ISSN 0389-4010
UDC 534.121
532.59
532.612

航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-1337

定在波中における液滴の挙動

上村平八郎　山中　龍夫

1997年10月

航空宇宙技術研究所

NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

定在波中における液滴の挙動*

上村平八郎*1　山中　龍夫*2

Drop Behavior in Acoustic Standing Waves*

Heihachiro Kamimura *1 and Tatsuo Yamanaka *2

Abstract

Chandrasekahr developed the theory on the stability of a rotating drop by equating the entire mechanical energy of a drop with its surface energy tensor. In his theory he assumed that the surface energy is symmetrical about the center of a drop, and the symmetry itself prevents the theory from dealing with multi-lobed waves.

In this report, an equation for multi-lobed waves induced on a rotating drop by sound waves is shown. The wave equation is first derived on the assumption that the acoustic radiation pressure around a drop is constant. Then the effects of the deformed drop on the radiation pressure surrounding the drop are considered.

In addition, the equation for the relationship between the radiation pressure and a drop that becomes oblate due to the radiation pressure is obtained. The two equations are compared with the results of both ground experience and flight experience and it is shown that good agreement exists between the theoretical prediction and the experimental results.

Keywords: drop dynamics, acoustic radiation pressure, acoustic levitation

概　　　　要

Chandraskhar は回転液滴の形状安定に関する研究の中で液滴に含まれる全力学的エネルギーと表面エネルギーが等しいとしている。この理論では表面エネルギーが対称であるとされているが，このため表面張力による多葉波を理論的に扱えなくしている。本研究では，液滴の表面エネルギーに対称性という仮定をおくことなく，回転液滴に音波によって励起される多葉波を解析的に求めた。

これには，まず液滴の周囲の音響放射圧が一定であると仮定した場合の多葉波を求め，次に液滴の変形が液滴の周囲の音響放射圧に及ぼす影響を考慮した。

また，音響放射圧を受けて液滴が扁平形状になる場合について，音圧と扁平度の関係を表す式を導き，これを地上実験および宇宙実験の結果と比較し，理論式と実験結果の間に良好な一致が見られることを確認した。

1　はじめに

液滴の力学は古くから研究されてきており，天体物理学では惑星の起源に関する類似性から主として回転液滴の変形に関する研究が行われたし，最近の核物理学でも古典的な原子核モデルの一つとして興味が持たれている。

また，近年の宇宙環境利用の拡大に伴い宇宙における

*　　平成８年７月２日受付（received 2 July 1996）
*1　宇宙研究グループ
*2　横浜国立大学

材料製造も活発化してきているが，スペースシャトルや宇宙ステーションなどの船内では $10^{-4}\sim10^{-5}g$ 程度の残留加速度が存在するので，宇宙で無接触で材料を製造するには何らかの保持装置が必要となる。そのような保持装置を用いて材料製造を行なおうとすれば，溶融材料は表面張力で球状となるのでそこでも液滴の挙動が問題となる。

本報告では無接触保持装置として音響放射圧を利用する装置内における液滴の挙動について述べる。本報告は液滴の理論的解析を主とするが，液滴の挙動のうち音波による扁平化については宇宙実験を含む実験を行い，これらの結果を理論による予測と比較する。

定在波中に音波の波長に比べて十分小さな物体をおくとき，その物体は粒子速度の節から腹に向かう平均圧力を受ける。これは音響放射圧または音響力と呼ばれており，定在波中におかれた小球に働く力は L. V. King[1]によって解析的に求めらている。

x 軸方向の長さが L の直方体チャンバー内に一次モードの定在波が励起されているとすると，チャンバー中央（$x = L/2$）に放射圧の働かない領域があり，そこを境に力の向きが反転する。放射圧の最大値は $x=L/4$，$3L/4$ の面で与えられ，チャンバー内のどこにあっても放射圧の働く向きはチャンバー中心に向かう。

放射圧はきわめて微弱な力であるため，地上実験では発泡スチロールのような軽量サンプルしか保持することができないが，スペースシャトルや宇宙ステーションで得られる無重量環境下では，さまざまな材料を保持するに十分な値を有する。

このような性質を持つ音響放射圧を利用した無接触保持装置として，直方体チャンバの直交する三方向にそれぞれ最低次数の定在波を励起することにより，物体をチャンバー内中央に保持する装置が三軸音波浮揚装置である。

三軸音波浮揚装置では三軸方向の音圧および周波数を独立して制御できるため，雰囲気の温度変化，浮揚サンプル移動による共鳴周波数のシフトに対処することが容易である。また二軸間の駆動信号の位相を制御することにより液体サンプルに回転を与えることが可能である[2], [3], [4], [5], [6]。

2 理　論

液体は常に表面エネルギーが最小となるような形状で存在するので無重量環境においては外力がない限り真球を形づくることになる。このような液滴に外力が働くと様々な表面振動を引き起こす。微少重力環境で三軸音波共鳴チャンバー内に浮揚される液滴は音波により擾乱を受ける。本章第1節では，液滴の表面波と共鳴チャンバー内の音波の干渉について述べる。

回転する液滴は多様なモードの表面張力波を誘起する。この場合誘起される表面張力波は，液滴内部流が渦無し流であるか，または渦あり流であるかによって異なるはずである。本章第2節では，渦無し流と渦あり流の両方についての表面張力波を理論的に記述する方法について述べる。

液滴に誘起される表面張力波もまた共鳴チャンバー内の音波と干渉するが，その干渉の仕方も液滴内部流の渦の有り無しと関係する。これについては本章第3節で取り扱う。

音圧が共鳴チャンバーのある一軸に沿って強められると，浮揚液滴は強い音響放射圧によって変形を受け，最終的には円盤状の自由端薄膜になる。この変形については本章第4節および第5節で述べる。円盤状の自由端液膜が音響チャンバー内で形成されると，薄膜上の表面張力波は音波と干渉するが，この干渉については本章第6節で取り扱う。

2.1　液滴表面張力波の音場との干渉

三軸音波共鳴チャンバー内の音場は，次のように3個の音響ドライバーによる音場の和で与えられる。

$$P_f(x_1,x_2,x_3,t)=\sum_{i=1}^{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{P_{in}\cos\left(\dfrac{n\pi}{2}-\dfrac{2\pi x_i}{\lambda_{i1}}\right)}{\cos\left(\dfrac{3n\pi}{2}+\dfrac{2\pi l_{i0}}{\lambda_{i1}}\right)}\cos(\omega_{in}t+\theta_{in}) \quad (1.1)$$

ここで，P_{in} は x_i 軸音響振動ダイアフラムにおける n 次高調波の音圧振幅，l_{i0} は x_i 軸音響ドライバーの代表長，λ_{i1} は基本波の波長，ω_{in} および q_{in} はそれぞれ x_i 軸音響ドライバーによって伝播される n 次高調波の角振動数および位相角度である。三軸座標の原点は共鳴チャンバーの基本圧力波の節に置くものとする。

液滴は基本圧力波の節の位置に保持され，共鳴チャンバーを満たしている流体，即ち気体中に浮揚しているものと仮定する。液滴の密度 ρ_1 および液滴中の音速 c_1 はチャンバーを満たしている流体の密度 ρ_0 および音速 c_0 よりもはるかに大きいため，音波は一般的には液滴中へは伝播しない。液滴の表面波は内部流および外部流の擾乱に関連する連続の方程式と運動方程式を解くことによって得られるが，内外の境界では適当な境界条件を必要とする。表面張力波と音波の関係については，音波は内外流の界面においてのみ表面張力波に重ね合わせられるものと考える。

解析を容易にするために，液滴の中心と，半径 R の球座標の原点を一致させるものとする。液滴の液体とこの

球の外側の乱れた領域を占める気体はお互いに混じり合わず，非圧縮性で粘性は無いものと仮定する。また，表面張力に比べて浮力が小さい，すなわちボンド数 $g_L R^2 \Delta\rho / T$ は十分に小さく，重力を無視できるものと仮定する。ここで，g_L は局地重力加速度，$\Delta\rho = |\rho_1 - \rho_2|$，および T は界面張力である。液滴内および液滴の外の擾乱領域における連続および運動方程式は

$$\nabla \cdot V = 0 \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial \nabla}{\partial t} + \frac{\nabla p}{\rho} = 0 \tag{1.3}$$

ここで，V は速度ベクトル，p は圧力，そして ρ は密度である。

半径 R の球状液滴が外部の擾乱を受けて微少変動するとき，局部半径 r_s は次式で表される。

$$r_s = R + a(t) Y_n \tag{1.4}$$

ここで，Y_n は n 次の球関数，$a(t)$ は微少擾乱の大きさを示し $|a(t) \ll R|$ のオーダーの時間の関数である。本節の解析では $a(t)$ の 1 次のオーダーに限定する。このオーダーでは境界面における半径方向の流体の粒子速度は u 次式で表される。

$$u = \frac{da(t)}{dt} Y_n \tag{1.5}$$

ここでは，液滴中心の移動運動およびキャビテーションによる気泡の発生または崩壊は，式の取り扱いを単純にするため考慮しない。すなわち，

$$\frac{dR}{dt} = 0$$

である。式(1.2)および式(1.3)から次式を得る。

$$\nabla^2 p = 0 \tag{1.6}$$

式(1.6)は球関数の解を持つ。ここで，Lamb[7]，Plesset[8]，および Miller[9] 等が行った理論解析の解を利用して，液滴の変形による擾乱圧力解を表すと，式(1.3)および式(1.5)から

$$\left.\frac{\nabla \tilde{P}_r}{\rho}\right|_{r=r_s} \sim \beta_n^2 a(t) Y_n \boldsymbol{a}_r \tag{1.7}$$

を得る。ここで，$\tilde{p}_r$ は液滴の変形に対する復元力に寄与する擾乱圧力，$\boldsymbol{a}_r$ は半径方向の単位ベクトル，および

$$\beta_n^2 = \frac{(n-1)\,n\,(n+1)\,(n+2)\,T}{\left\{n\rho_0 + (n+1)\,\rho_1\right\} R^3} \tag{1.8}$$

である。ここで，β_n は液滴内外部の 2 非粘性流体の振動数である。

液滴とこの液滴の外部の擾乱領域を占める気体は共鳴チャンバーを満たす気体の中に存在するが，定在波の音場は外部から加えられた強い音場によるものであるから，音場は液滴の変形とは独立した関係にあるものと仮定する。ただし，液滴の擾乱そのものは音場の影響を受ける。従って，音響圧力場は境界面で液滴の擾乱圧力に重ね合わせることができるので，液滴の擾乱を支配する微分方程式は近似的に次式で表せる。

$$\left.\frac{\partial \tilde{V}}{\partial t}\right|_{r=r_s} + \left.\frac{\nabla \tilde{p}_r}{\rho}\right|_{r=r_s} = -\left.\frac{\nabla \tilde{p}_f}{\rho_0}\right|_{r=r_s} \tag{1.9}$$

ここで，$\tilde{p}$ は液滴の擾乱に寄与する式(1.1)に関係する項の総和であり，近似的に次式で表すことができる。

$$\left.\frac{\nabla \tilde{p}_f}{\rho_0}\right|_{r=r_s} \sim -\sum_{i=1}^{3} \frac{P_{i2}}{\rho_0}\left(\frac{\omega_{i2}}{c_0}\right)^2 \frac{\cos(\omega_{i2} t + \theta_{i2})}{\cos\left(\frac{\omega_{i2} l_{i0}}{c_0}\right)} \tilde{x}_i \boldsymbol{a}_i + \text{高調波項} \tag{1.10}$$

ここでは $2\pi r_s/\lambda_1 \ll 1$，および $2\pi r_s/\lambda_2 \ll 1$ と仮定する。もしも三軸音響場がどの軸に関しても同じであるとすると，$P_{12} = P_{22} = P_{32}$，$\omega_{12} = \omega_{22} = \omega_{33}$，および $\theta_{12} = \theta_{22} = \theta_{33}$ の関係が成り立つ。問題を更に単純にするため共鳴チャンバーの中心のまわりに球状共鳴が存在すると仮定すると，擾乱の 1 次項を扱う線形化された式は式(1.10)より次式で表すことができる。

$$\left.\frac{\nabla \tilde{p}_f}{\rho_0}\right|_{r=r_s} \sim -\frac{P_2}{\rho_0}\left(\frac{\omega_2}{c_0}\right)^2 \frac{\cos(\omega_2 t + \theta_2)}{\cos\left(\frac{\omega_2 l_0}{c_0}\right)} a(t) Y_n \boldsymbol{a}_r \tag{1.11}$$

式(1.1)，および式(1.3)における $\nabla p/\rho$ に関連する高次項はベルヌーイの積分定数，および擾乱のない表面張力の項とともに液滴の移動を記述するため，ここでは無視する。式(1.5)，式(1.7)，および式(1.11)から式(1.9)は次のように表すことができる。

$$\frac{d^2 a(t)}{dt^2} + \left\{\beta_n^2 - \frac{p_2}{\rho_0}\left(\frac{\omega_2}{c_0}\right)^2 \frac{\cos(\omega_2 t + \theta_2)}{\cos\left(\frac{\omega_2 l_0}{c_0}\right)}\right\} a(t) = 0 \tag{1.12}$$

