JSASS*, Vol.53, No.182, 2011, pp.311-319.
9) Mavriplis, D.J.: Revisiting the Least-Squares Procedure for Gradient Reconstruction on Unstructured Meshes, AIAA Paper 2003-3986, 2003.
10) Park, J.S., Yoon, S.H., and Kim, C.: Multi-dimensional Limiting Process for Hyperbolic Conservation Laws on Unstructured Grids, *J. Comput. Phys.*, Vol. 229 (2010), pp.788-812.
11) Venkatakrishnan, V.: Convergence to Steady State Solutions of the Euler Equations on Unstructured Grids with Limiters, *J. Comput. Phys.*, Vol. 118, 1995, pp.120-130.
12) Michalak, C., and Ollivier-Gooch, C.: Accuracy Preserving Limiter for the High-order Accurate Solution of the Euler Equations, *J. Comput. Phys.*, Vol. 228 (2009), pp. 8693-8711.
13) Kitamura, K., and Shima, E.: Simple and Parameter-Free Second Slope Limiter for Unstructured Grid Aerodynamic Simulations, *AIAA J.*, Vol. 50, No. 6, 2012, pp.1415-1426.
14) Winkler, C.M., Dorgany, A.J. and Mani, M.: A Reduced Dissipation Approach for Unsteady Flows on Unstructured Grids, AIAA 2012-0570, 2012.
15) Roe, P.L.: Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes, *J. Comput. Phys.*, Vol. 43, 1981, pp.357-372.
16) Liou, M.S.: A Sequel to AUSM, Part II: AUSM$^+$-up for All Speeds, *J. Comput. Phys.,* Vol. 214, 2006, pp. 137-170.
17) Shima, E. and Kitamura, K.: Parameter-Free Simple Low-Dissipation AUSM-Family Scheme for All Speeds, *AIAA J.*, Vol.49, No.8, 2011, pp.1693-1709.
18) Kitamura, K. and Shima, E.: Towards shock-stable and accurate hypersonic heating computations: A new pressure flux for AUSM-family schemes, *J. Comput. Phys.*, Vol.245, 2013, pp.62-83.
19) Pandolfi, M. and D'Ambrosio, D.: Numerical Instabilities in Upwind Methods: Analysis and Cures for the "Carbuncle" Phenomenon, *J. Comput. Phys.*, Vol. 166, No. 2, 2001, pp.271-301.
20) Kitamura, K., Roe, P., and Ismail, F.: Evaluation of Euler Fluxes for Hypersonic Flow Computations, *AIAA J.*, Vol. 47, No.1, 2009, pp.44-53.
21) Liou, M.S., Chang, C.H., Nguyen, L., and Theofanous, T.G.: How to Solve Compressible Multifluid Equations - A Simple, Robust, and Accurate Method, *AIAA J.*, Vol. 46, No.9, 2008, pp. 2345-2356.
22) Kitamura, K., Shima, E., Fujimoto, K., and Wang, Z.J.: Performance of Low-Dissipation Euler Fluxes and Preconditioned LU-SGS at Low Speeds, *Communi. in Comput. Phys.*, Vol.10, No.1, 2011, pp.90-119.
23) Tajallipour, N., Owlam, B.B., and Paraschivoiu, M.: Self-adaptive upwinding for large eddy simulation of turbulent flows on unstructured elements. *J. Aircraft*, 46(3):915–926, 2009.
24) 北村圭一，橋本敦：非構造格子高解像度計算に向けた流束関数の数値粘性制御，第 27 回数値流体力学シンポジウム，C04-4, 2013.
25) 北村圭一，橋本敦：流束関数の数値粘性制御と高次精度化―非構造格子高解像度計算に向けて，平成 25 年度空力班シンポジウム，2L3, 2014.
26) Mohamed, K., Nadarajah, S., and Paraschivoiu, M.: Detached-eddy simulation of a wing tip vortex at dynamic stall conditions. *J. Aircraft*, 46(4):1302–1313, 2009.
27) Van Leer, B.: Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme. V. A Second-Order Sequel to Godunov's Method, *J. Comput. Phys.*, Vol. 32, 1979, pp.101-136.

