# 高次精度非構造格子法の比較に関する研究

澤木悠太 (東北大), 芳賀臣紀, 保江かな子 (JAXA), 澤田恵介 (東北大)

# Comparison Study of High-Order Unstructured Grid Methods

by
Yuta Sawaki(Tohoku Univ.), Takanori Haga,
Kanako Yasue(JAXA), and Keisuke Sawada(Tohoku Univ.)

Abstract
The inviscid flows over ONERA-M6 wing computed by the spectral volume (SV) and discontinuous Galerkin (DG) methods are compared with that given by the conventional cell-vertex finite volume scheme using the same unstructured tetrahedral grid. In comparison, solution accuracy, and computational cost are critically examined. It is shown that both SV and DG schemes can yield highly resolved shocked flows but their computational costs are substantially higher than that of the conventional finite volume scheme. Laminar boundary layer flow and turbulent flow over 3D flat plate are also computed. In particular, $v$ velocity in laminar flow obtained by DG scheme using hybrid cell grid agree well with the Blasius solution even with less grid resolution.

## 1 緒言

航空機全機周りのような, 3 次元複雑形状周りの流れの数値シミュレーションでは, 形状適合性に優れている非構造格子法が多用されている. 従来の手法では, 各セル内の局所解の分布を近傍セルのデータを参照して多項式関数で再構築することにより空間の高次精度化を図る. より高次の近似多項式を用いるほど, ステンシルを周囲に拡大しなければならないが, 非構造格子ではステンシルの選び方が自明でなく, 高次精度化が困難となる. それに対し, ステンシルを周囲に拡大させずに高次精度を達成する計算手法として, Spectral Volume (SV) 法 [1] や Discontinuous Galerkin (DG) 法 [2] が注目され, 研究が行われている. SV 法と DG 法の重要な共通の特徴はセル内に自由度を導入することである. 高次精度化のためには, セル内の自由度の数を増やすことを考えればよい. この自由度を使ってセル内部の物理量分布を記述することにより局所解を高次に再構築できる. これにより非構造格子上であっても, 定式上の精度を達成することが期待できる. 加えて, 再構築にセル周囲のデータを参照しないコンパクトな性質により, 高い並列化効率が期待できる. しかし, 従来の手法と比べると, 計算コストが著しく高いと言われている.

本研究では, 高次精度手法における精度やコンパクトな再構築方法に関するメリットと計算時間に関するデメリットが実際にどの程度であるかを検証することを目的とする. そのために芳賀らが構築したSV 法コード, 保江らが構築した DG 法コードおよび東北大学中橋研究室で開発された, セル節点型有限体積法である TAS コード [3] を用いて圧縮性非粘性流れ場および粘性流れ場の解析を行い, それぞれの結果の正確さと計算コストを比較する.

## 2 数値計算法

### 2.1 SV(Spectral Volume) 法

SV 法はセル中心型の有限体積法であるが, 局所解の再構築の方法が従来の手法と異なる. まず, SV 法では, 3 次元の場合, 計算領域を四面体セルに分割し, これらのセルを Spectral Volume(SV) と呼ぶ. そして, それらをすべて同じ方法でさらに構造的に分割し, サブセルを生成する. これらのサブセルは Control Volume(CV) と呼ばれ, 各 SV 内の解の分布を高次多項式で再構築するためのステンシルとして機能する. 分割法が定まれば各 CV に対して次式で定義される形状関数 $L$($p$ 次の多項式) が与えられる.

$$\frac{1}{V_j}\int_{CV_j} L_l(\vec{r})dV = \delta_{j,l} \qquad (j,l=1,...,m). \tag{1}$$

$\delta_{j,l}$ はクロネッカーのデルタ関数である. $i$ 番目の SV における再構築解 $\tilde{Q}_i$ は, CV 毎のセル平均値 $\bar{Q}_{i,j}(j=1,...,m)$ と形状関数 $L$ の積の総和として表される.

$$\tilde{Q}_i(\vec{r},t) = \sum_{j=1}^{m} L_j(\vec{r})\bar{Q}_{i,j}(t). \tag{2}$$

