

Multipole Analysis による超音速飛翔体の近傍場波形の改善

金森正史, 橋本敦, 青山剛史, 牧野好和 (宇宙航空研究開発機構),
石川敬掲 (三向ソフトウェア開発), 山本雅史 (計算力学研究センター), 飯村拓哉 (菱友システムズ)

Improvement of near-field waveform from supersonic vehicle using multipole analysis

Masashi Kanamori, Atsushi Hashimoto, Takashi Aoyama, Yoshikazu Makino(JAXA),
Hiroaki Ishikawa(Sanko Software), Masafumi Yamamoto(RCCM) and Takuya Iimura(Ryoyu systems)

Abstract

The method for predicting sonic boom consists basically on the combination of the computational fluid dynamics(CFD) analyses on the near-field and waveform propagation analyses on the far-field. It is, however, a tough work to conduct CFD analyses in order to obtain accurate initial conditions for estimating far-field waveform. For a vehicle with complex geometry, several lengths of the vehicle must be calculated with CFD analysis, which is unfavorable from a view point of computational costs. The multipole analysis technique is one of the solutions of this problem. In the analysis, near-field waveforms are modified so as to attenuate only in the circumferential direction, which is available by introducing the distributions of multipoles. As a result, a far-field waveform becomes independent of the location where the initial condition is obtained.

1 はじめに

近年, 世界各国で超音速旅客機 (SST) の実現を目指した研究開発が行われているが, その実現に当たり環境適合性が大きな壁となっている. 実際, 2003 年に退役したコンコルドは, 非常に大きなソニックブームを発生させるために, 超音速飛行は洋上に限られていた. そのため, 今後の SST 開発に当たっては, ソニックブームをいかに低減するかが最重要課題といっても過言ではない. 我が国では, 静粛超音速旅客機の実現に向けて, ソニックブームを半減させるための先進的設計概念及び手法を実証・評価するためのプロジェクトとして D-SEND(Drop test for Simplified Evaluation of Non-symmetrically Distributed sonic boom) プロジェクトが進められている^{1, 2)}. このプロジェクトは 2 つのステップからなり, それぞれ D-SEND#1 及び D-SEND#2 と名付けられている. 2011 年に行われた D-SEND#1 では, 軸対称供試体の落下に伴って発生するソニックブームを空中で計測するための技術の習得に成功しただけでなく³⁾, 拡張 Burgers 方程式による予測結果が, 立ち上がり時間を含む波形全体で実験値と良く一致した⁴⁾. 今年度予定されている D-SEND#2 は, 非軸対称の供試体を落下させ, 先端及び後端の低ブーム設計効果を定性的に実証するだけでなく, 低ブーム波形取得技術の確立及び波形伝播解析技術の検証を目的としている.

現在, ソニックブームの遠方場波形を推算する方法として一般的なものが, CFD と音響伝播方程式とのカップリングである. その概念図を Fig.1 に示す. すなわち, 物体付近の近傍場を CFD で詳細に解析し, そこで得られた近傍場波形を, 波形パラメータ法や拡張 Burgers 方程式に代表される音響伝播に関する方程式によって解析する. 注意すべき点は, 遠方場への音響伝播方程式は, あくまで機体から放射する方向に対する 1 次元的な伝播を考えるものであり, 物体軸を中心に考えたとき回折や非線形効果によって生じる周方向成分の変動は, CFD 解析によって取り扱う必要がある, という点である. 飛翔体が軸対称やそれに近い形状であれば, 周方向の変動成分は小さいと考えられるが, 一般的な SST 形状は, 主翼を中心として非軸対称成分が大きい. この点は, D-SEND#2 供試体である S3CM(S-Cube Concept Model) についても同様である. 従って, そのような現実的な飛翔体に対してソニックブームの波形を予測するためには, 近傍場の CFD 解析に対して周方向の変動を十分に減衰させることのできる解析領域を考えることが必要であり, その結果計算負荷が大きくなる.

これを解決する方法として Multipole Analysis⁵⁾ が知られている. Multipole とは, 湧き出しや 2 重湧き出しといったポテン

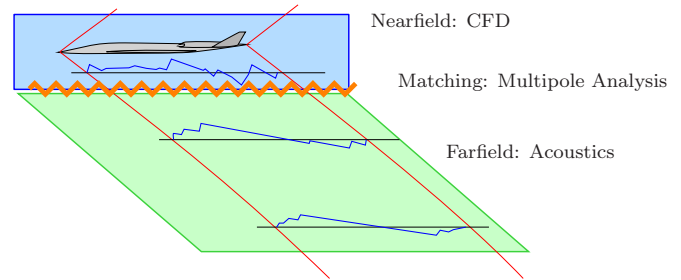


Fig.1 Processes for predicting far-field sonic boom waveform

シャル流の基本解であり, 物体と等価な Multipole 分布を推算することによって, 周方向の整理・統合の効果を近傍場で加えることができる方法である. この方法は, 多くの研究者によって実装され実際に利用されているが^{6, 7, 8)}, 我が国ではソニックブームの推算に対して適用した例はこれまでにない.