ここで，

$$\psi = \frac{(\omega_2 t + \theta_2)}{2} \tag{1.13}$$

$$hM^2 = \frac{8P_2}{\rho_0 c_0^2} \cos\left(\frac{\omega_2 l_0}{c_0}\right) \tag{1.14}$$

$$b_M = \left(\frac{2\beta_n}{\omega_2}\right)^2 + \frac{h_M^2}{2} \tag{1.15}$$

とすると，式(1.12)は次のようなマシュー方程式となる。

$$\frac{d^2 a(t)}{d^2 \psi} + (b_M - h_M^2 \cos^2 \psi)\, a(t) = 0 \tag{1.16}$$

図 2.1 は b_M および h_M のさまざまな値に関するマシュー方程式の安定解である[10], [11]。微少重力環境下で使う三軸共鳴チャンバーでは，高い音圧を使う必要がないので $|h_M| \ll 1$ である。図からわかるように b_M が 0 または 1 に近い場合，すなわち液滴表面張力波の低次モード，または $\omega_1 = \omega_2/2 = \beta_n$ の一次共鳴モードでは，$|h_M| \ll 1$ の条件

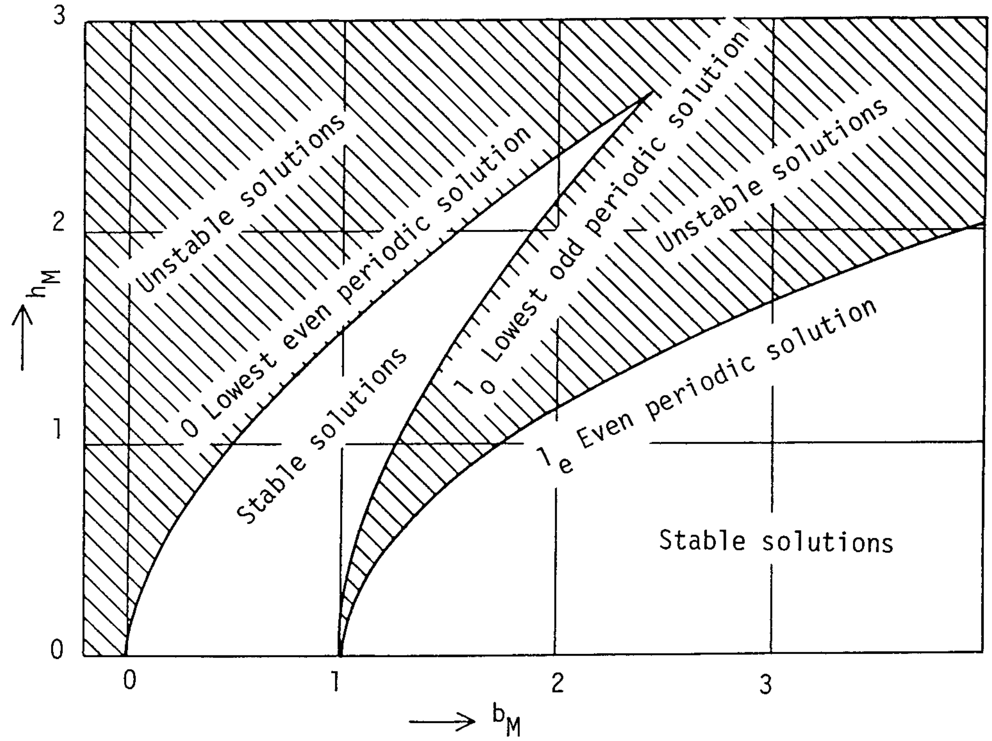

図 2.1 マシュー方程式の解

でも音波と液滴の表面張力波との干渉による不安定が発生する可能性がある。この場合，液滴表面張力波の低次モードの振動に関連する不安定は宇宙実験にとって重要である。

2.2 回転液滴の表面張力による多葉波

Chandrasekhar は回転液滴の形状安定に関する理論を発表をしている[12]が，そこでは液滴に含まれる全力学的エネルギーと表面エネルギー（彼の表記によれば表面エネルギーテンソル）が等しいとしている。彼の理論では表面エネルギーテンソルの対称性が重要である。しかし，対称性そのものが表面張力による多葉波を理論的に扱えなくしている。さらに，Chandrasekhar 型回転曲面の安定限界に対する音場の影響は小さいことが筆者等の研究でわかった。すなわち，Chandrasekhar の不安定基準である $\Omega^2 > 2\Im$ の関係式（文献[12] の p.14 を参照）と等価の関係を音場の影響として示した[3]。Brown[13]はこの問題を有限要素法を用いて研究したが，彼の方法は音場との干渉を直感的に理解するにはあまりにも複雑である。回転液滴の表面張力波による多葉波と音場との干渉に関する解析的な研究は行われたことがない。

本節では回転液滴の表面張力によって駆動される多葉波を求める近似解を示す。Z 軸まわりに角速度 Ω で一様に回転している座標系では，液滴内部および外部流における流体の連続および運動の式はそれぞれ次式で表すことができる。

$$\nabla \cdot \boldsymbol{V} = 0 \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} = -\frac{\nabla p}{\rho} + (\boldsymbol{r} - z\boldsymbol{a}_z)\,\Omega^2 + 2\Omega \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{a}_z \tag{2.2}$$

ここで，$\boldsymbol{r}$ は位置ベクトル，$\boldsymbol{a}_z$ は Z 軸の単位ベクトル，× はベクトル積を表す。式(2.2)のベクトル発散およびベクトル回転をとると，それぞれ次式となる。

$$\frac{\nabla^2 p}{\rho}\ 2\Omega^2 + 2\Omega \boldsymbol{a}_z \cdot (\nabla \times \boldsymbol{V}) \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial (\nabla \times \boldsymbol{V})}{\partial t} = 2\Omega\,(a_z \cdot \nabla)\,\boldsymbol{V} \tag{2.4}$$

回転液滴の定常状態は固体状態であると仮定すると，

$$\nabla \times \boldsymbol{V}_s = 0 \tag{2.5}$$

ここで，サブスクリプト s は定常状態を表す。

外部流れの液滴内部への影響を無視すれば，液滴の内部圧力は容易に次式で表すことができる。

$$p_s = p_0 + \frac{\rho_i\,\Omega^2\,\omega^2}{2} \tag{2.6}$$

ここで，サブスクリプト i は液滴の内側を表し，p_0 は定数，ω は z における平衡形状の Z 軸からの表面半径である。

一定速度で回転している平衡状態にある液滴がわずかに乱される場合を想定すると，

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}_s + \tilde{\boldsymbol{V}} \tag{2.7}$$

$$p = p_s + \tilde{p} \qquad (2.8)$$

ここで，$\tilde{\boldsymbol{V}}$ と $\tilde{p}$ はそれぞれ擾乱速度ベクトルと擾乱圧力を表す。式(2.1)～式(2.4)は次のように表すことができる。

$$\nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{V}} = 0 \qquad (2.9)$$

$$\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{V}}}{\partial t} = -\frac{\nabla \tilde{p}}{\rho} + 2\Omega \tilde{\boldsymbol{V}} \times \boldsymbol{a}_z \qquad (2.10)$$

式(2.2)のベクトル発散をとると，

$$\frac{\nabla^2 \tilde{p}}{\rho} = 2\Omega \boldsymbol{a}_z \cdot (\nabla \times \tilde{V}) \qquad (2.11)$$

式(2.2)のベクトル回転は，

$$\frac{\nabla \times \tilde{V}}{t} = 2\Omega (\boldsymbol{a}_z \cdot \nabla)\, \tilde{V} \qquad (2.12)$$

となる。

2.2.1 擾乱流れ場における渦なし流

擾乱流れ場は渦なし流れであると仮定すると，

$$\nabla \times \tilde{\boldsymbol{V}} = 0 \qquad (2.13)$$

式(2.12)からは次式が得られる。

$$(\boldsymbol{a}_z \cdot \nabla)\tilde{\boldsymbol{V}} = 0 \qquad (2.14)$$

したがって，式(2.9)～式(2.12)の解としては二次元変数分離型を仮定することができる。式(2.9)～式(2.12)の解は極座標系において以下のように表される。

液滴内部流れでは

$$\tilde{\phi}_i = -\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \dot{a}_n(t) \cos(n\theta) - \dot{b}_n(t) \sin(n\theta) \right\} \left(\frac{\omega}{n}\right) \left(\frac{r}{\omega}\right)^n \qquad (2.15)$$

$$\begin{aligned} \tilde{p}_i = &-\rho_i \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \ddot{a}_n(t) \cos(n\theta) - \ddot{b}_n(t) \sin(n\theta) \right\} \left(\frac{\omega}{n}\right) \left(\frac{r}{\omega}\right)^n \\ &-\rho_i \Omega \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \dot{a}_n(t) \sin(n\theta) - \dot{b}_n(t) \cos(n\theta) \right\} \left(\frac{\omega}{n}\right) \left(\frac{r}{\omega}\right)^n \end{aligned} \qquad (2.16)$$

液滴の外部流れでは

$$\tilde{\phi}_e = -\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \dot{a}_n(t) \cos(n\theta) - \dot{b}_n(t) \sin(n\theta) \right\} \left(\frac{\omega}{n}\right) \left(\frac{\omega}{r}\right)^n \qquad (2.17)$$

$$\begin{aligned} \tilde{p}_e = &\rho_e \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \ddot{a}_n(t) \cos(n\theta) - \ddot{b}_n(t) \sin(n\theta) \right\} \left(\frac{\omega}{n}\right) \left(\frac{\omega}{r}\right)^n \\ &-2\rho_e \Omega \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \dot{a}_n(t) \sin(n\theta) - \dot{b}_n(t) \cos(n\theta) \right\} \left(\frac{\omega}{n}\right) \left(\frac{\omega}{r}\right)^n \end{aligned} \qquad (2.18)$$

ここで，サブスクリプト e は外側を意味し，$\tilde{\phi}$ は擾乱速度のポテンシャルである。

内側と外側とを結ぶ境界では次の条件が満たされなければならない。

$$\left.\frac{\partial \phi_i}{\partial \boldsymbol{r}}\right|_{r=\omega} \left.\frac{\partial \phi_e}{\partial \boldsymbol{r}}\right|_{r=\omega}$$

境界界面に続く擾乱をラグランジェの変位で表すことにすると，

$$\xi = \xi_r \boldsymbol{a}_r + \xi_\theta \boldsymbol{a}_\theta \qquad (2.19)$$

ここで，$\boldsymbol{a}_r$ および $\boldsymbol{a}_\theta$ はそれぞれ極座標系の半径方向および円周方向の単位ベクトルである。したがって，次式が容易に得られる。

$$\xi_r = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n(t) \cos(n\theta) - b_n(t) \sin(n\theta) \right\} \qquad (2.20)$$

$$\xi_\theta = -\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n(t) \sin(n\theta) - b_n(t) \cos(n\theta) \right\} \qquad (2.21)$$

回転液滴の非定常な形状を位置ベクトル $\Re$ で表すと，

$$\Re = (\omega + \xi_r)\, \boldsymbol{a}_r + \xi_\theta \boldsymbol{a}_\theta + z\boldsymbol{a}_z \qquad (2.22)$$

液滴の表面における内外流の局部圧力の平衡は

$$P_i = P_e + T div\tilde{\boldsymbol{n}}$$

（ここで，$\tilde{\boldsymbol{n}}$ は液滴表面上における単位法線ベクトル）で表されるから，境界面における擾乱流れの関係式は次式で表される。

$$\tilde{p}_f \big|_{r=\omega} - \tilde{p}_e \big|_{r=\omega} = T\, \mathrm{div}\boldsymbol{n} \qquad (2.23)$$

式(2.16)，および式(2.18)から，

$$\begin{aligned} \tilde{p}_f \big|_{r=\omega} - \tilde{p}_e \big|_{r=\omega} = &-(\rho_i + \rho_e) \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \ddot{a}_n(t) \cos(n\theta) - \ddot{b}_n(t) \sin(n\theta) \right\} \left(\frac{\omega}{n}\right) \\ &-2(\rho_i - \rho_e) \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \dot{a}_n(t) \sin(n\theta) + \dot{b}_n(t) \cos(n\theta) \right\} \left(\frac{\omega}{n}\right) \end{aligned} \qquad (2.24)$$

ここで，ξ の第一次項のみに注目すれば，式(2.22)より

$$\begin{aligned} div\tilde{\boldsymbol{n}} = &\frac{\Phi \xi_r}{\sqrt{1+\Phi^2}\,\omega^2} + \left\{ \frac{\Phi}{\sqrt{(1+\Phi^2)^3}\,\omega} + \frac{2-\Phi^2}{\sqrt{(1+\Phi^2)^5}} \frac{d\Phi}{d\omega} \right\} \frac{\partial \xi_r}{\partial r} \\ &+ \frac{\Phi}{\sqrt{(1+\Phi^2)^3}} \frac{\partial^2 \xi_r}{\partial r^2} + \frac{\Phi}{\sqrt{(1+\Phi^2)}\,\omega^2} \frac{\partial \xi_r}{\partial \theta^2} \end{aligned} \qquad (2.25)$$