ここで $L$ は位置のみの関数であり, 物理空間の SV セルを基準空間の四面体に線形写像することで常に同じものを用いることができる. SV 法における自由度とは形状関数に対する展開係数を意味する. 本研究では, 空間 2 次精度の SV 法を構築するため, 図 1 に示すように四面体 SV の各辺の中点とそれを共有する面の重心を結び、さらに各面の重心と四面体の重心を結んで 4 個の六面体 CV に分割する [5]. 数値流束の評価に関しては, 対流項には SLAU 法 [4], 粘性項には BR2 法 [6] を用いる. 一方, SV の内部の CV 境界では流束は流束関数から解析的に求められる. 時間積分は LU-SGS 陰解法 [1] で行う.

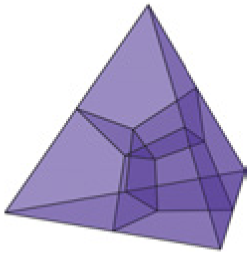


図 1: Liu の四面体 SV の線形分割 [5)]

## 2.2　DG(Discontinuous Galerkin) 法

DG 法はセル中心型の有限要素法であり, セル内部に自由度を与えて物理量の分布を近似することで, 解の再構築を行う. 支配方程式の面積分や体積積分の計算を行う際, 座標変換を行い, 変換後の空間に直交基底関数を導入する必要があるため, 物理座標系 $(x, y, z)$ を, 参照座標系 $(\xi, \eta, \zeta)$ およびテンソル座標系 $(r, s, t)$ に変換することを考える. 図 2 には左から順に, 物理座標系, 参照座標系, テンソル座標系を示す. DG 法では, 参照座標系に変換された保存変数 $\bar{Q}$ は次のように表される.

$$\bar{Q}(\xi, \eta, \zeta, t) = \sum_j \bar{Q}_j(t)\phi_j(\xi, \eta, \zeta). \tag{3}$$

$\bar{Q}_j$ は自由度, $\phi_j$ は基底関数を表す. DG 法における自由度とは, 基底関数に対する展開係数を意味する. 数値流束の評価に関しては, 対流項には SLAU 法 [4)], 粘性項には BR2 法 [6)] を用いる. 時間積分はセル緩和型陰解法 [2)] で行う.

## 2.3　TAS(Tohoku University Aerodynamic Simulation) コード

TAS コードでは, セル節点型の有限体積法を用いている. 検査体積は, 各節点の周りに構成された非重合二重格子 (non-overlapping dual cell) である. 数値流束の計算には近似 Riemann 解法を利用し, 本研究では, SLAU 法を用いる. 高次精度化のため, 節点 $i$ 周りの検査体積内の基本変数 $q$ を, その勾配 $\Delta q_i$ を用いて次のように区分的 1 次関数で再構築し, 空間 2 次精度にしている.

$$q(r) = q_i + \Phi_i \Delta q_i \cdot (r - r_i). \tag{4}$$

ここで, $r$ は位置ベクトルで, $i$ は節点番号である. $\Phi$ には Venkatakrishnan の制限関数 [7)] を用いた. 時間積分は LU-SGS 陰解法 [3)] で行う.

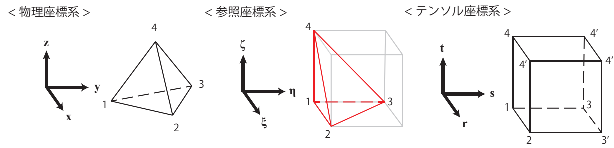



図 2: DG 法における座標変換 [2)]

## 3　非粘性流れ場解析による比較

計算対象は ONERA-M6 翼である. 計算には, セル数の異なる 2 つの格子を用い, それぞれ, セル数の少ない方から順に Grid1, Grid2 とする. 2 つの格子のデータを表 1 に, 表面格子図を図 3 示す. これらは四面体のみで構成された格子である. 本研究では, 比較の際, 自由度の総数ではなくセル数を統一して解析を行った. 支配方程式は 3 次元圧縮性 Euler 方程式で, 数値流束の評価には, 3 手法とも共通で, SLAU 法 [4)] を用いた. 空間離散化は前述の通りであり, 3 手法とも空間精度は 2 次精度である. 時間積分は陰解法で, 最大 CFL 数を $10^6$ とした. 主流マッハ数を 0.84, 迎角を 3.06[deg] に設定して流れ場解析を行った.