そこで本稿は, Multipole Analysis が地上波形に及ぼす影響を調べ, CFD 解析との親和性について議論を行うことを目的とする. また, Multipole Analysis が周方向の圧力分布を用いることから, 飛翔体直下だけでなく, 多方向へのソニックブーム伝播解析技術についても触れる.

2 Multipole Analysis による近傍場波形の改善

本節では, Multipole Analysis の手法についてレビューする.

物体から発生した衝撃波はマッハ円錐に沿って放射状に広がりながら, 減衰や整理・統合が起こる. それらの作用は, 半径方向及び周方向に同時に発生するため, 本来は各方向の作用を分離することはできない. そのため, Burgers 方程式解析や波形パラメータ法によって半径方向のみの伝播を考える場合, その初期値は十分に大きな半径を取った CFD 解析を行うことによって, 周方向の減衰や整理・統合を加味する必要がある. このような周方向の減衰及び整理・統合を, 近傍場の情報のみで行うことを可能にするのが Multipole Analysis である.

2.1 Multipole Analysis の原理

Multipole Analysis とは, Fig.2 に示すように, 半径 H の円筒面上の近傍場圧力分布から, それを発生させた物体と等価な Multipole 分布を求め, 近傍場波形を改善する手法である. Fig.2 は Multipole Analysis の一連の操作をまとめたものであり, 3 つのステップからなっている.

まず, (1) 円筒面の軸に対する断面における圧力分布を F 関数⁹⁾ へと変換し, それを分解することで各 pole の強度を求め

る。 F 関数を θ 方向に Fourier 余弦級数展開した際の各係数が 0 次, 1 次, …の各 pole の強度に対応する。この操作が, 機体形状を Multipole 分布に置き換えることに相当する。なお, 0 次及び 1 次 pole はそれぞれ, 機体の体積寄与及び揚力寄与を表す成分である。これらはそれぞれ, 機体が流体を押しよけることによる効果及び揚力の発生に伴って流れが下方へと誘起されることによる効果を表す。また, 2 次以上の pole は機体の非軸対称性を表す成分に相当する。次に, (2) 各 pole に対応する圧力分布の強度を減衰させる。Fig.2 にもあるように, 0 次 pole は軸対称な圧力分布を与えるものであり, 軸対称な物体に対しては 0 次 pole のみが現れるということに注意されたい。各 pole に応じて減衰率は理論的に示されているが, 一般に pole の次数に応じて減衰率は大きくなる。高次 pole は圧力分布の非軸対称成分に対応するという点に注意すると, この減衰操作は周方向の減衰を考えると相当すると言える。ただし, 考えている円筒面の半径は H のままであり, 半径方向への伝播による減衰は加味されない。最後に, (3) 減衰させた各圧力分布の強度を重ね合わせ, 機体断面における圧力分布を再構成する。

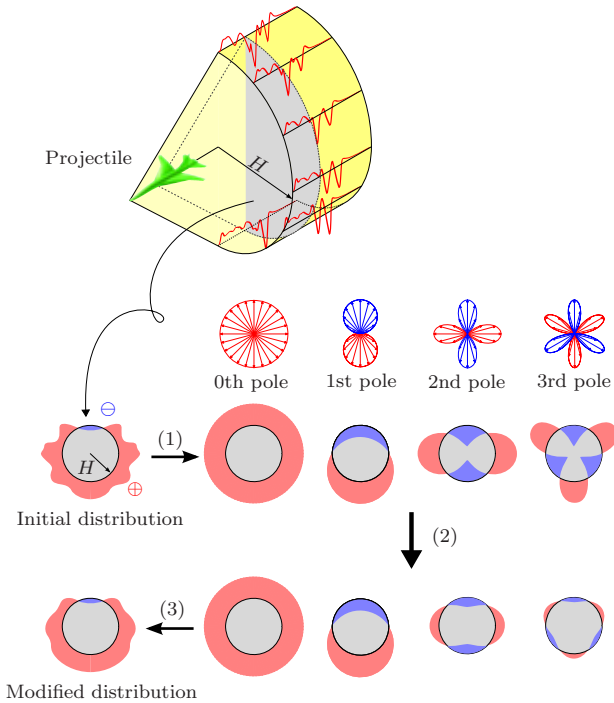


Fig.2 Schematic of the principles of multipole analysis

2.2 アルゴリズム

前節で述べた原理を具体的な数式を用いて表すと, 次のようなアルゴリズムにまとめられる。

1. 半径 H の円筒面上の近傍場圧力波形 $p(\tau, \theta, H)$ を用いて, F 関数の Fourier 成分 $F_n(\tau, H)$ を求める

$$F_n(\tau, H) = \frac{\sqrt{2\beta H}}{\pi\gamma M_\infty^2} \int_0^\pi p(\tau, \theta, H) \cos n\theta d\theta \quad (1)$$

ここで n は Fourier 級数の次数を表し, これが pole の次数に相当する。 τ, θ は円筒面のそれぞれ高さ方向及び周方向の座標を表す。また $\beta = \sqrt{M_\infty^2 - 1}$ である。余弦級数の係数のみを考えるのは, 機体及び流れ場が左右対称であることを仮定しているためである。