ここで，$\Phi = df/d\omega$，$z = f(\omega)$ は平衡状態にある非軸対称形状を表す。

式(2.24)，および式(2.25)を式(2.23)に代入すると，次のような多葉波の振動方程式が得られる。

$$\begin{aligned} &\ddot{a}_n(t) + 2\gamma\, \dot{b}_n(t) + \sigma_n^2 a_n(t) = 0 \\ &\ddot{b}_n(t) - 2\gamma\, \dot{a}_n(t) + \sigma_n^2 b_n(t) = 0 \end{aligned} \qquad (2.26)$$

ここで，

$$r = \frac{\rho_i - \rho_e}{\rho_i + \rho_e} \Omega \qquad (2.27)$$

また，

$$\sigma_n^2 = \frac{nT\Phi}{(\rho_i + \rho_e)\sqrt{1+\Phi^2}\,\omega^3} \left\{ 1 - n^2 + \frac{(n-1)^2}{(1+\Phi^2)} + \frac{(n-1)(2-\Phi^2)}{(1+\Phi^2)^2} \frac{\frac{d\Phi}{d\omega}}{\frac{\Phi}{\omega}} \right\} \qquad (2.28)$$

式(2.26)から n 次の多葉波の自然振動数は次式で与えられる。

$$\beta_n^* = \sigma_n \sqrt{1 + \frac{\gamma}{\sigma_n}} \pm \gamma \qquad (2.29)$$

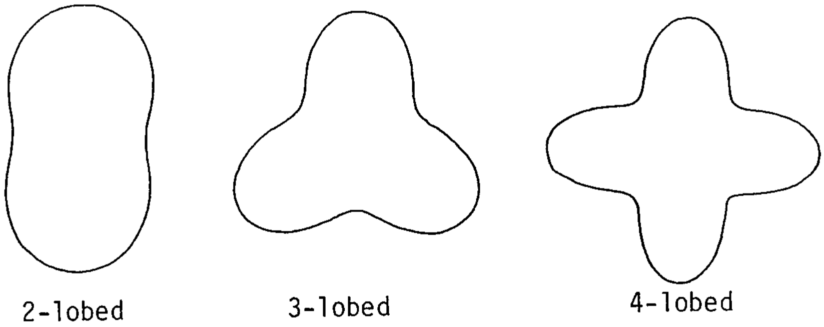

図 2.2　回転液滴の表面張力による多葉波

σ_n を液滴の赤道半径 R で表すと，

$$\sigma_n^2\,|_{\omega=R} = \frac{n(n-1)(n-2)T}{(\rho_i+\rho_e)R^3}\left\{1+\frac{2}{n+2}\Sigma\right\} \tag{2.30}$$

ここで，$\Sigma=\rho_i\Omega^2R^3/8T$ は Chandrasekhar が導入した回転液滴の平行状態の形状を決める無次元パラメータである。$\Omega=0$ とき，式(2.29)から次式を得る。

$$\beta_n^{*2}\,|_{\Omega=0} = \frac{n(n+1)(n+2)T}{(\rho_i+\rho_e)R^3} \tag{2.31}$$

この式は，Lamb[7]によって示されたように，$\rho_e\to 0$ における球状液滴の表面張力波の自然振動数を与えるものである。図 2.2 は表面張力による多葉波の例を示す。

2.2.2　擾乱流れ場における渦あり流れ

$\nabla\times\tilde{V}$ のとき次の 3 次元擾乱流れ場を仮定することができる。液滴内部では，

$$\tilde{V}_{ri} = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\dot{a}_n(t)\cos(n\theta)-\dot{b}_n(t)\sin(n\theta) + \frac{\omega}{n}k_n^2\sin(-2\Omega t+n\theta+2k_nz)\right\}\left(\frac{r}{\omega}\right)^{n-1} \tag{2.32 a}$$

$$\tilde{V}_{\theta i} = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\dot{a}_n(t)\sin(n\theta)+\dot{b}_n(t)\cos(n\theta) + \frac{\omega}{n}k_n^2\cos(-2\Omega t+n\theta+2k_nz)\right\}\left(\frac{r}{\omega}\right)^{n-1} \tag{2.32 b}$$

$$\tilde{V} = \sum_{n=1}^{\infty}k_n\cos(-2\Omega t+n\theta+2k_nz)\left(\frac{r}{\omega}\right)^{n-2} \tag{2.32 c}$$

$$\begin{aligned}\tilde{p}_i = &-\rho_i\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\ddot{a}_n(t)\cos(n\theta)-\ddot{b}_n(t)\sin(n\theta)\right\}\left(\frac{\omega}{n}\right)\left(\frac{r}{\omega}\right)^n \\ &-2\rho_i\Omega\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\dot{a}_n(t)\sin(n\theta)+\dot{b}_n(t)\cos(n\theta)\right\}\left(\frac{\omega}{r}\right)\left(\frac{r}{\omega}\right)^n \\ &+\rho_i\Omega\sum_{n=1}^{\infty}\cos(-2\Omega t)+n\theta+2k_nz)\left(\frac{r}{\omega}\right)^n\end{aligned} \tag{2.33}$$

液滴の外部では，

$$\tilde{V}_{re} = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\dot{a}_n(t)\cos(n\theta)-\dot{b}_n(t)\sin(n\theta) + \frac{\omega}{n}k_n^2\sin(-2\Omega t+n\theta+2k_nz)\right\}\left(\frac{\omega}{r}\right)^{n+1} \tag{2.34 a}$$

$$\tilde{V}_{\theta e} = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\dot{a}_n(t)\sin(n\theta)+\dot{b}_n(t)\cos(n\theta) + \frac{\omega}{n}k_n^2\cos(-2\Omega t+n\theta+2k_nz)\right\}\left(\frac{\omega}{r}\right)^{n+1} \tag{2.34 b}$$

$$\tilde{V}_{ze} = -\sum_{n=1}^{\infty}k_n\cos(-2\Omega t+n\theta+2k_nz)\left(\frac{\omega}{r}\right)^{n+2} \tag{2.34 c}$$

$$\begin{aligned}\tilde{p}_e = &\rho_e\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\ddot{a}_n(t)\cos(n\theta)-\ddot{b}_n(t)\sin(n\theta)\right\}\left(\frac{\omega}{n}\right)\left(\frac{\omega}{r}\right)^n \\ &-2\rho_e\Omega\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\dot{a}_n(t)\sin(n\theta)-\dot{b}_n(t)\cos(n\theta)\right\}\left(\frac{\omega}{n}\right)\left(\frac{\omega}{r}\right)^n \\ &+\rho_e\Omega\sum_{n=1}^{\infty}\cos(-2\Omega t+n\theta+2k_nz)\left(\frac{\omega}{r}\right)^n\end{aligned} \tag{2.35}$$

ここで，k_n は Z 軸の波数を表す。

式(2.32)〜式(2.35)は境界面 $r=\omega$ において二つの連続方程式である式(2.9)，および式(2.11)を満たす。式(2.32)は，$(k_nR/2\pi)_i\gg 1$ の条件下で近似的に式(2.12)を満足している。式(2.34)は，$(k_nR/2\pi)_e\ll 1$ の条件下で近似的に式(2.12)を満足する。液滴の Z 軸方向で考えた表面張力波と外部流れ内の音波を考えると，仮定$(k_nR/2\pi)_i\gg 1$ では液滴表面波は液滴半径に比べて波長が短く，$(k_nR/2\pi)_e\ll 1$ では外部流における波の波長が液滴半径に比べて大きいことを意味する。したがって，式(2.32)〜式(2.35)は液滴内部の擾乱流れ場の近似解である。

ラグランジェの変位は次式のように表せる。

$$\xi_r = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n(t)\cos(n\theta)-b_n(t)\sin(n\theta)-\frac{\omega k_n^2}{2n\Omega}\cos(-2\Omega t+n\theta+2k_nz)\right\} \tag{2.36 a}$$

$$\xi_\theta = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n(t)\sin(n\theta)-b_n(t)\cos(n\theta)-\frac{\omega k_n^2}{2n\Omega}\sin(-2\Omega t+n\theta+2k_nz)\right\} \tag{2.36 b}$$

$$\xi_z = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k_n}{2\Omega}\sin(-2\Omega t+n\theta+2k_nz) \tag{2.36 c}$$

$div\tilde{\boldsymbol{n}}$ を計算することにより，式(2.32)から擾乱流れ場における渦あり流れの多葉波方程式を次のように得ることができる。

$$\left.\begin{aligned}\ddot{a}_n(t)+2\gamma\dot{b}_n(t)+\sigma_n^2a_n(t) &= f_1\cos(-2\Omega t+2k_nz)+f_2\sin(-2\Omega t+2k_nz)\\ \ddot{b}_n(t)+2\gamma\dot{a}_n(t)+\sigma_n^2b_n(t) &= f_1\sin(-2\Omega t+2k_nz)+f_2\cos(-2\Omega t+2k_nz)\end{aligned}\right\} \tag{2.37}$$

ここで，

$$f_1 = f_1\,(\rho_i\,,\rho_e\,,\omega, n, \Omega, T, \Phi, k_n)$$
$$f_2 = f_2\,(\rho_i\,,\rho_e\,,\omega, n, \Omega, T, \Phi, k_n) \qquad (2.38)$$

である。

微分方程式（2.37）の特別解は次の形で与えられる。

$$\left.\begin{aligned} a_n\,(t) &= A\,\sin\,(-2\Omega t + 2k_n z) + B\,\cos\,(-2\Omega t + 2k_n z) \\ b_n\,(t) &= C\,\sin\,(-2\Omega t + 2k_n z) + D\,\cos\,(-2\Omega t + 2k_n z) \end{aligned}\right\} \qquad (2.39)$$

ここで，A，B，C および D は未定定数である。

式(2.39)を式(2.37)に代入すると次の特性方程式が得られる。

$$\begin{vmatrix} \sigma_n^2 - 4\Omega^2 & 0 & 0 & 4\gamma\Omega \\ 0 & \sigma_n^2 - 4\Omega^2 & -4\gamma\Omega & 0 \\ 0 & -4\gamma\Omega & \sigma_n^2 - 4\Omega^2 & 0 \\ 4\gamma\Omega & 0 & 0 & \sigma_n^2 - 4\Omega^2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.40)$$

式(2.20)より容易に次式が得られる。

$$\sigma_n^2 = 4\Omega^2 \pm 2\gamma\Omega \qquad (2.41)$$

式(2.41)の条件が満たされるとき，n 次モードの多葉波は成長する。式(2.30),および式(2.27)を使って，$\Sigma = \rho_i\Omega^2 P^3/8T$ であることを考えると，$\rho_e \ll \rho_i$ である回転液滴中に渦流が存在する液滴の表面張力による多葉波の励起条件は次式で表すことができる。

$$\Sigma = \frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{16\,(2\pm1) - 2n\,(n-1)} \qquad (2.42)$$

式(2.42)から n 次モードの多葉波が発生する条件は，

$\Sigma = 0.182$ or 0.667 のときに２次モード

$\Sigma = 0.833$ or 7.5 のときに３次モード

$\Sigma = 3$ のときに４次モード

すなわち，液体中に渦流が存在する回転液滴の表面張力による多葉波では，５次モード以上の高次モードは理論的には発生しない。

2.3　回転液滴の表面張力による多葉波と音波の干渉

第２章第１節で述べた液滴表面張力波の共鳴音場との干渉に関する解析結果からの類推により，小さな擾乱領域，すなわち $|a_n(t)/\omega| \ll 1$ および $|b_n(t)/\omega| \gg 1$ の条件下では，擾乱流れ場における渦なし流の多葉波と共鳴音波との干渉は式(2.26)から次式で記述されるものとする。

$$\ddot{\xi}_r - 2\gamma\,\dot{\xi}_\theta + \sigma_n^2\,\xi_r = -\frac{\partial\hat{p}_f}{\partial r}\,\frac{1}{\rho_e} \qquad (3.1)$$

ここで，$\hat{p}_f$ は Z 軸回りを角速度 Ω で一様に回転している座標系における共鳴音場圧力項のラグランジェ変位の結合項である。

$$\frac{\partial\bar{p}_f}{\partial r} = F_0\,(\theta, t) + \frac{\partial\hat{p}_f}{\partial r} \qquad (3.2)$$

直交する二つの共鳴音波が音波浮揚液滴に回転トルクを加える位相を除き，三軸の共鳴音波条件が全て等しいとすると次式を得る。

$$-\frac{\partial\hat{p}_f}{\partial r} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\dfrac{\omega_n}{c_0}\right)^2 p_n}{\cos\left(\dfrac{3n\pi}{2}\,\dfrac{2\pi l_0}{\lambda_n}\right)}$$
$$\times\left[\cos^2(\theta+\Omega t)\cos\left\{\frac{n\pi}{2} - \frac{\omega_n}{c_0}\,\omega\cos(\theta+\Omega t)\right\}\cos(\omega_n t + \theta_{xn})\right.$$
$$\left. + \sin^2(\theta+\Omega t)\cos\left\{\frac{n\pi}{2} - \frac{\omega_n}{c_0}\,\omega\sin(\theta+\Omega t)\right\}\cos\left(\omega_n t + \theta_{yn}\right)\right]\xi_r$$
$$+ \text{the higher orders in } \xi_r \qquad (3.3)$$