表 1: ONERA-M6 翼格子データ

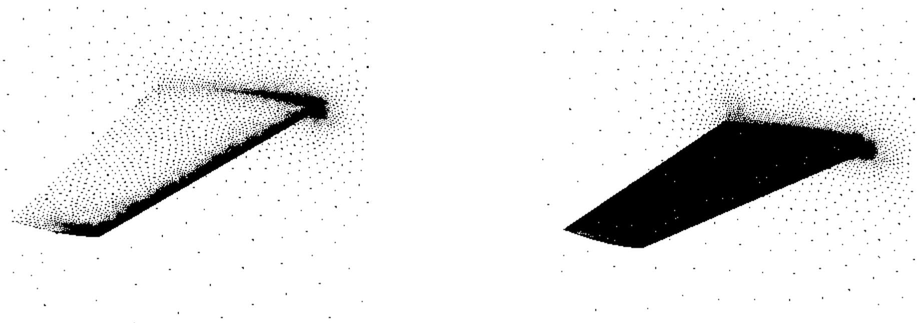
| 格子 | セル数 | ノード数 |
|---|---|---|
| Grid1 | 393,979 | 75,085 |
| Grid2 | 1,039,280 | 198,712 |

図 4 に翼根からの距離が半スパン長 $(S)$ の 65 %の位置の断面圧力係数分布図を実験値 [8)] とともに格子別に示す. Grid1 では, 非粘性計算のため, 衝撃波位置が後退しているが, SV と DG は実験値との一致は良好である. 一方, TAS に関しては, 翼上面で散逸誤差が見られる. Grid2 になると, どの手法も, シャープに不連続をとらえている. TAS に関しては, 最初の衝撃波面では, まだ拡散的であるが, 第二の衝撃波面では SV や DG に近い分布を得られている. 以上から, セル内に自由度を設ける SV 法, DG 法を用いた場合, 近傍セルの情報を使用する TAS を用いた場合に比べて, 衝撃波をよりシャープにとらえられることが示された.

計算コストに関して, 表 2 に示す. 計算には Xeon E5-2687W(動作周波数 3.10GHz) を使用した. 表 2 中の () 内は各格子別に, TAS の 1 ステップあたりの CPU time を 1 としたときの比である.

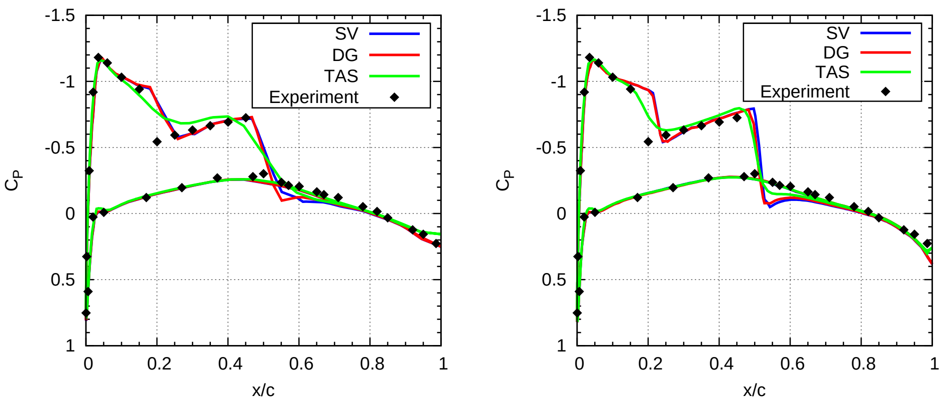
表 2: 計算コストの比較 (CPU time/step [s])

| コード | Grid1 | Grid2 |
|---|---|---|
| SV | 8.84 (3.3) | 26.04(3.3) |
| DG | 15.18(5.7) | 43.80(5.5) |
| TAS | 2.67 (1) | 7.95 (1) |



(a) Grid1 (b) Grid2

図 3: ONERA-M6 翼の表面格子




(a) Grid1 (b) Grid2

図 4: 圧力係数分布 (y=0.65$S$)

# 4 平板層流境界層解析

SV 法, DG 法は自由度を各セルに導入することで, 境界層内の非等方的なプリズムセルや四面体セルの数を少なくできると期待される. そこで, 本節では平板層流境界層解析を行い, 境界層内のセルの積層数を減らした場合に, 解析結果がどの程度になるのかを調べる.