2. F 関数の Fourier 成分から, 物体と等価な Multipole 分布 $A_n(\xi)$ を求める

$$F_n(\tau, H) = \int_0^\tau \frac{A_n(\xi)}{\sqrt{\tau - \xi}} G_n(\tau - \xi, H) d\xi \quad (2)$$

ここで G_n が, 各 pole の減衰率に対応する項であり, pole の次数 n が上がるにつれて大きく減衰する。

3. Multipole 分布から, 無限遠方における F 関数の Fourier 成分 $F_n^\infty(\tau)$ を求める

$$F_n^\infty(\tau) = \lim_{H \rightarrow \infty} F_n(\tau, H) = \int_0^\tau \frac{A_n(\xi)}{\sqrt{\tau - \xi}} d\xi \quad (3)$$

4. Fourier 成分から, 無限遠方における F 関数 $F^\infty(\tau, \theta)$ を求める

$$F^\infty(\tau, \theta) = \sum_{n=0}^N F_n^\infty(\tau) \cos n\theta \quad (4)$$

上記の手順 3 において, 半径が無限大の極限をとることによって無限遠方の F 関数成分を出したが, この時減衰を表す項 ($G_n(\tau - \xi, H)$) は周方向の整理・統合を表し, 半径方向, すなわち主に伝播していく方向の減衰は考慮していない。従って, Multipole Analysis によって得られる, 修正された近傍場波形は, 周方向の整理・統合のみを無限遠点まで考慮した, 物理的には意味のないものとなるが, これを Burgers 方程式解析や波形パラメータ法によって遠方場へ伝播させることによって, 半径方向及び周方向のいずれも考慮した波形が得られる。このことは, 異なる半径 H において得られた波形であっても, Multipole Analysis で処理することで, 遠方場の波形は原理的に H に依存しない, ということの意味する。そのため, H を小さくする, すなわち CFD 解析領域を小さくすることが可能になるのである。しかし, 実際に Multipole Analysis を導入したものとしていないものとを比較し, その効果を検証した例は我が国ではほとんどない。これを行うのが, 本稿の目的の一つである。

3 解析例

本節では, 前節で述べた Multipole Analysis を, D-SEND#1 及び#2 の供試体である LBM(Low Boom Model) 及び S3CM の 2 つに適用した結果を示す。LBM はほぼ軸対称であり, Multipole Analysis を用いた結果は用いないものと比較してほとんど違いがないと考えられる。逆に, そのような結果が得られるかどうかを確認することで, 本法の妥当性を検証する。それを基に, 本題である S3CM の Multipole Analysis の効果を調べる。

いずれも $H/L < 5$ 程度の近傍場を CFD 解析によって求め, その解析で得られた近傍場波形を JAXA で開発中の拡張 Burgers 方程式解析プログラム Xnoise^{10, 11, 12, 13, 14}) によって遠方場に伝播させる。ここで H/L は, 機体長 L に対する円筒面半径 H の割合である。CFD 解析は, 非構造格子による解析と構造格子による解析を組み合わせて実施している。すなわち, 物体表面近傍を JTAS^{15, 16}) で非構造的に解析することによって, 複雑な物体形状周りの流れを再現することが可能になる。そして, $H/L > 0.2$ 程度から遠方の部分を UPACS¹⁷) による構造格子の解析で行うことで, 機体から発生した衝撃波を減衰させることなく解析することが可能になる。以降の解析例で用いた LBM 及び S3CM の飛行条件及び解析条件を Table 1 に示す。

以上の CFD 解析を行った後, 流れ方向を軸に持つ半径 H/L の円筒面を定義し, その面上における圧力分布を求める。本稿では, 円筒面の定義及び圧力値の補間を行う専用の Python スクリプトを, 可視化ソフトウェアの FieldView で読み出し, Multipole Analysis への入力データを作成した。LBM 及び S3CM のいずれも, 機体先端を原点に設定し, 主流方向に軸を設定して円筒面を定義した。流れ方向及び周方向の分割数はそれぞれ 451 点及び 91 点に設定した。周方向の分割数には注意が必要である。実際, 周方向へ Fourier 展開をしているため, ナイキスト周波数とその分割数に依存する。本解析は左右対称を仮定しているため, 半周の分割数を $n - 1$ 点とすると, 理論上 n 次 pole まで考慮す