式(3.2)の右辺第１項は液滴中心の移動運動を支配する力を表すから，ここでは無視する。$|2\pi R/\lambda_2| \ll 1$，および $|2\pi R/\lambda_2| \gg 1$ で表されるような小さな液滴では $n \geq 3$ の高調波を無視すると，干渉の微分方程式を次式で示すようなベッセル関数表示を用いて表すことができる。

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{a}_n(t) + \left[\sigma_n^2 - \Lambda_1\cos 2\theta_1 - \Lambda_{2n}(\cos 2\theta_2 + \cos 2\theta_3)\right]a_n(t) \\ &\qquad + 2\gamma\dot{b}_n(t) + \Lambda_{2n}(\sin 2\theta_2 - \sin 2\theta_3)\,b_n(t) = 0 \\ &\ddot{b}_n(t) + \left[\sigma_n^2 - \Lambda_1\cos 2\theta_1 - \Lambda_{2n}(\cos 2\theta_2 + \cos 2\theta_3)\right]b_n(t) \\ &\qquad + 2\gamma\dot{a}_n(t) + \Lambda_{2n}(\sin 2\theta_2 - \sin 2\theta_3)\,a_n(t) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (3.4)$$

ここで，

$$\Lambda_1 = \left(\frac{\omega_1}{c_0}\right)^2 \frac{P_2\left\{J_0\left(\dfrac{2\pi\omega}{\lambda_2}\right) - J_2\left(\dfrac{2\pi\omega}{\lambda_2}\right)\right\}\cos\left\{\dfrac{\theta_{y2} - \theta_{x2}}{2}\right\}}{\rho_e}\cos\left(\frac{2\pi l_0}{\lambda_2}\right)$$

$$\Lambda_{2n} = \left(\frac{\omega_1}{c_0}\right)^2 \frac{P_2\left\{2J_{2n}\left(\dfrac{2\pi\omega}{\lambda_2}\right) - J_{2n-2}\left(\dfrac{2\pi\omega}{\lambda_2}\right) - J_{2n+2}\left(\dfrac{2\pi\omega}{\lambda_2}\right)\right\}}{2\rho_e}\cos\left(\frac{2\pi l_0}{\lambda_2}\right)$$

$$2\theta_1 = \omega_2 t + \frac{\theta_{x2} + \theta_{y2}}{2}$$
$$2\theta_2 = (\omega_2 - 2n\Omega)\,t + \theta_{y2}$$
$$2\theta_3 = (\omega_2 - 2n\Omega)\,t + \theta_{y2} \qquad (3.5)$$

式(3.4)で表される振動系の安定性を調べるために，擾乱項に発散性を調べる試験関数として，

$a_n(t) = \alpha\theta(t)\exp(\pm i\gamma t)$ および $b_n(t) = \beta\theta(t)\exp(\pm i\gamma t)$

を選ぶ。ただし，α および β はここでは未定定数である。式(3.4)の安定性を支配する微分方程式は次のマシュー方程式で表される。

$$\frac{d^2\theta}{d\psi^2} + (b_M - h_M^2\cos^2\psi)\,\theta = 0 \qquad (3.6)$$

ここで，

$$b_M = \frac{\sigma_n^2 + \gamma^2}{\omega_1^2} + \frac{h_M^2}{2} \tag{3.7}$$

$$h_M^2 = \frac{2\sqrt{\Lambda_1^2 + 4\Lambda_{2n}^2 \pm 4\Lambda_1\Lambda_{2}n\cos\left(\frac{\theta_{y2}-\theta_{x2}}{2}\right)}}{\omega_1^2} \tag{3.8}$$

図 2.1 はマシュー方程式の安定および不安定解を示す。

次に，特別なモード，すなわち $a_n(t)$ および $b_n(t)$ がお互いに独立している場合について述べる。たとえば，$a_n(t) = 0$ または $b_n(t) = 0$ の場合には，微分方程式(3.4)は次のように表現され，

$$\frac{\dot{a}_n(t)}{a_n(t)} = \pm\frac{\Lambda_{2n}(\sin 2\theta_2 \sin 2\theta_3)}{2\gamma} \tag{3.9}$$

$$\omega_1 = n\Omega \tag{3.10}$$

共鳴音波の基本周波数が液滴回転数の n 倍のときに n 次の多葉波が成長するという解となる。

2.4 音響放射圧による液滴の変形

音波浮揚装置における液滴の音響放射圧による圧縮はローラーを使わずに液状フィルムを製造したり，ノズルなしの液状ファイバーの製造に利用することが可能になる。本節では，音波共鳴装置内に浮揚された液滴が一軸に沿う強い共鳴音場の音響放射圧によって圧縮される場合の表面張力によって支えられる液滴形状を記述する理論的な解析を示す。図 2.3 は共鳴音波による Z 軸方向に圧縮された液滴の回転軸対称の断面形状の上半分のみを示す。粒子速度波の節は Z 軸の原点にあるものとする。

共鳴音波で圧縮された液滴の形状を平衡状態にある扁球のような回転軸対称の形状を仮定すると，子午線方向の断面の形状式を与えれば，形状は一義的に決まる。

$$z = f(r) \tag{4.1}$$

平面定在波中の共鳴音波の波長に比べて小さい液滴に加わる音響放射圧が $p\sin(2kf)$ であることを考えると液体内部の圧力は次式で与えられる。

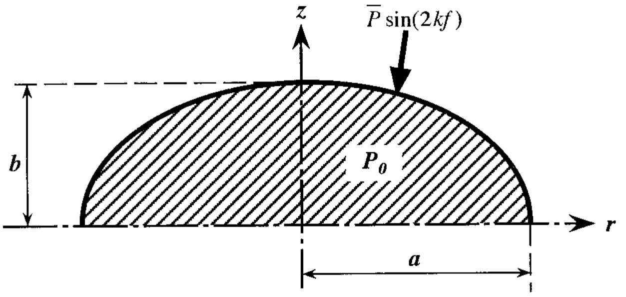

図 2.3　圧縮されている液滴表面の座標系

$$p = p_0 - \bar{p}\sin(2kf) \tag{4.2}$$

ここで，

$$\bar{p} = \frac{p_1^2}{\rho_0 c^2} ka_0 F\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right) \tag{4.3}$$

および，

$$F\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right) = \frac{1 + \frac{2}{3}\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)}{2 + \frac{\rho_0}{\rho}} \tag{4.4}$$

ただし，p_0 は定数，p_1 は定在波の基本周波数の音圧振幅，$k = \omega c$ は波長定数，ω は共鳴音波の角振動数，c は音波の伝播速度，ρ_0 は媒質の定常時の密度，ρ は液滴の密度である。

表面張力と平衡を保つ閉局面 S の近傍の内部圧力は次式で与えられる。

$$p = T\,div\boldsymbol{n}\ (on\ S\_) \tag{4.5}$$

ここで，$\boldsymbol{n}$ は S の単位法線ベクトル，T は液滴の表面張力である。単位法線ベクトルの発散は回転曲面に関しては次式で与えられる。

$$div\boldsymbol{n} = -\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{r\phi}{\sqrt{1+\phi^2}}\right) \tag{4.6}$$

ここで，$\phi = df/dr$ である。したがって，一軸方向の定在波の影響下にある液滴の回転軸対称の形状を記述する基礎方程式は次式で与えられる。

$$-\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{r\phi}{\sqrt{1+\phi^2}}\right) = p_0 - \overline{p}\sin(2kf) \tag{4.7}$$

式(4.7)を積分すると次式が得られる。

$$-\frac{r\phi}{\sqrt{1+\phi^2}} = \frac{p_0}{2T}r^2 - \frac{\bar{p}}{T}\int_0^r r\sin(2kf)\,dr \tag{4.8}$$

液滴の中心と座標系の中心とは一致しているものとすると，$r = 0$ は存在しており，その点では回転対称性の故に $\phi=0$ である。式(4.8)はこのような条件を満足しており，液滴の赤道上（$r = a$）では $\phi \to -\infty$ であり，式(4.8)の液滴の赤道上の表現として，次のような式を得ることができる。

$$p_0 = \frac{2T}{a^2}\left\{a + \frac{p}{T}\int_0^a r\sin(2kf)\,dr\right\} \tag{4.9}$$

式(4.9)を式(4.8)に代入すると，

$$\frac{\phi}{\sqrt{1+\phi^2}} = -\left\{a + \frac{\bar{p}}{T_0}\int_0^a r\sin(2kf)\,dr\right\}\frac{r}{a^2} + \frac{\bar{p}}{Tr_0}\int_0^r r\sin(2kf)\,dr \tag{4.10}$$

変数 r および z を扁球の長半径 a で無次元化すると，式

(4.10)は次の形に書き換えることができる。

$$\frac{\phi}{\sqrt{1+\phi^2}} = -\left\{1+\frac{\bar{p}a}{T_0}\int_0^1 \xi \sin(2ka\eta)\,d\xi\right\}\frac{\bar{p}a}{T\xi}\int_0^{\xi} \xi \sin(2ka\eta)\,d\xi \tag{4.11}$$

ここで，$\xi = r/a$，$|\xi| \leq 1$，$\eta = f/a$ および $|\eta| \leq 1$。

次に定義する新しい無次元数を導入する。

$$\Pi = \frac{\bar{p}ka_0^2}{T} \tag{4.12}$$

この無次元数は液滴に働く音響放射圧による力と液滴の表面張力の比を表す。式(4.11)において，$\sin(2ka\eta) \ll 1$ の仮定のもとで $\sin(2ka\eta)$ の展開式の第一項をとり，さらに液滴の体積

$$\int_0^1 \xi\eta d\xi = \frac{1}{3}\left(\frac{a_0}{a}\right)^3$$

は保存されることを考えると，式(4.11)は次のように書き換えられる。

$$\frac{\phi}{\sqrt{1+\phi^2}} = -\left\{1+\frac{2}{3}\left(\frac{a_0}{a}\right)\Pi\right\}\xi + \frac{2\left(\frac{a}{a_0}\right)^2\Pi}{\xi}\int_0^{\xi}\xi\eta d\xi \tag{4.13}$$

ここで，a_0 は変形していない元の球状液滴の半径を表す。

式(4.13)の解を ξ の級数で表せるものとすると，

$$\eta = b_0 + b_1\xi + b_2\xi^2 + b_3\xi^3 + b_4\xi^4 + \cdots + b_n\xi^n + \cdots \tag{4.14}$$

$$\phi = b_1 + 2b_2\xi + 3b_3\xi^2 + 4b_4\xi^3 + 5b_5\xi^4 + \cdots + nb_n\xi^{n-1} + \cdots \tag{4.15}$$

ここで，b_0，b_1，$b_2 \cdots$，b_n，…は無次元係数，また $b_0 = b/a$ は扁球の半短径と半長径の比を表す。

新しい無次元数 Γ を次のように定義すると，

$$\Gamma = 1 + \frac{2}{3}\left(\frac{a_0}{a}\right)\Pi - b_0\left(\frac{a_0}{a}\right)^2\Pi \tag{4.16}$$

ここで，$\Gamma<1$ である。式(4.13)の解は次式の級数解として与えられる。

$$\eta(\xi) = b_0 - \frac{1}{2}\Gamma\xi^2 + \frac{1}{32}\Gamma^2(1-4\Gamma)\xi^4 + \cdots \tag{4.17}$$

液滴の形状が回転対称の扁球で近似されるとすると，次の関係が容易に得られる。

$$\eta(\xi) = b_0(1-\xi^2)$$

$$\int_0^1 \eta(\xi)\,\xi d\xi = \frac{1}{3}\left(\frac{a_0}{a}\right)^3$$

$$b_0 = \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 \tag{4.18}$$

そこで，式(4.16)は次の近似式で表される。

$$\Gamma = 1 - \frac{1}{3}\left(\frac{a_0}{a}\right)\Pi + \cdots \tag{4.19}$$

$\Pi<3$ では式(4.16)において Γ の高次の項を無視すると，次の三次方程式を得る。

$$\Gamma = b_0$$

$$\left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \frac{1}{3}\Pi\left(\frac{a_0}{a}\right) - 1 = 0 \tag{4.20}$$

3次方程式(4.20)は一つの実数解と一組の共役複素数解を持つ。本節で興味のある実数解は以下で与えられる。

$$\frac{a_0}{a} = \left\{\frac{1}{2}+\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\Pi}{9}\right)^3}\right\}^{1/3} + \left\{\frac{1}{2}-\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\Pi}{9}\right)^3}\right\}^{1/3} \tag{4.21}$$