主流条件は, マッハ数を 0.3, 平板長さ $L$=1 に基づくレイノルズ数 $Re$ を $10^5$ とした. 平板後縁の境界層厚さ $\delta$ は $\delta = 5L/\sqrt{Re}$ によって見積もった. 計算領域は以下のように定めた.

$$-2.0 \le x \le 1.0,\ \ 0 \le y \le 5.0,\ \ 0 \le z \le 0.2. \qquad (5)$$

流入境界面 ($x = -2.0$) には主流条件, 流出境界面 ($x = 1.0$) と上部境界面 ($y = 5.0$) には静圧一定の条件を課した. 下部境界面の $-2.0 \le x \le 0$ は滑り壁とし, $0 \le x \le 1.0$ は滑りなしとした. 両側面は対称境界とした. 計算格子には, 境界層内にプリズムセルを適用したハイブリッド格子 (Fine, Coarse の 2 種類) と, そのハイブリッド格子のプリズムセル全てを 3 つの四面体セルに分割してできる四面体のみの格子 (Fine, Coarse の 2 種類) を使用した. 格子データを表 3 に示す. プリズムセルは壁面 ($y = 0$) から 5$\delta$ を超えるまで押し出し, 滑り壁上は $x$ 方向に 41 点 (前縁に hyperbolic tangent stretching), $z$ 方向に 11 点とっている. $y$ 方向への押し出しが終了したところから上部境界面までは等方的な四面体セルを配置している.

計算には, SV 法では四面体格子を, DG 法ではハイブリッド格子と四面体格子両方を使用した. また, TAS に関しては, 境界層に四面体セルを用いた場合, 計算の途中で解が発散したり解の精度が保たれないため, ハイブリッド格子を使うことが必須である. 計算により得られた $x$ 方向速度分布を図 5 に示す. データは $x = 0.9$ の位置の値をプロットしている. 図 5 に関して, 3 手法の結果に大差は見られず, Blasius 解と良い一致を示している. 次にハイブリッド格子および四面体格子による計算で得られた $y$ 方向速度分布をそれぞれ図 6, 7 に示す. 図 6 に関して, どちらの格子も TAS よりも DG の方が $x$ 方向の位置によるデータのばらつき方が小さい. 図 7 について, Fine では DG, SV ともに Blasius 解に良い一致を示している. Coarse では両手法ともデータのばらつきがあり, Blasius 解からずれているが, 少なくとも定性的には $y$ 方向の速度分布を表現している. DG に関してハイブリッド格子および四面体格子を用いた結果を比較すると, $x$ 方向速度分布は同等である. それに対し, $y$ 方向速度分布は Fine

では同等であるが, Coarse に関してはハイブリッド格子の結果の方ががばらつきが少なく, Blasius 解により近い分布となった.

表 3: ハイブリッド格子データ (層流境界層)

| | Fine | Coarse |
|---|---|---|
| プリズム | 36,000 | 18,000 |
| 四面体 | 5,440 | 5,788 |
| 最小格子幅 | $1 \times 10^{-4}$ | $3 \times 10^{-4}$ |
| | $(=\delta/150)$ | $(=\delta/50)$ |
| Growth Rate | 1.2 | 1.4 |
| 境界層内点数 | 20 | 11 |

## 5 平板乱流境界層解析

主流条件は, マッハ数を 0.3, 平板長さ $L$=1 に基づくレイノルズ数 $Re$ を $10^7$ とした. 平板後縁の境界層厚さ $\delta$ は $\delta = 0.37L/\sqrt[5]{Re}$ によって見積もった. 計算領域は以下のように定めた.