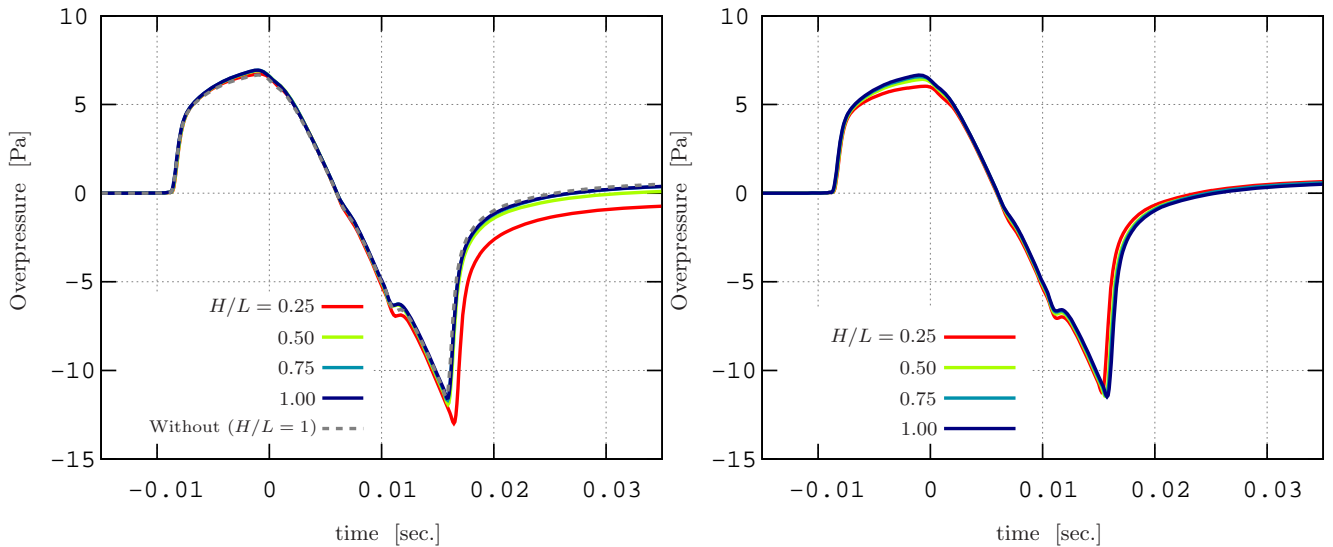


Fig.3 Far-field waveforms for LBM with (left) and without (right) Multipole analysis

Table 1 Specs and flight conditions for LBM and S3CM

	LBM		S3CM
Specification			
length	m	8	7.68
span	m	0.31	3.51
flight Mach number	-	1.7	1.3
lift coefficient	-	0	0.12
angle of attack	deg	0	4.45
Flight condition			
flight-path angle	deg	-90	-50
altitude of			
flight vehicle	km	4.64	7.8
measurement point	km	1 (max.)	1.3
Calculation condition			
maximum H/L	-	3.1	10.5
number of blocks	-	15	15
grid points on each block		[200,400,23]	[600,400,23]
total #		27.6million	82.8million

の半径では物体に近すぎるため、その結果 Multipole Analysis では正しく処理できないほどの非線形性が現れたためであると考えられる。このように、Multipole Analysis を用いたとしても、物体のごく近傍の Multipole Analysis で扱えない領域では CFD 解析を行うことが必要不可欠であり、適切な半径における圧力波形の取得が必要であることが分かる。

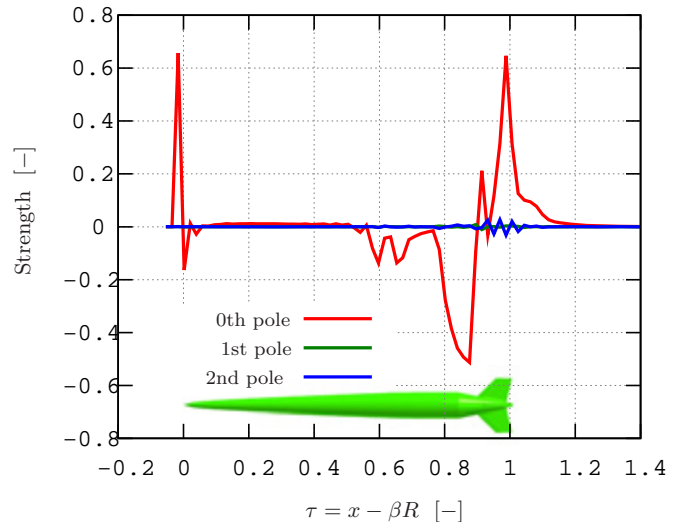


Fig.4 Distribution of the strength of multipoles for LBM

ることができる。すなわち、上記の条件では理論上 90 次 pole まで考慮することが可能である。なお、各方向に更に分割数を増やして解析を行ったが、結果に大きな差異が無いことを確認済みである。

3.1 LBM への適用結果

D-SEND#1 供試体である LBM に対して、上記の CFD 解析を行い、Multipole Analysis により処理したものをを用いて、遠方場波形を推算した結果を Fig.3 に示す。また、このときに得られた Multipole 分布を Fig.4 に示す。Fig.3 を見ると、修正の前後で波形がほぼ変化していないことが分かる。ただし、Multipole Analysis により処理した結果で $H/L = 0.25$ の結果を見ると、波形後端の部分で差異が生じていることが分かる。これは、こ

また、Fig.4 を見ても、0 次 pole のみが顕著に現れ、それ以外の成分は機体後方にある安定板近傍で現れるのみで、ほとんどがゼロとなっていることが分かる。これは、予め考察していたように、LBM がほぼ軸対称な形状をしているため、軸対称の効果、すなわち 0 次 pole のみはその効果として現れ、それ以外がほとんど効果を示さないということを意味する。このことは逆に、Multipole Analysis が適切に物体の効果を再現できているということを意味している。なお、機体長に対して Multipole 分布が前後に伸びているのは、ソニックブーム波形が伝播の過程で伸長するためである。