液滴の体積はその形状にかかわらず一定であるから，

$$\frac{b}{a} = \left(\frac{a_0}{a}\right)^3$$

$$b_0 = 1 - \frac{\Pi}{3} + \frac{1}{27}\Pi^2 - \left(\frac{\Pi}{9}\right)^4 + \cdots \tag{4.22}$$

$\Pi>3$ および $(\Pi/3)(a_0/a)<1$ においても，式(4.20)と同じ関係を得る。$\Pi>3$ の領域では解の収斂性をよくするために式(4.16)とは異なる表現をする方がよい。すなわち，

$$b_0 = \frac{1}{1+\frac{1}{3}\left(\frac{a}{a_0}\right)^2\Pi} \tag{4.23}$$

次の関係式を考慮すると，

$$\frac{1}{3}\left(\frac{a}{a_0}\right)^2\Pi > 1 > \frac{1}{3}\left(\frac{a}{a_0}\right)\Pi$$

$$b_0 \sim \frac{3}{\Pi}\left(\frac{a_0}{a}\right)^2 - \left\{\frac{3}{\Pi}\left(\frac{a_0}{a}\right)^2\right\}^2 = \left(\frac{a_0}{a}\right)^3$$

液滴の形状を記述する近似式は次式で表せる。

$$\frac{a_0}{a} = \frac{3}{\Pi} - \left\{\frac{3}{\Pi}\left(\frac{a_0}{a}\right)\right\}^2 \tag{4.24}$$

もしも Π が次に示す値より大きい場合には

$$\Pi > (81)^{\frac{1}{3}} = 4.32675$$

液滴の形状を記述する近似式は次式で表せる。

$$\frac{b}{a} = b_0 \fallingdotseq \left(\frac{3}{\Pi}\right)^3\left\{1-3\left(\frac{3}{\Pi}\right)^3\right\} \tag{4.25}$$

2.5 可変球状液球

前節で述べた音響放射圧による液滴の変形に関する近似解は後節で示される地上実験の結果と必ずしも一致しない（図3.14参照）が，これは液滴の変形に関与する音響放射圧を求めるのに剛体球の周囲における音響放射圧を用いたことに由来していると考えられる。実際の液滴は変形し，そのために定在音場もまた変形球から変化を受けるものと考える方が実際の現象に近い。T. Hasegawa と K. Yoshioka は弾性球に働く音響放射圧を記述しようとした[14], [15]。本節では動く境界上の音響放射圧を求めるのに彼らの方法を用いた。得られた修正音響放射圧を用いて，前節における液滴の変形を記述する近似的な解析方

法から，平面定在波場における液球の変形を記述する近似解を求めた。

2.5.1 可変形状液球に加わる音響放射圧

一連の音波が伝播している完全気体中の圧力変動は，u_1^2/c^2 のオーダーまでを考慮すると次式で与えられる。

$$\delta p = \rho_0 \left(\dot{\Phi}_1 + \dot{\Phi}_2\right) - \frac{1}{2}\rho_0 u_1^2 + \frac{1}{2}\frac{\rho_0}{c^2}\dot{\Phi}_1^2 \tag{5.1}$$

ここで，ρ_0 は音波が伝播する気体の平衡状態における密度，c は音速，u_1 は一次のオーダーの粒子速度（$=-\nabla\Phi_1$），Φ_1 は波動方程式，

$$\Delta\Phi_1 = \frac{1}{c_2}\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial t^2}$$

で与えられる一次のオーダーの速度ポテンシャル，Φ_2 は二次のオーダーの速度ポテンシャルである。

閉領域 S が媒質内で u_1 と同じオーダーの速度で運動するとき，$S(t)$ は時刻 t における位置を表す。動いている閉領域に加わる音響放射圧 $\langle F\rangle$ は二次のオーダーまで記述すると次式で表される。

$$\langle F\rangle = \left\langle -\iint_{S(t)} \delta p\, \boldsymbol{n}\, df\right\rangle \tag{5.2}$$

$$= \left\langle -\iint_{S(t)} \rho_0\dot{\Phi}_1 \boldsymbol{n}\, df\right\rangle + \left\langle -\iint_{S_0} \rho_0\dot{\Phi}_2 \boldsymbol{n}\, df\right\rangle + \left\langle \iint_{S_0} \frac{1}{2}\rho_0 u_1^2 \boldsymbol{n}\, df\right\rangle + \left\langle -\iint_{S_0} \frac{1}{2}\frac{\rho_0}{c^2}\dot{\Phi}_1^2 \boldsymbol{n}\, df\right\rangle \tag{5.3}$$

ここで，S_0 は平衡状態にある場合の閉領域の位置を示し，$\boldsymbol{n}$ は表面の単位法線ベクトル，df は表面要素である。

1次および2次のオーダーの音響場を含む全ての媒質内で定常状態が確立されるとき，2次のオーダーの粒子速度 u_2 および $\rho_0\dot{\Phi}_2$ は次のように表せる。

$$u_2 = -\nabla\Phi_2 = \overrightarrow{const.} + \vec{f_0} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\overrightarrow{f_{1,n}}\cos(n\omega t) + \overrightarrow{f_{2,n}}\sin(n\omega t)\right\} \tag{5.4}$$

$$\rho_0\dot{\Phi}_2 = \delta p_2 + \frac{1}{2}\rho_0 u_1^2 - \frac{1}{2}\frac{\rho_0}{c^2}\dot{\Phi}_1^2 = const. + \overrightarrow{g_0} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\overrightarrow{g_{1,n}}\cos(n\omega t) + \overrightarrow{g_{2,n}}\sin(n\omega t)\right\} \tag{5.5}$$

ここで，δp_2 は2次のオーダーの圧力変動，$\overrightarrow{f_0}$, $\overrightarrow{f_{1,n}}$, $\overrightarrow{f_{2,n}}$, $\overrightarrow{g_{1,n}}$, $\overrightarrow{g_{2,n}}$ は座標系のみの関数である。

式(5.4)，および式(5.5)から，

$$g_0(x, y, z) = const. \tag{5.6}$$

式(5.6)から容易に次式の関係が得られる。

$$\left\langle \iint_{S_0} \rho_0\dot{\Phi}_2 \boldsymbol{n}\, df\right\rangle = 0 \tag{5.7}$$

閉領域の表面に関する法線速度ベクトルを $u_n\boldsymbol{n}$ で表すと，次式を得る。

$$\frac{d}{dt}\left(\iint_{S(t)} \rho_0\Phi_1 \boldsymbol{n}\, df\right) = \iint_{S(t)} \rho_0\dot{\Phi}_1 \boldsymbol{n}\, df + \iint_{S(t)} \rho_0 \nabla\dot{\Phi}_1\cdot u_n\, df \tag{5.8}$$

もしも，Φ_1 と閉領域の変動の両方とも時間に関して周期的であるとすると，式(5.8)の時間平均をとり，最後の積分項の中の $S(t)$ の代わりに S_o と書くことにより次式を得る。

$$\left\langle \iint_{S(t)} \rho_0\dot{\Phi}_1 n\, df\right\rangle = -\left\langle \iint_{S(t)} \rho_0\nabla\dot{\Phi}_1\cdot u_n\, df\right\rangle = -\left\langle \iint_{S(t)} \rho_0\left(u_n\boldsymbol{n} + u_t t\right)u_n\, df\right\rangle \tag{5.9}$$

ここで，$u_t t$ は媒質中の接線方向の粒子速度である。式(5.7)，および式(5.9)を式(5.2)に代入すると最終的に次式を得る。

$$\langle F\rangle = -\left\langle \iint_{S_0} \rho_0\left(u_n\boldsymbol{n} + u_t t\right)u_n\, df\right\rangle + \left\langle \iint_{S_0} \frac{1}{2}\rho_0 u_1^2 \boldsymbol{n} df\right\rangle - \left\langle \iint_{S_0} \frac{1}{2}\frac{\rho_0}{c^2}\dot{\Phi}_1^2 \boldsymbol{n} df\right\rangle \tag{5.10}$$

したがって，変動する閉曲面に加わる音響放射圧は一次の速度ポテンシャルに関連する項のみから計算されるが，全ての積分は閉領域が平衡位置にある場合の全表面にわたって行われる。閉領域の境界が回転軸対称の扁球と仮定すると，平面定在波が回転対称軸に沿う音場では液滴表面に加わる音響放射力は液滴の赤道上における粒子速度を計算することによって与えられる。

$$\langle F\rangle = \langle F_r\rangle + \langle F_\theta\rangle + \langle F_{r,\theta}\rangle + \langle F_\Phi\rangle \tag{5.11}$$

ここで，

$$\langle F_r\rangle = -\left\langle \pi a^2\rho_0\int_0^\pi \left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)_{r=a}^2 \sin\theta\cos\theta\, d\theta\right\rangle \tag{5.12}$$

$$\langle F_\theta\rangle = \left\langle \pi\rho_0\int_0^\pi \left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)_{r=a}^2 \sin\theta\cos\theta\, d\theta\right\rangle \tag{5.13}$$

$$\langle F_{r,\theta}\rangle = \left\langle 2\pi a\rho_0\int_0^\pi \left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)_{r=a}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)_{r=a} \sin^2\theta\, d\theta\right\rangle \tag{5.14}$$

$$\langle F_\Phi\rangle = \left\langle -\pi a^2\frac{\rho_0}{c^2}\int_0^\pi \left(\dot{\Phi}\right)_{r=s}^2 \sin\theta\cos\theta\, d\theta\right\rangle \tag{5.15}$$

2.5.2 平面波の球による散乱

2.5.2.(a) 平面進行波

半径 a の球が座標系の原点に拘束されない状態で置かれていると仮定すると，Z 軸または $\theta = 0$ の方向に球に向かって伝播する平面進行波の速度ポテンシャル ϕ_i は次の展開式で表される。

$$\phi_i = \sum_{n=1}^{\infty} a_n exp\, i\left(\omega_n t - k_n z\right)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n exp\left(i\omega_n t\right) \sum_{m=0}^{\infty} \left\{(2m+1)(-1)^m J_m\left(k_n r\right) P_m\left(cos\,\theta\right)\right\} \tag{5.16}$$

ここで，J_m は第一種ベッセル関数，P_m はルジャンドルの多項式である。球の外側の速度ポテンシャル ϕ を次のように表すと，

$$\phi = \phi_i + \phi_s \tag{5.17}$$

ここで，ϕ_s は次式のように散乱波の速度ポテンシャルで表せる。

$$\phi_s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp\left(i\omega_n t\right) \sum_{m=0}^{\infty} \left\{(2m+1)(-i)_m A_m H_m^{(2)}\left(k_n r\right) P_m(\cos\theta)\right\} \tag{5.18}$$

ここで，$H_m^{(2)}$ は第二種のハンケル関数である。一方，球の内側の速度ポテンシャル ϕ^* は次式で表すことができる。

$$\phi^* = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \exp\left(i\omega_n t\right) \sum_{m=0}^{\infty} \left\{(2m+1)(-1)^m B_m J_m\left(k_n^* r\right) P_m\left(\cos\theta\right)\right\} \tag{5.19}$$

球の内外境界では次式が成立する必要があり，

$$\frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{\partial\phi^*}{\partial r} \qquad \text{at } r = a \tag{5.20}$$

$$\rho_0\dot{\phi} = \rho^*\dot{\phi}^* \qquad \text{at } r = a \tag{5.21}$$

式(5.18)～式(5.21)から次の関係式が得られる。

$$a_n A_m = \frac{\lambda k_n J_m\left(k_n^* a\right) J'_m\left(k_n a\right) - k_n^* J'_m\left(k_n^* a\right) J_m\left(k_n a\right)}{k_n^* J'_m\left(k_n^* a\right) H_m^{(2)}\left(k_n a\right) - \lambda k_n J_m\left(k_n^* a\right) H_m^{(2)\prime}\left(k_n a\right)} \tag{5.22}$$

$$b_n B_m = \frac{ik_n}{\left(k_n a\right)^2 \left\{k_n^* J_m'\left(k_n^* a\right) Hm^{(2)}\left(k_n a\right) - \lambda k_n\, J_m\left(k_n^* a\right) Hm^{(2)\prime}\left(k_n a\right)\right\}} \tag{5.23}$$

ここで，$\lambda = \rho^*/\rho_0$ である。

もしも，$(k_n a)^2 \ll 1$，$(k_n{}^* a)^2 \ll 1$，および $\lambda \ll 1$ であり，かつ $\lambda(k_n a)^2$ が極めて小さい場合は，液体中にある泡に相当する。

$$b_n B_0 = \frac{3i}{-\left(k_n^* a\right)^2 + i\left\{3\lambda - \left(k_n^* a\right)^2\right\}} \tag{5.24}$$