$$-0.5 \leq x \leq 1.0, \quad 0 \leq y \leq 5.0, \quad 0 \leq z \leq 0.05. \tag{6}$$

境界条件と格子の種類は層流のケースと同じである. 格子データを表 4 に示す. プリズムセルは壁面 $(y = 0)$ から $2\delta$ を超えるまで押し出し, 滑り壁上は $x$ 方向に 51 点 (前縁に hyperbolic tangent stretching), $z$ 方向に 3 点とっている. $y$ 方向への押し出しが終了したところから上部境界面までは等方的な四面体セルを配置している.

表 4: ハイブリッド格子データ (乱流境界層)

| | Fine | Coarse |
|---|---|---|
| プリズム | 11,520 | 7,360 |
| 四面体 | 3,038 | 3,191 |
| 最小格子幅 | $3 \times 10^{-6}$ | $6 \times 10^{-5}$ |
| | $(y^+ = 1)$ | $(y^+ = 2.5)$ |
| Growth Rate | 1.25 | 1.4 |
| 粘性低層内点数 | 4 | 2 |

計算では DG, TAS はハイブリッド格子を, SV は四面体格子を用いた. 計算により得られた乱流速度分布を図 8 に示す. 3 手法とも Fine, Coarse 両格子で漸近解に良い一致を示している. 特に Coarse 格子では粘性低層内に 1, 2 点という少ない格子点数であっても乱流速度分布を再現できている. なお, 層流境界層の $x$ 方向速度分布同様, SV および DG による結果と TAS の結果に大きな差異は現れなかった. 表 5 には Fine 格子を用いた層流および乱流境界層解析のときの 1 ステップあたりの計算コストを示す. 計算には Xeon E5-2687W(動作周波数 3.10GHz) を使用した. () 内はハイブリッド格子による TAS の計算コストを 1 としたときの比を表す.

表 5: 計算コストの比較 (CPU time/step [s])

| | 層流 | 乱流 |
|---|---|---|
| SV(tetra) | 6.22(35.1) | 2.78(43.7) |
| DG(tetra) | 15.6(88.0) | 5.87(92.3) |
| DG(hybrid) | 6.96(39.3) | 2.64(41.4) |
| TAS(hybrid) | 0.177(1) | 0.0636(1) |

## 6 結言

ONERA-M6 翼周りの非粘性解析において SV 法と DG 法では, TAS よりも衝撃波を鋭くとらえることが示された. 平板層流境界層解析では $x$ 方向速度分布に関しては 3 手法とも Fine, Coarse 格子で Blasius 解に良い一致を示した. $y$ 方向速度分布について, Fine 格子では TAS よりも SV, DG の方がばらつきが少なく, Blasius 解に近い結果となった. Coarse 格子では, SV, TAS および DG(四面体のみの格子) では分布にばらつきが出ているが, DG のハイブリッド格子に限っては良い一致を示した. 乱流境界層解析においては Fine および Coarse 格子ともに 3 手法による結果の違いは見られなかった. 計算コストに関しては, セル節点法で内部に自由度を持たない TAS が SV, DG を圧倒した. 2 次精度の範疇では使い方を間違わない限り TAS に分があると言えよう.