3.2 S3CM への適用結果

次に、S3CM に対する適用結果を示す。S3CM は前述の LBM と比較して、より SST を意識した形状となっており、それゆ

えに圧力波形の非軸対称性が強く現れる。そのため、Multipole Analysis を利用せずに CFD 解析のみで周方向の整理・統合を扱おうとする場合、LBM の場合に比べて H/L を大きくとる必要があると考えられる。また、Multipole Analysis を行うに当たって、より高次の pole まで考慮して機体の非軸対称性を表現することが必要になると考えられる。実際、S3CM の目指している波形のような低ブーム波形の場合、高次の pole までを考慮することが重要である、という報告がなされている⁶⁾。そこで、 H/L 及び pole の数 N_{pole} に対してパラメトリックスタディを行うことで、それらの効果を検証した。

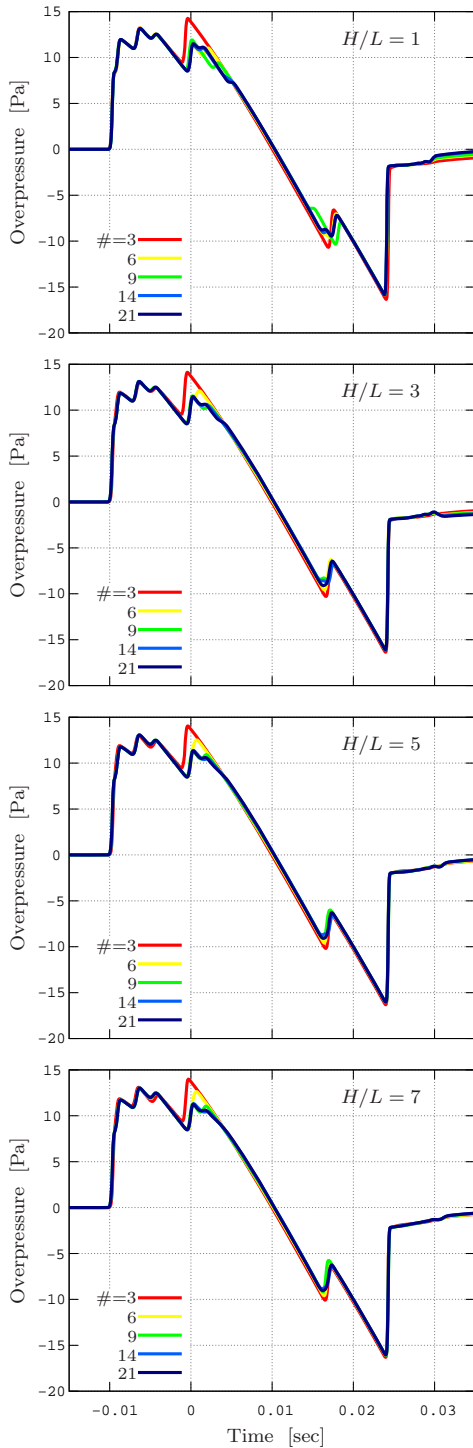


Fig.5 Effects of the number of multipoles on the far-field waveform for S3CM

まず N_{pole} の効果について Fig.5 に示す。Fig.5 は、機体直下における遠方場波形であり、事前の予測通り N_{pole} を増やすことによって波形が変化し、 N_{pole} が 9 を超える辺りで収束していることが分かる。また、近傍場波形を取得した半径 H/L を変更した場合でも、 N_{pole} が大きくなるにつれて遠方場波形は収束していることが分かる。このことから、非軸対称な物体の場合高次の pole まで考慮することが必要になると同時に、物体の複雑さに応じて pole の数にある程度の上限があることが示唆される。このことは、Fig.6 に示した Multipole の強度分布からも確認できる。前述の LBM とは対照的に、0 次以上の 1 次から 5 次までの高次 pole の影響が非常に大きい。実際、Fig.6 の 6 次以上の pole を見ると、主に主翼と尾翼付近に高次 pole が分布しているということが分かる。そのため、以降では N_{pole} を 12 に設定して解析を行った。