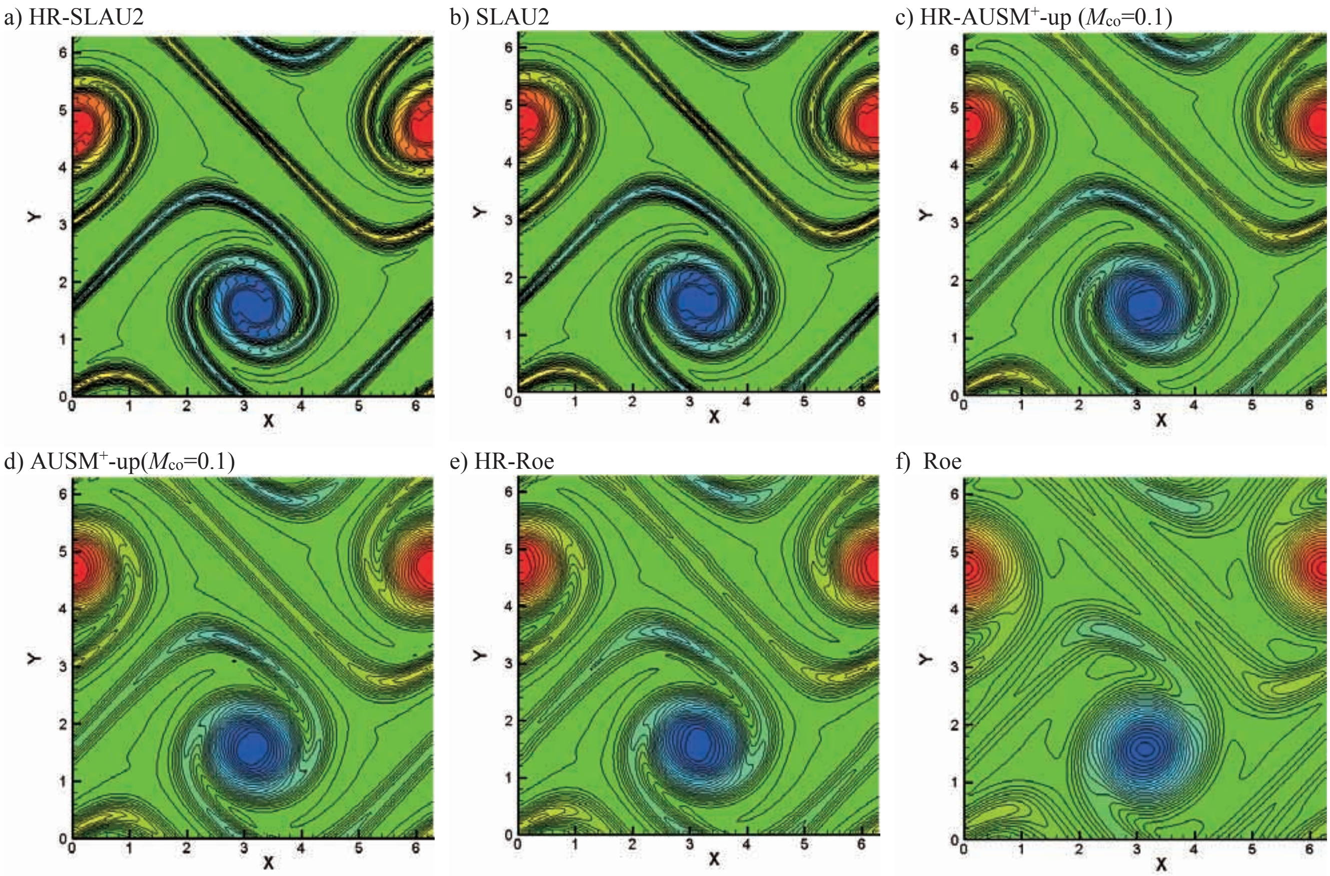

Fig. 2 Vorticity contours at t=8 of ***M*=0.01** double shear layer cases (a) HR–SLAU2, (b) SLAU2, (c) HR-AUSM$^+$-up (M_{co}=0.1), (d) AUSM$^+$-up (M_{co}=0.1), (e) HR-Roe, (f) Roe.

28) E, W. and Shu, C.W.: A Numerical Resolution Study of High Order Essentially Non-oscillatory Schemes Applied to Incompressible Flow, *J. Comput. Phys.*, Vol. 110 (1994), pp. 39-46.
29) Ishiko, K., Ohnishi, N., and Sawada, K.: Implicit LES for Two-Dimensional Turbulence Using Shock Capturing Monotone Scheme, AIAA 2006-703, 2006.
30) Comte-Bellot, G., and Corrsin, S.: Simple Eulerian Time Correlation of Full- and Narrow-band Velocity Signal in Grid-Generated 'Isotropic' Turbulence, *J. Fluid Mech*, 48, 1971, pp. 273-337.
31) 橋本敦，石向桂一，石田崇，青山剛史，竹川国之，菅原瑛明，林謙司：遷音速高迎角領域における定常/非定常空力解析，第 46 回流体力学講演会／第 32 回航空宇宙数値ｼﾐｭﾚｰｼｮﾝ技術ｼﾝﾎﾟｼﾞｳﾑ，2A08, 2014.