次式は泡振動との共鳴モードを発生する条件を示す。

$$\left(k_n^* a\right)^2 = 3\lambda \tag{5.25}$$

ただし，理想気体の気泡の共鳴周波数 f_r は次式で与えられる。

$$f_r = \frac{1}{2\pi a}\sqrt{\frac{3\gamma p_0}{\rho_0}} \tag{5.26}$$

もしも，$(k_n a)^2 \ll 1$，$(k_n a)^2 \ll 1$ かつ $\lambda > 100$ である場合には気体媒体中に存在する液滴の条件に相当する。この場合には，

$$a_n A_0 = \frac{-J_0'\left(k_n a\right)}{H_0^{(2)\prime}\left(k_n a\right)} = \frac{-J_1\left(k_n a\right)}{J_1\left(k_n a\right) - iY_1\left(k_n a\right)} \tag{5.27}$$

$$b_n B_0 = -\frac{i}{\left\{\left(k_n a\right)^2 \lambda J_0\left(k_n^* a\right) H_0^{(2)\prime}\left(k_n a\right)\right\}}$$
$$= \frac{8ia}{\left(k_n a\right)^4 \lambda \left[1 - i\left\{\frac{2}{\pi} ln\left(\frac{k_n a}{2}\right) - \frac{2(1-2\gamma)}{\pi} - \frac{8}{\pi}\left(k_n a\right)^2\right\}\right]} \tag{5.28}$$

となる。ここで，Y_1 は第二種のベッセル関数である。

すなわち，液体中に気泡が存在していても，気体中に液滴が存在していても，どちらの場合でも進行音響波は気泡内，または液滴内に共鳴波をつくらない。

2.5.2(b) 平面定在波

球の中心が粒子速度の節から距離 h のところにあるとすると，元の原点を中心とする平衡位置に関する球に向かう粒子速度ポテンシャルは次式で表される。

$$\phi_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp\left(i\omega_n t\right)\left[\exp\left\{ik_n(z+h)\right\} + \exp\left\{-ik_n(z+h)\right\}\right]$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp\left(i\omega_n t\right) \sum_{m=0}^{\infty} \left\{(2m+1)(-1)^m \delta_m J_m\left(k_n r\right) P_m(\cos\theta)\right\} \tag{5.29}$$

ここで，

$$\delta_m = (-1)^m \exp\left(ik_n h\right) + \exp\left(-ik_n h\right) \tag{5.30}$$

散乱速度ポテンシャル ϕ_s と球の内側の速度ポテンシャル ϕ^* は次式で表される。

$$\phi_s = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \exp\left(i\omega_n t\right) \sum_{m=0}^{\infty} \left\{(2m+1)(-1)^m C_m H_m^{(2)}(kr) P_m(\cos\theta)\right\} \tag{5.31}$$

$$\phi^* = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \exp\left(i\omega_n t\right) \sum_{m=0}^{\infty} \left\{(2m+1)(-1)^m D_m J_m\left(k^* r\right) P_m(\cos\theta)\right\} \tag{5.32}$$

ここで，C_m と D_m は式(5.20)，および式(5.21)で与えられ

る境界条件から次式で表される。

$$\hat{p} = \frac{8a}{\ } \overline{p} \tag{5.33}$$

$$b_n D_m = B_n \delta_m \tag{5.34}$$

2.5.3 可変球状液滴へ加わる共鳴音響放射圧と液滴の変形

可変球状液滴に加わる共鳴音響放射圧の計算には ϕ^* で表される力の分力で表現すると便利である。次式で表される境界条件を利用して,

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{\partial \phi^*}{\partial r} \qquad \text{at } r = a \tag{5.35}$$

$$\rho_0 \dot{\phi} = \rho^* \dot{\phi}^* \qquad \text{at } r = a \tag{5.36}$$

$$\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \rho^* \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \qquad \text{at } r = a \tag{5.37}$$

$\cos\theta = \mu$ とおきかえると音響放射圧の各分力は次式で表される。

$$\langle F_r \rangle = \left\langle -\pi a^2 \rho_0 \int_{-1}^{1} \left(\frac{\partial \phi^*}{\partial \mu} \right)^2_{r=a} \mu \, d\mu \right\rangle \tag{5.38}$$

$$\langle F_\theta \rangle = \left\langle \pi \lambda^2 \rho_0 \int_{-1}^{1} \left(\frac{\partial \phi^*}{\partial \mu} \right)^2_{r=a} \mu \left(1 - \mu^2\right) d\mu \right\rangle \tag{5.39}$$

$$\langle F_{r,\theta} \rangle = \left\langle -2\pi a \lambda \rho_0 \int_{-1}^{1} \left(\frac{\partial \phi^*}{\partial r} \right)_{r=a} \left(\frac{\partial \phi^*}{\partial \mu} \right)_{r=a} \left(1 - \mu^2\right) d\mu \right\rangle \tag{5.40}$$

$$\langle F_\Phi \rangle = \left\langle -\pi \frac{a^2 \lambda^2}{c^2} \rho_0 \int_{-1}^{1} \left(\dot{\phi}^* \right)^2_{r=a} \mu d\mu \right\rangle \tag{5.41}$$

式(5.22), 式(5.23), および式(5.32)で得られた解を次のように実部のみで書き表すと便利である。

$$Re\left(\phi^*\right)_{r=a} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \left(2m+1\right) M_m P_m \left(\cos\theta\right) \right\} \tag{5.42}$$

$$Re\left(\frac{\partial \phi^*}{\partial r}\right)_{r=a} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \left(2m+1\right) K_m P_m \left(\cos\theta\right) \right\} \tag{5.43}$$

または,

$$M_m = Re\left[\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \exp\left(i\omega_n t\right) \left(-i\right)^m B_m J_m \left(k_n^* r\right) \right\} \right] \tag{5.44}$$

$$K_m = Re\left[\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \exp\left(i\omega_n t\right) \left(-i\right)^m B_m k_n^* J_m' \left(k_n^* r\right) \right\} \right] \tag{5.45}$$

式(5.42), および式(5.43)を式(5.38), 式(5.39), および式(5.40), 式(5.41)に代入すると, M_m および K_m の項として音響放射力を表すことができる。

$$\langle F \rangle = \langle F_r \rangle + \langle F_\theta \rangle + \langle F_r, \theta \rangle + \langle F_\phi \rangle \tag{5.46}$$

次の条件は小さな液滴に働く音響放射力に適用される。

$$(ka)^2, \left(k^* a\right)^2 \ll 1, \ \lambda = \frac{\rho^*}{\rho_0} \gg 1$$

高次のベッセル関数を考えると上記の条件より, $m>3$ の M_m と K_m は無視できるので,

$$\langle F \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b_n, b_m \left[-2\pi\rho_0 \left\{ 2a^2 \left(1+2\lambda\right) \langle K_0 K_1 \rangle + 4a^2 \left(\lambda - 1\right) \langle K_1 K_1 \rangle \right\} \right.$$

$$\left. + 2k_n k_m a^2 \lambda^2 \langle M_0 M_1 \rangle + 12\lambda \left(1-\lambda\right) \langle M_1 M_2 \rangle \right] \tag{5.47}$$

平面定在波では,

$$\langle F \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} b_n b_m 4\pi \rho_0 k_n^2 k_m a^3 \sin\left(2k_n h\right) F \left(\lambda, \sigma\right) \tag{5.48}$$

ここで,

$$F\left(\lambda, \sigma\right) = \frac{\lambda + \dfrac{2(\lambda - 1)}{3}}{1 + 2\lambda} - \frac{1}{3\lambda\sigma^2} \tag{5.49}$$

および,

$$\sigma = \frac{c^*}{c} = \frac{k}{k^*}$$

定在波の基本周波数用に式(5.48)を書き直すと,

$$\langle F \rangle = 8k_1 a_0 \frac{a}{a^0} \tilde{E} \sin\left(2k_1 h\right) F \left(\lambda, \sigma\right) \pi a^2 \tag{5.50}$$

ここで,

$$\tilde{E} = \frac{\rho_0 b_1^2 k_1^2}{2} = \frac{p_1^2}{\rho_0 c^2} \tag{5.51}$$

ただし, $\tilde{E}$ は定在音場における平均エネルギー密度を表す。

式(4.3), および式(4.12)を参照して式(5.49)を書き直すと,

$$\langle F \rangle = \frac{8a}{a_0} \overline{p} \sin\left(2k_1 h\right) \cdot \pi a^2 \tag{5.52}$$

したがって, 変形液球の近傍の共鳴音響放射圧力 $\hat{p}$ は次のように書くことができる。

$$\hat{p} = \frac{8a}{a_0} \overline{p} \tag{5.53}$$

$\Pi < 3$ では式(4.22)から,

$$\frac{a}{a_0} \sim 1 + \frac{\Pi}{9} \tag{5.54}$$

したがって,

$$\hat{p} = 8 \left(1 + \frac{\Pi}{9}\right) \bar{p} \tag{5.55}$$

$\Pi > 3$ では式(4.24)から,

$$\frac{a_0}{a} = \frac{3}{\Pi} - \left(\frac{3}{\Pi}\right)^4 + 2\left(\frac{3}{\Pi}\right)^7 + \cdots$$

したがって,

$$\hat{p} = \frac{8}{3}\Pi\left\{1 + \left(\frac{3}{\Pi}\right)^3\right\}\overline{p} + \cdots \tag{5.56}$$

液滴の定在波音響放射圧による変形に関する修正された近似解は次に示される。

$\Pi < 3$ では

$$\frac{b}{a} \sim 1 - \frac{8}{3}\Pi + \frac{56}{27}\Pi^2 + \cdots \tag{5.57}$$

$\Pi > 3$ では

$$\frac{b}{a} \sim \frac{1.42}{\Pi^3} - \frac{121.4}{\Pi^5} + \frac{4088}{\Pi^9} + \cdots \tag{5.58}$$

2.6　平面定在波中に浮かぶ液膜の挙動

平面定在波に浮かぶ液滴は，定在波の音響強度が上がるにしたがって変形度を増すことは前節で述べた。この場合，定在波の強度がより上がると変形度はますます進み，最後には液膜を形成する。自然界には端が自由運動をするような無拘束液膜は存在しない。本節では，自由端液膜の表面張力に起因する波の運動と平面定在波との干渉に関する解析的研究結果について述べる。

図 2.4 は定在音波中の液膜の面素を示す。ここで，$y(x, z, t)$ は液膜の縦方向の変位，$\delta(x, z)$ は液膜の厚さを表す。解析を簡単にするために，液膜は極めて薄く，液膜の剛性は無視することができるものとする。また，液膜は完全弾性体で内部の減衰項は無視できるとともに，液膜の上下運動は小振幅で振動しているものと仮定する。このような液膜の波動方程式は次式で表される。

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^{*2}\nabla^2 y - \frac{\overline{p}}{p^*}\delta\,\sin\,(2k_0 y) \tag{6.1}$$

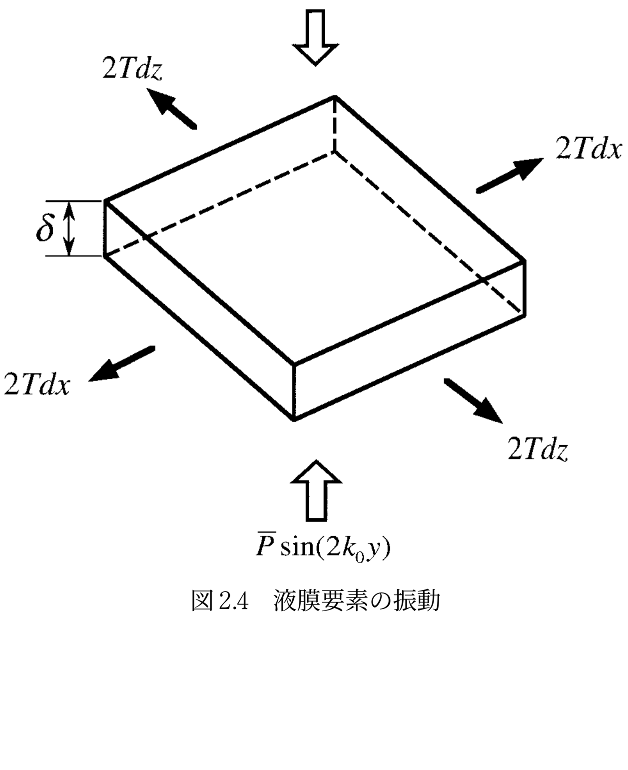

図 2.4　液膜要素の振動

ここで，ρ^* は液膜の密度，c^* は進行波の速度であり次式で表される。

$$c^* = \frac{2T}{\rho^*\delta\,(x, z)} \tag{6.2}$$

ただし，T は液体の表面張力である。

Sin-Gordon 方程式

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = \sin\phi \tag{6.3}$$

は次式で表されるソリトン解をもつことが知られている。

$$\phi = 4\,\arctan\left\{\exp\left(\pm\frac{x - bt}{\sqrt{1 - b^2}}\right)\right\} \tag{6.4}$$

ただし，b は任意定数。

式(6.1)と Sin-Gordon 方程式の相似性から式(6.1)は次に示す相似なソリトン解をもつ。

$$y = \frac{2}{k_0}\arctan\left\{\exp\left(\pm\frac{Ax - b\omega t}{\sqrt{1 - b^2}}\right)\right\} \tag{6.5}$$