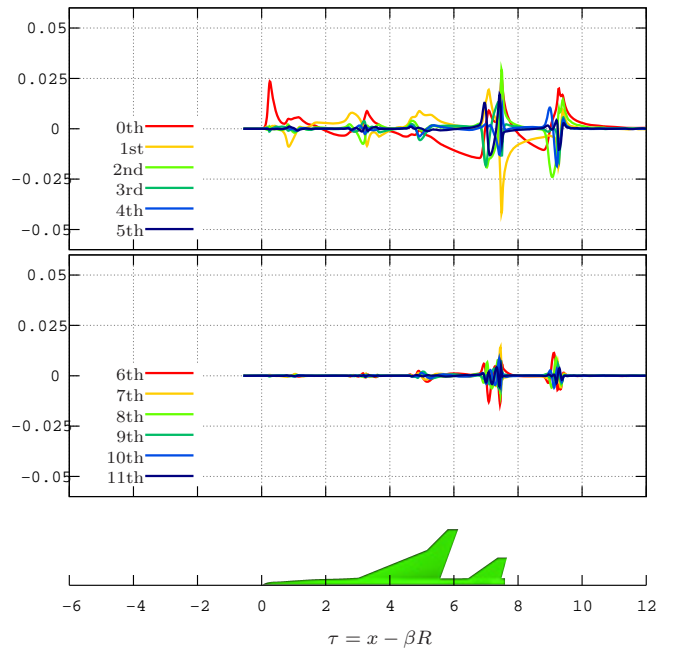


Fig.6 Distribution of the strength of multipoles for S3CM

次に、 H/L の効果を検証した。前述のように、Multipole Analysis を導入すれば、最終的に得られる遠方場波形は H/L に依存しない形になるはずである。そこで、Multipole Analysis 処理を行った場合と行っていない場合の遠方場波形をまとめて Fig.7 に示す。これを見ると、Multipole Analysis で処理をしていない結果は、近傍場波形を取得した H/L に応じて遠方場波形もまた変化しており、 $H/L = 8$ 程度でようやく遠方場が収束しているということが分かる。 $H/L = 8$ までの計算領域を確保するには大きな計算領域が必要であり、それに合わせて Table 1 に示したように格子点数も増大することになる。その結果格子生成及び CFD 解析の負荷は高くならざるを得ない。一方で、Multipole Analysis を適用した結果は、適用しない結果と比較して H/L に対する依存性が非常に小さいということが分かる。これは、Multipole Analysis によって周方向成分の整理・統合を適切に扱うことができたためであると考えられる。

前述のように、Multipole Analysis を適用した結果は H/L にほぼ依存しないが、その結果が実際の地上波形と一致するかどうかを確認する必要がある。そのため、Fig.7 には Multipole Analysis を適用した結果を適用していない結果とを合わせて描画している。特に Fig.7 の左図中にある点線で描かれた波形に注目する。この波形は $H/L = 8$ の結果から Multipole Analysis を適用せずに抽出した近傍場波形を遠方へ伝播させた結果であるが、Fig.7 の右図からも明らかのように、遠方場は十分に収

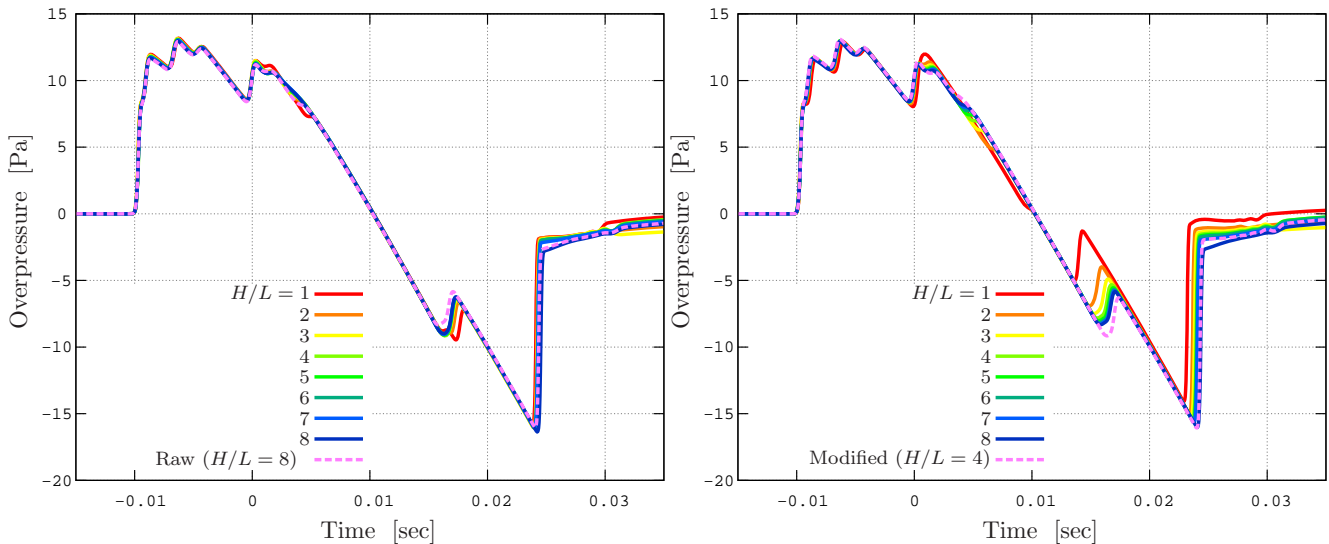


Fig.7 Far-field waveforms for S3CM with (left) and without (right) Multipole analysis

束している、すなわち、この H/L であれば十分に整理・統合がなされているとみなせる。この波形と Multipole Analysis を適用して得られた結果とを比較すると、 $H/L = 3$ 程度の結果からほとんど一致しているということが分かる。このことは、Multipole Analysis を用いて得られる遠方場波形が、それを用いず得られた波形と同等の結果を示す、ということだけではなく、Multipole Analysis を用いることで、 H/L を小さく抑えることができ、その結果 CFD 解析の負荷を軽減することができることを示している。