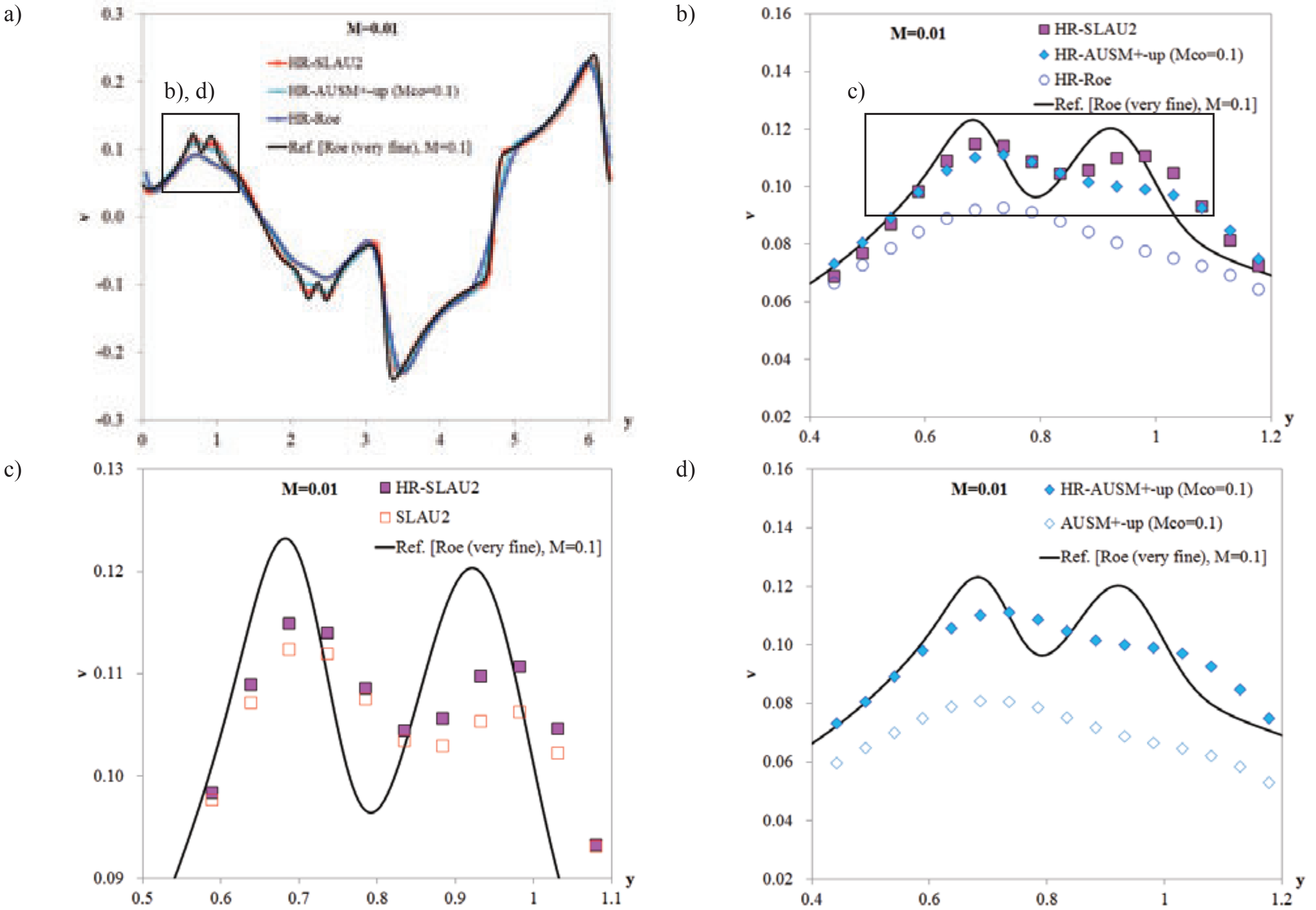

Fig. 3 Velocity v profiles along $x=\pi$ at t=8 of $\boldsymbol{M}$**=0.01** double shear layer cases (a) HR schemes, (b) HR schemes (close-up), (c) HR-SLAU2, (d) HR-AUSM^{+}-up.

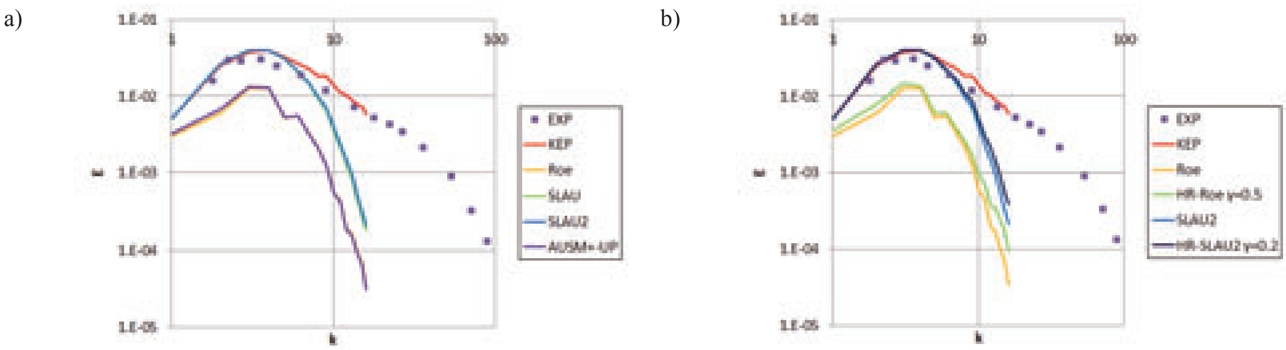

Fig. 4 Isotropic turbulence results