## 参考文献


[1] 芳賀臣紀, 平成 20 年度博士論文, 東北大学, 2009

[2] 保江かな子, 平成 21 年度博士論文, 東北大学, 2010

[3] Sharov, D. and Nakahashi, K., *AIAA J.*, Vol.36, No.3, pp.484-486, 1998

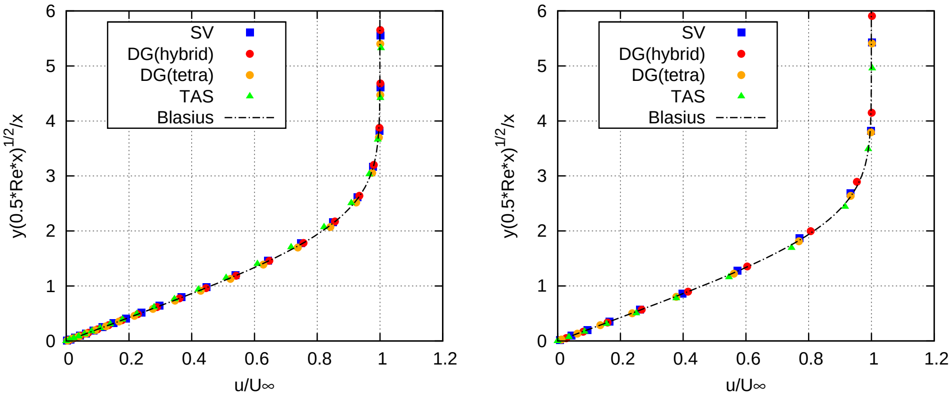
[4] Shima, E. and Kitamura, K., AIAA Paper 2009-136, 2009

[5] Liu, Y., Vinokur, M. and Wang, Z.J., *JournalofComputationalPhysics*, Vol.212, pp.454-472, 2006

[6] Bassi, F. and Rebay, S., *Int.J.Numer.Meth.Fluids*, pp.197-207, 2002

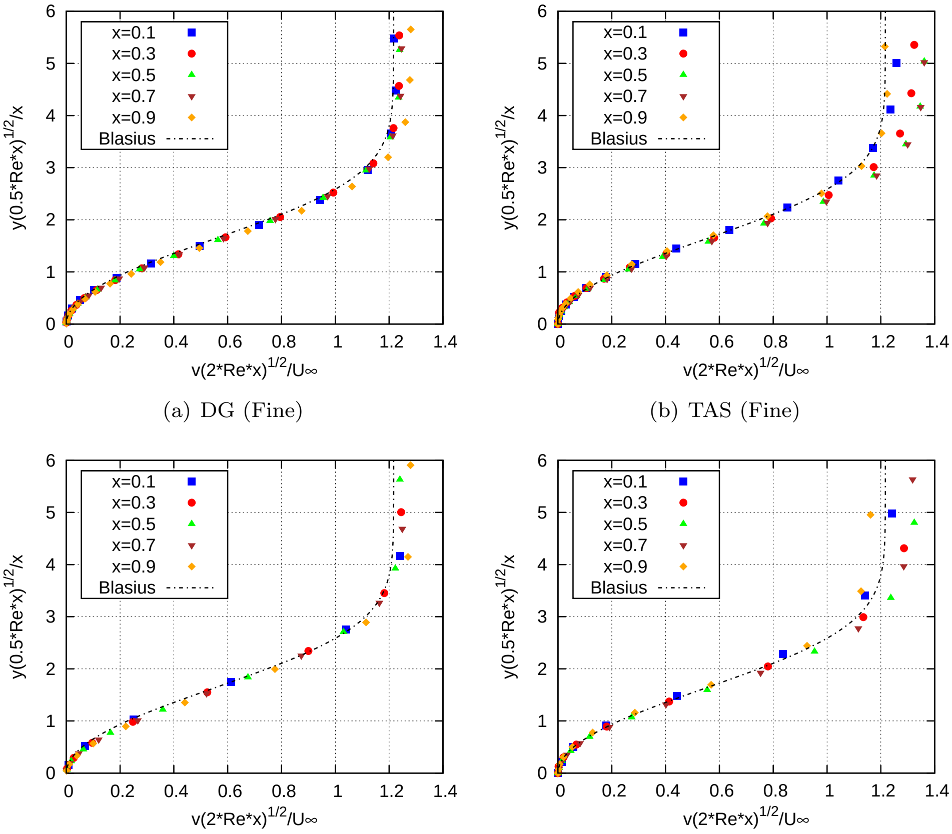
[7] Venkatakrishnan, V., *JournalofComputationalPhysics*, Vol.118, pp.120-130, 1995