実際、D-SEND#2 の解析結果から簡易的に推算を行った結果を示す。本稿では $H/L = 8$ 程度までを精度良く解析できる格子を用いて解析を行ったが、Multipole Analysis の結果から $H/L = 2$ 程度までを精度良く解析できれば良いと仮定すれば、半径方向の格子点数はおよそ $2/3$ に削減できる。(ここで H/L の比から $1/4$ とならないのは、機体から離れるに従って格子間隔が伸長されているためである。) その結果、全体の格子点数も $2/3$ に削減できると考えられる。それだけでなく、衝撃波を解像するための格子生成の手間の削減にもつながるという点を強調したい。近傍場波形を精度良く捉えるためには、機体先端や後端から発生する波動だけでなく、主翼や尾翼等、機体各部から発生する波動もまた、精度良く捉えることが必須である。このような波動は、一般に先端衝撃波の頂角とは異なる方向に波面を作るため、一様流のマッハ角に合わせた格子だけでは正しい近傍場波形の推算を行うことはできない。そのため、解適合のような処理がある程度必要になると考えられるが、解適合を行う場合には予備計算を行って参照解を用意する必要があるため、解析領域はできるだけ小さいほうが良いと言える。

4 地上のソニックブーム騒音マップ

著者は、本稿で解説した Multipole Analysis のプログラムと、拡張 Burgers 方程式の解析プログラム Xnoise をシームレスに運用し、ソニックブームの地上における騒音マップを作成するツールを開発した。このツールは、近傍場における CFD 解析結果を入力とし、飛行高度等の条件を入力することによって容易に地上における騒音マップを予測することが可能である。その一例を Fig.8 に示す。これは S3CM の高度 20km における巡航状態を仮定して解析した例であり、飛翔体は Y 軸をマイナス方向に定常飛行している状況を仮定している。予測結果は、PLOT3D 形式で出力されるため、TecPlot を始め、一般的な流体解析用の可視化ツールで容易に可視化することができる。本

稿では主に機体直下の影響について考察したが、それ以外の方向に対する波形についても、Multipole Analysis の効果を確認している。その結果、CFD 解析領域を大きくとらなくても、Fig.8 に示すような、多方向に対する波形の伝播を精度良く予測することが可能になる。実際、機体直下 ($X = 0$) から離れるにつれて、波動が弱まっている様子が確認できる。

また、このツールによってソニックブームが観測される領域の縁を見つけることができる。このような縁の部分では、地上へと伝播してきたソニックブームの波線が地面をかすめて再び上空へと伝播していくことになるが、その際に地上では通常よりも強いソニックブームが観測される。このような現象はフォーカスブームと呼ばれるが、一般に加速やマニューバ等の非定常運動時に発生しやすい。しかし、上述のように定常飛行においても、ソニックブームが観測される領域の縁でフォーカスブームは発生するため、それが発生する場所を特定することは、将来的に超音速旅客機を運用する際には極めて重要になる。フォーカスブームそのものの強度予測には別途予測ツールが必要であり、著者はそれらの開発も進めているが^{18, 19)}、本稿で述べたツールとの組み合わせにより、ソニックブームだけでなくフォーカスブームのような派生現象の予測も行うことができるという点を付記しておきたい。

5 まとめ

ソニックブームの遠方場波形を低コストで精度良く推算するため、Multipole Analysis と呼ばれる近傍場波形の改善手法を導入し、CFD 解析との親和性を検証した。Multipole Analysis では、流れ方向を軸に持つ円筒面上の近傍場圧力波形から、その波形をもたらす Multipole の分布を求め、その分布から近傍場波形を修正することによって、周方向の波動の整理・統合を近傍場で行うことができる。その結果、負荷の高い CFD 解析を狭い領域に限ることができ、ソニックブームの予測をより短い時間で行うことができるようになる。

本稿では、様々な半径 H/L における近傍場波形を求め、それを入力として地上波形を解析し、それらの比較を行った。その結果、Multipole Analysis で処理した結果は、半径に対する依存性が非常に小さいということが確認できた。このことは、解析領域を物体に対して広くとらなくても、得られる遠方場波形がほぼ同じになるということを示しており、当初の目的であった CFD の計算コストの低減を実現可能である。

最後に、ソニックブームの地上における騒音マップ作成ツール

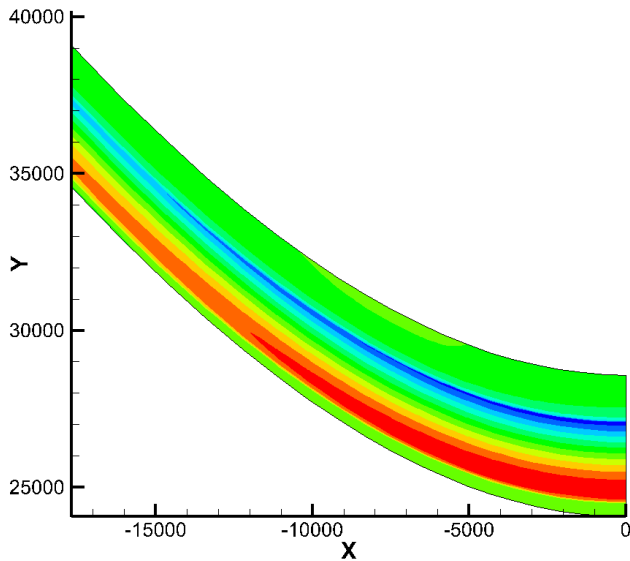


Fig.8 Prediction of the boom carpet (color map indicates the overpressure due to sonic boom. unit [m])