ここで，

$$\omega^2 = \frac{\overline{p}}{2k_0\rho^*\delta} \tag{6.6}$$

および，

$$A^2 = \left(\frac{\omega}{c^*}\right)^2 \tag{6.7}$$

ただし，$\overline{p}$ は式(4.3)で定義されている。

3　実　験

本節では宇宙実験の予備実験として行われた，航空機のパラボリックフライトによる低重力実験を含む一連の地上実験と 1992 年 9 月に行われたスペースシャトル利用宇宙実験（M-15:Liquid Drop Facility，STS 47）について述べる。また，地上実験および宇宙実験の結果は第 2.5 節で述べた理論解析の結果と比較する。

3.1　地上実験

筆者等は本宇宙実験の準備として，まず音響ドライバーの共鳴特性を調べることから始めた。フライトモデルの設計にかかる前に地上において軽量サンプルを浮揚保持することのできる共鳴チャンバーを開発する必要があった。それにはまず音の発生装置，すなわち音響変換器の選択から始めた。密閉された箱の中に高い音圧を発生させるために，振幅が大きくなっても振動板が分割振動しにくい，変換効率が高い，装置の容積が小さいという理由から音響変換器として音響用ドライバーを用いることとし，市販されている各社の高出力音響ドライバーの共鳴特性を図 3.1 に示す実験装置を用いて測定した。実験装置は一軸共鳴用円筒，音響ドライバーから基本波を共

鳴用円筒へ誘導する音響案内部，音響ドライバー，共鳴円筒内の音場を測定するマイクロフォン，マイクロフォンの位置を円筒軸に沿って動かすトラバース機構およびマイクロフォン位置を精度よく読みとる装置から成る。本装置によって，また音響案内部設計の共鳴特性へ与える影響を特別な注意を払って調べた[2]。

上で述べた共鳴特性の測定結果をもとに，パイオニア社製音響ドライバー(ED-915)を利用した三軸共鳴チャンバーを地上実験用に設計試作した[4]。地上実験用共鳴チャンバーは重力に抗してサンプルを浮揚しなければならない。そのため Z 軸（重力の方向）の共鳴長さは，音響ドライバーの予備実験において最も効率の良かった110*mm*とした。水平面上の二つの直交軸である X および Y は音響による回転トルク発生のためにも用いられるので，二軸間の位相を制御するため X, Y 軸の寸法は共に等しくした。また，Z 軸および X–Y 軸間の音響的な干渉を避けるため X および Y 軸の共鳴長さを Z 軸よりも10*mm*だけ短くした。

試作した三軸共鳴チャンバーを用いて発泡スチロールを浮揚させる実験を行った。浮揚サンプルとしては発泡

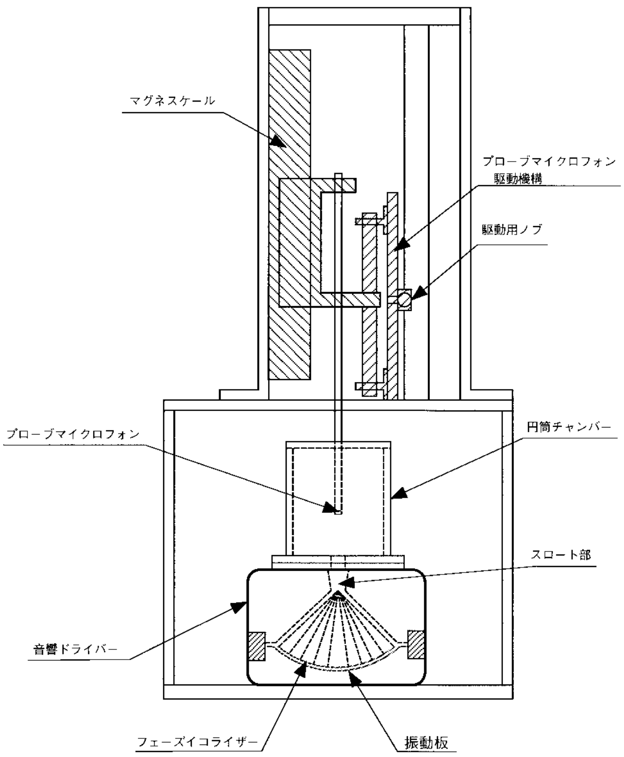

図3.1 音響ドライバーの共鳴特性測定装置

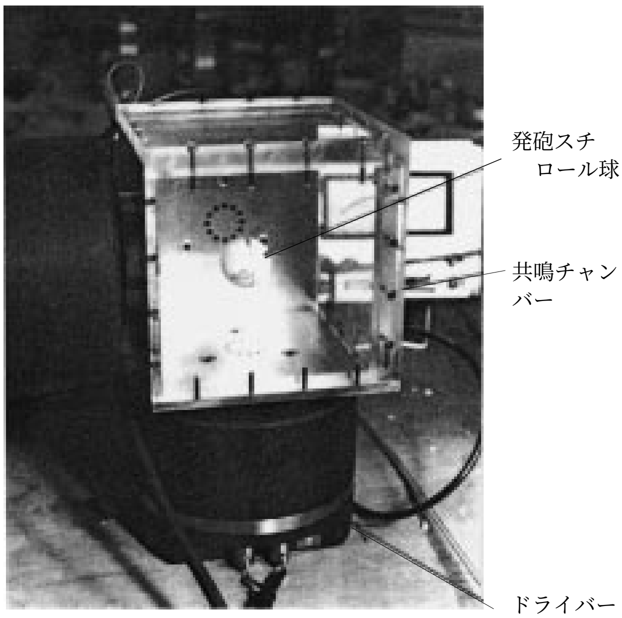

図3.2　発泡スチロール球を浮揚している三軸共鳴チャンバ

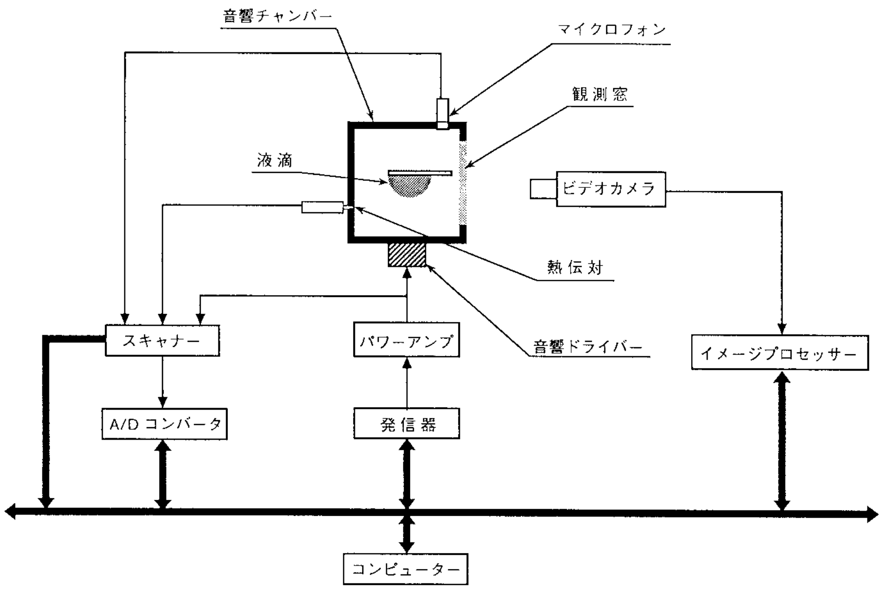

図3.3　実験システムのブロックダイアグラム

スチロールの球（5～30$mm\phi$）および円板（30$mm\phi$ 0.5mm（厚さ））を試みた。発泡スチロールを用いた地上実験用三軸共鳴チャンバーの浮揚実験では，サンプルの安定保持を最も重視した。地上実験においては音波共鳴条件が設定されるまではサンプルは重力のために下部に存在するが，共鳴条件が設定されるとサンプルはチャンバー中央に保持される。このときサンプル保持の前と後では共鳴条件は微小ではあるが変化する。この微小変化を調整して共鳴条件を維持することが安定保持に関して重要な役割をすることを見い出した。また，サンプルに対する音響放射力，およびX軸およびY軸間の位相を変化させることで発生する回転トルクも発泡スチロール球を用いて測定した。これらのデータは宇宙実験用エンジニアリングモデルの設計に反映された。

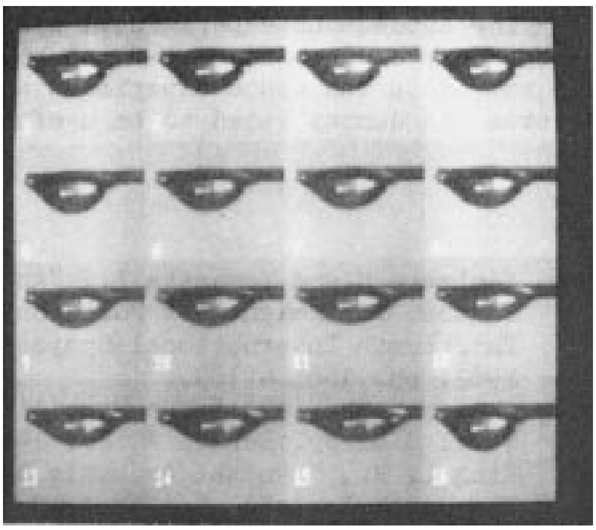

図3.4　地上における液滴の変形実験

宇宙実験用三軸音波共鳴装置は搭乗科学者（PS）による手動と制御用搭載計算機によるプログラム制御を併用するシステムであった。著者等の宇宙実験［M-15］が行われたFMPT（ふわっと'92）では多くの宇宙実験が予定されており，［M-15］に割り当てられる搭乗員による実験装置の操作の時間は制限されると予測された。また，宇宙実験用搭載計算機のプログラムは極めて小さいと予測されていたので（最終的な仕様はCPUがインテル8086，プログラムの記述言語はアッセンブラ，実験制御用に供せられるメモリーが300バイト），可能な限り単純なシーケンシャル・プログラム制御が可能なアルゴリズムを開発することが急務であった。図3.3はそのような制御用アルゴリズムを開発するための実験システムのブロックダイアグラムを示す。また，三軸共鳴チャンバーの中心に液滴をつくるための注入システムおよびテレビカメラの映像データを読むためのイメージプロセッシングシステムが三軸共鳴チャンバーに取り付けられた。

コンピュータ（HP-9836）で正弦波発生器の音響ドライバーへの入力周波数を掃引することにより共鳴チャンバーの共鳴条件を探す。共鳴条件はチャンバーの共鳴反射板の上に取り付けられたマイクロフォンが最大音圧を示す場合とした。共鳴周波数が決まると共鳴チャンバー内の音圧を定められたレベルまで上昇させる。イメージプロセッサーはA/D変換器を通して共鳴チャンバー内の映像データを読み込み，フロッピーディスクに記録する。この地上実験装置で開発した制御プログラムは，最初の実験用共鳴条件の設定からスタートして，音響ドライバーへの入力レベルの設定およびテレビ画像の記録までを1サイクルとして，16種類の入力レベルに対して一連の記録を行えるように作られた。

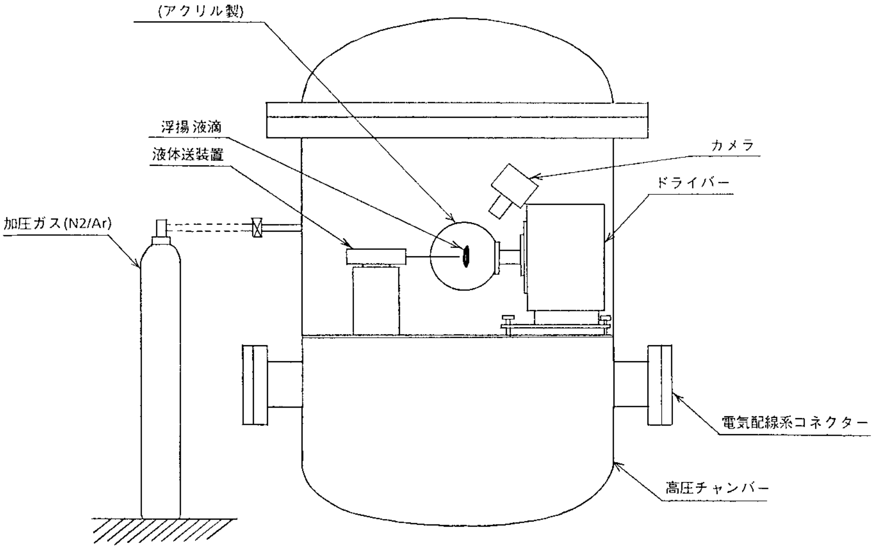

図3.5　圧力チャンバ内の球形共鳴器

イメージプロッセッサー（柏木研究所 NEXUS 6400; 512 × 480 ドット）はテレビ画像から 128 × 120 ドットの映像を取り出し，16 サイクル分の画像を一組として編集した後，フロッピーディスクに書き込む。