[8] Schmitt, V. and Charpin, F., AR138, AGARD, 1979




(a) Fine (b) Coarse

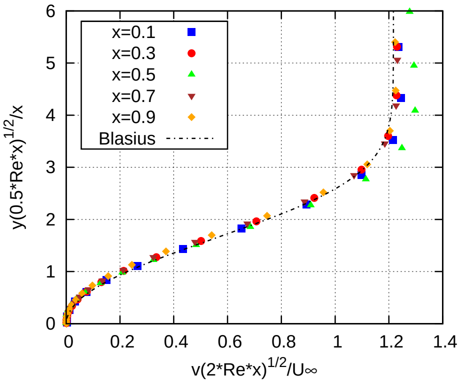
図 5: 層流境界層 $x$ 方向の速度分布 ($x = 0.9$)



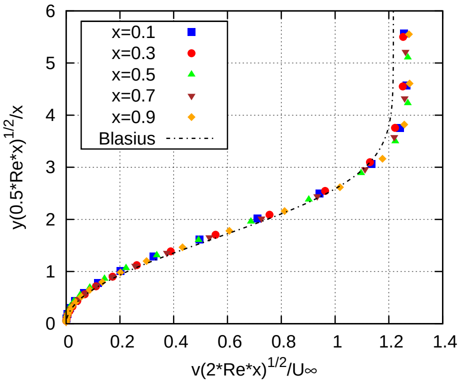

(a) DG (Fine) (b) TAS (Fine)

(c) DG (Coarse) (d) TAS (Coarse)

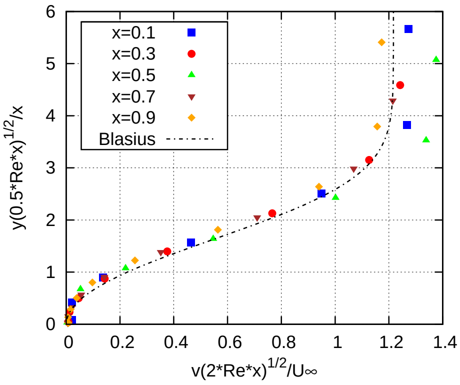
図 6: 層流境界層 $y$ 方向の速度分布 (ハイブリッド格子)



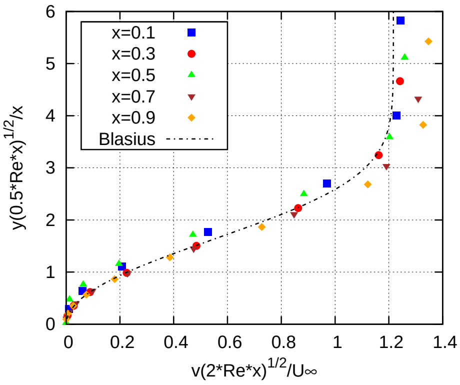

(a) DG (Fine)




(b) SV (Fine)

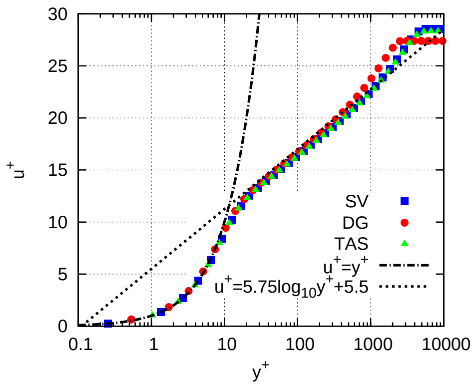



(c) DG (Coarse)

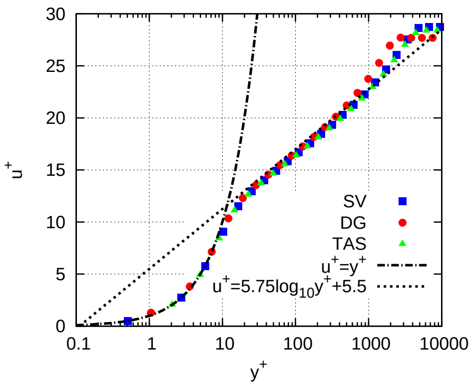



(d) SV (Coarse)

図 7: 層流境界層 $y$ 方向の速度分布 (四面体格子)




(a) Fine




(b) Coarse

図 8: 乱流境界層 $x$ 方向の速度分布 ($x = 0.9$)