を紹介した。これは、本稿で述べた Multipole Analysis プログラムと Xnoise をシームレスに活用することによって、CFD 解析結果から容易にマップを得ることができるツールである。ソニックブームに関する従来の研究の多くが、機体直下に対する波形についてのみ言及するものであったが、このツールを通して、多方向に対する伝播についても研究が深まることが期待される。

参考文献

- 1) D-SEND プロジェクトチーム. JAXA D-SEND プロジェクト 研究紹介 web ページ. <http://www.apg.jaxa.jp/research/d-send/ds-project.html>.
- 2) D-SEND プロジェクトチーム. JAXA D-SEND データベース. <http://d-send.jaxa.jp/>.
- 3) Naka Y. Sonic boom data from D-SEND#1. *JAXA-RM-11-010E*, 2012.
- 4) 中右介, 牧野好和, 橋本敦, 山本雅史, 山下博, 内田貴也, 大林茂. D-send#1 データを用いたソニックブーム解析手法検証. 第 44 回流体力学講演会/航空宇宙数値シミュレーションシンポジウム 2012 講演論文集, No. 2A03, 2012.
- 5) Page J. A. and Plotkin K. J. An efficient method for incorporating computational fluid dynamics into sonic boom prediction. *AIAA Paper 91-3275*, 1991.
- 6) Rallabhandi S. K. and Mavris N. New computational procedure for incorporating computational fluid dynamics into sonic boom prediction. *Journal of Aircraft*, Vol. 44, No. 6, pp. 1964-1971, 2007.
- 7) Lyman V. and Morgenstern J. M. Calculated and Measured Pressure Fields for an Aircraft Designed for Sonic-boom Alleviation. *AIAA Paper 2004-4846*, 2004.
- 8) Morgenstern J. M., Buonanno M., and Nordstrud N. N+2 Low Boom Wind Tunnel Model Design and Validation. *AIAA Paper 2012-3217*, 2012.
- 9) Whitham G. B. The flow pattern of a supersonic projectile. *Communications in Pure and Applied Mathematics*, Vol. 5, pp. 301-348, 1952.
- 10) 橋本敦, 山本雅史, 村上桂一, 青山剛史, 牧野好和. Burgers 方程式を適用したソニックブームの遠方場解析. 第 47 回飛行機シンポジウム講演論文集, No. 2H3, JSASS-2009-5087, 2009.
- 11) 山本雅史, 橋本敦, 村上桂一, 青山剛史, 石川敬掲, 牧野好和. 自動格子生成と burgers 方程式を用いたソニックブーム解析. 第 23 回数値流体力学シンポジウム講演論文集, No. B6-2, 2009.
- 12) 山本雅史, 橋本敦, 村上桂一, 青山剛史, 酒井武治. Burgers 式を用いたソニックブーム伝播計算における熱粘性減衰及び分子振動緩和効果. 第 42 回流体力学講演会/航空宇宙数値シミュレーションシンポジウム 2010 講演論文集, No. 2B11, 2010.
- 13) Yamamoto M., Hashimoto A., Takahashi T., Kamakura T., and Sakai T. Long-range sonic boom prediction considering atmospheric effects. In *inter-noise 2011, Osaka, Japan, Papers on Disc*, 2011.
- 14) Yamamoto M., Hashimoto A., Takahashi T., Kamakura T., and Sakai T. Numerical simulation for sonic boom propagation through an inhomogeneous atmosphere with winds. In *19th International Symposium on Nonlinear Acoustics*, 2012.
- 15) 牧野好和, 野口正芳, 村上桂一, 石川敬掲, 牧本卓也, 大林茂, 今泉貴博, 鈴木角栄, 豊田篤, 佐宗章弘. D-SEND#1 形状に対する機体近傍場圧力波形推算手法検証. 第 44 回流体力学講演会/航空宇宙数値シミュレーションシンポジウム 2012 講演論文集, No. 2A02, 2012.
- 16) 石川敬掲, 牧本卓也, 大平啓介, 牧野好和, 橋本敦. 低ソニックブーム設計概念実証落下試験 (D-SEND#1) のソニックブーム推算. 第 42 回流体力学講演会/航空宇宙数値シミュレーションシンポジウム 2011 講演論文集, No. 1A06, 2011.
- 17) Takaki R., Yamamoto K., Yamane K., Enomoto S., and Mukai J. The development of the upacs cfd environment. In *High Performance Computing, Proc. of ISHPC 2003*, pp. 307-319, 2003.
- 18) 金森正史, 橋本敦, 青山剛史. Nonlinear tricomi equation によるフォーカスブーム解析. 2013 年度超音波研究会 (US), 2013.
- 19) 金森正史, 橋本敦, 青山剛史, 牧野好和, 石川敬掲, 山本雅史. 非線形 tricomi 方程式解析を用いたフォーカスブームにおける低ブーム波形の効果推算. 第 45 回流体力学講演会/航空宇宙数値シミュレーション技術シンポジウム 2013, No. 1B09, 2013.