この実験装置を用いて，一連の実験を行った。音響放射圧による液滴の変形はイメージプロセッサーにより観測されたが，全ての操作は制御用コンピュータのプログラムにしたがって行われた。地上実験では地球の重力に抗して液滴を浮揚することはできないため，液滴の変形実験は小液滴を注射針の先端に付着させた状態で行った。図 3.4 は NEXUS による編集済みの映像の一例を示す。測定された液滴の変形は著者等の理論解析と比較した（図 3.14 参照）。

筆者等が本研究を始めたのはスペースシャトルによる宇宙実験を行うためであったが，1986 年のチャレンジャーの事故とその後に続いて起きた水素漏れや搭載コンピュータのトラブルもあって，宇宙実験は何年も遅れる結果となった。

宇宙実験を待つ間に地上でより大きいサイズの液滴の浮揚を試みた。音響放射圧を表す式(4.3)，および式(4.4)から容易にわかるように，音響浮揚力は関数 $F(\rho_0/\rho)$に依存する。このことは，もし液滴と媒質の密度差が小さければ浮揚力はより大きくなるということを意味する。

最初に試みたのは中心部に粒子速度エネルギーが集中する球型の音響共鳴器を圧力チャンバー内に入れ，共鳴器内の圧力を圧力チャンバー内の圧力と等しくした。圧力を 1 M パスカルに上げると，直径でミリメートルオーダーのシリコン液滴を球形共鳴器の中心に浮揚することができた[16]。圧力チャンバー内での球型共鳴器で得られた結果は，著者等の音波浮揚理論を十分に裏付けるものではあったが，液滴注入システムを当初から浮揚液滴のサイズを測定できるように設計されていなかったことと，浮揚液滴が重力場と方向性音場により著しく変形していったために，液滴挙動に関する力学的なデータは得られなかった。図 3.5 に実験装置の概略図を示す。

また，地上において液滴を無接触で浮揚し，液滴挙動の力学的データを得る実験を行うために，新しく超音波振動子を用いた共鳴器を試作した。図 3.6 は実験装置の概略図である。装置は三対のランジュバン型超音波振動子と反射板から成り，エンクロージャーを全く用いないオープンエアタイプの三軸共鳴器である。三つの振動子は互いに直交して反射板と共にセットされている。振動子の駆動周波数はおよそ 18kHzである。

試作された超音波共鳴器は地上 1g 下で直径 4.2 mm の水またはグリセリンの液滴を浮揚することができた。図 3.7 は超音波共鳴波で変形した液滴を示す。測定された変形量と音響強度との関係は図 3.14 に理論値との比較として示した。

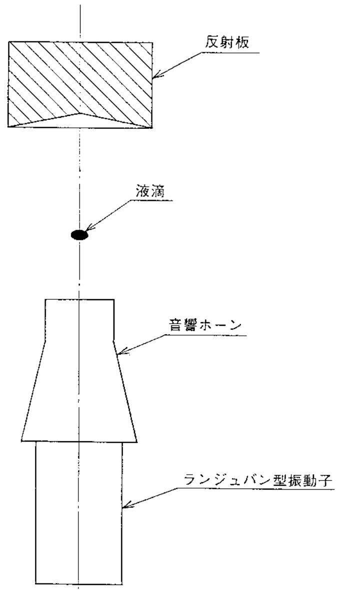

図 3.6　超音波共鳴器の原理図

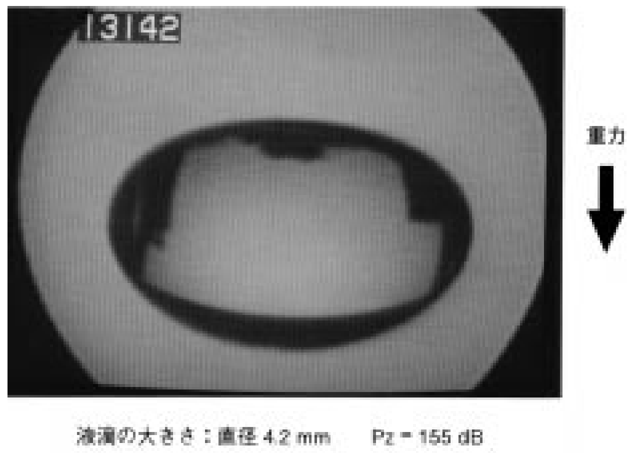

図 3.7　超音波共鳴器で浮揚された水滴の写真

3.2　航空機の弾道飛行による低重力実験

一連の地上実験を終えた後，航空機による低重力フライト実験を行った。航空機実験の目的は主として 3 つあった。ひとつは自動化プログラムを含む装置全体の機能試験である。地上実験では発泡スチロールのサンプルを用いて，チャンバーのさまざまな音響特性，浮揚力，圧縮効果，および回転特性を可能な限り調べたが，このような測定実験でも軽いとはいえ剛体とみなせる発泡スチロール球である。外力を受けるとそれに応じて自由に形状を変える液滴とは基本的に異なっている。また，地上実験でははじめから発泡スチロール球を共鳴チャンバー内に入れて行わざるを得ないため，実験ルーチンの完全自動化は不可能である。

二つめは，フライト実験の実験パラメータをより適切

にすることである。たとえば，液滴に強い音圧をかけ大きく変形させるとき，表面張力で支えきれなくなると破裂してしまうが，限界の音圧は実際に液滴を浮揚させなければ調べることができない。

いまひとつは，航空機実験で最も重要な液滴の分離機構の試験である。この問題に関しては，FMPTと相乗りするアメリカの研究者を含めた研究者会議（IWG: Investigators Working Group）において，無重量環境下における液滴切り離しの困難さを宇宙での液滴実験の経験のあるアメリカの研究者から指摘されていたものである。

航空機実験は2年度にわたり約60回の弾道飛行を行った[17]。液滴の分離機構の宇宙実験用プレエンジニアリングモデルの三軸共鳴チャンバー中心に予定のサイズの液滴を低重力環境で共鳴音波のみで保持するための液滴注射針の動かし方に関するデータを得た。航空機実験で得られた結果として，液滴をつくった後の注射針の最適後退速度と液滴のサイズとの間には深い関係があることが分った。これらのデータは本宇宙実験の操作マニュアルに反映された。

3.3　宇宙実験

3.3.1　実験装置

宇宙実験用の実験装置は三軸共鳴チャンバー，液滴注入システム，実験制御装置およびビデオ記録装置から成る。図3.8は実験装置の概要を示す。

(a)共鳴チャンバ

音響チャンバの形状は100 mm（X軸）× 100 mm（Y軸）× 110 mm（Z軸）の直方体で，チャンバー側板は板厚15 mmのアルミ合金である。装置の座標とスペースラブの座標の関係は図3.8に示すとおりである。音響ドライバーはチャンバーの三軸方向の壁面に取り付けられており，チャンバー内に音響定在波をつくるため，ドライバーからの音波は壁面にあけられた小孔（音源孔）を通して音響的にチャンバーに結合されている。音源孔の数は12個で円周上に等分に配置されている。

音響ドライバーは宇宙実験用に新しく設計したもので，振動ダイアフラムはパイオニアED-915に用いられているもの（直径44 mm，ベリリウム製）を採用した。ダイアフラムから音源孔までのウエイブガイドにおける共鳴チャンバーへの共鳴高性能化，小型化，軽量化に特別の注意が払われた。宇宙実験用の音響ドライバーは，元の市販音響ドライバーであるパイオニア製ED-915と比べて，体積で1/3，重量で1/4となった。

Z軸ドライバーの取り付け面と対面する壁には透明強化ガラスの観測窓を取り付け，そこを通して照明を与えるとともにテレビカメラで液滴の挙動を観測できるようにした。またチャンバーには，音圧測定用として1/4インチのマイクロフォンが2個，温度測定用として熱電対が2個，それぞれチャンバ内壁に取り付けてあり，これらは共鳴チャンバー内の音圧レベルを制御したり，共鳴周波数を求めたりするのに用いられる。

(b)液滴注入装置

液滴注入装置は決められた大きさの液滴をチャンバー中央につくるためのもので，注入針，液体供給機構およ

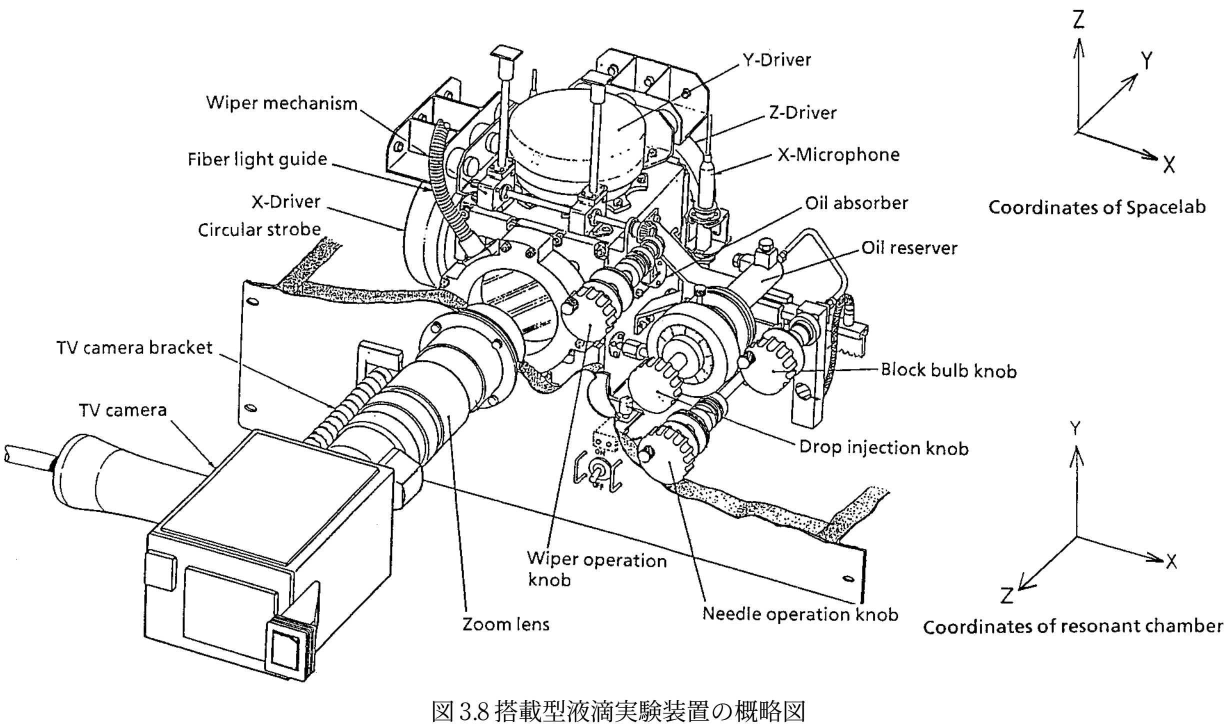

図3.8 搭載型液滴実験装置の概略図

び注入針駆動機構より成る。注入針を駆動機構により共鳴チャンバーの中心に送り出した後，液体供給機構により一定サイズの液滴を針先につくり，次に駆動機構を介して注入針を急速に後退させることにより切り離しを行う。すなわち液滴と針との付着力を，液滴の慣性質量を利用して針を引き抜くのである。これらの操作は全て操作パネル上のノブを搭乗科学者が操作することによって行われる。

実験に用いられた液体は Mobil AERO HFD（MIL-H-606 E)で，その仕様を表 1 に示す。

宇宙実験では直径で 23 mm，19 mm および 10 mm の液滴を使った実験が予定されていた。これらの液滴の体積はそれぞれ 6.4, 3.6 および 0.5 cc である。

表 1　宇宙実験に用いたオイルの仕様

名　称	Mobil AERO HFD（MIL-H-606 E）
比　重	0.8597　@288/277~K
粘　度	432 cSt　@233~K
	14.3 cSt　@313~K
	5.2 cSt　@373~K
体積膨張係数	0.78×10^{-3}
体積弾性率	1.34 G Newton/m^2
表面張力	27.1×10^{-3} Newton/m^2 @293~K

(c)ビデオシステム

使用したテレビカメラは CCD カメラで，実験ラックに固定されている。可搬式小型カメラもビデオレコーダと共に装備されており，小型の白黒ディスプレーで搭乗科学者が共鳴チャンバーの内側をモニターするために使われる。

照明にはテレビカメラと同期したストロボ光源を用いた。これは，ストロボの発光時間がテレビカメラのシャッター速度と比べてきわめて短いこと，および他の照明光と比べて発熱が少なく共鳴チャンバー内の雰囲気温度に対する影響が少ないためである。もし実験中に雰囲気の温度が上がると，共鳴周波数は変動し，共鳴状態を維持することが困難になるおそれがあった。

実験中に液滴が何等かの原因で分裂し，その一部が観測窓を汚してしまう時のために窓拭き用ワイパーを取り付けた。ワイパーは必要な時に搭乗科学者によってフロントパネル上のノブを介して操作される。

(d) 制御装置および操作

実験の制御装置は FMPT の特殊実験用制御装置（SECE）に統合されている。図 3.9 は著者等の行った地上実験で用いた制御装置のブロックダイアグラムである。宇宙実験に搭載された制御装置は宇宙開発事業団が SECE の一環と

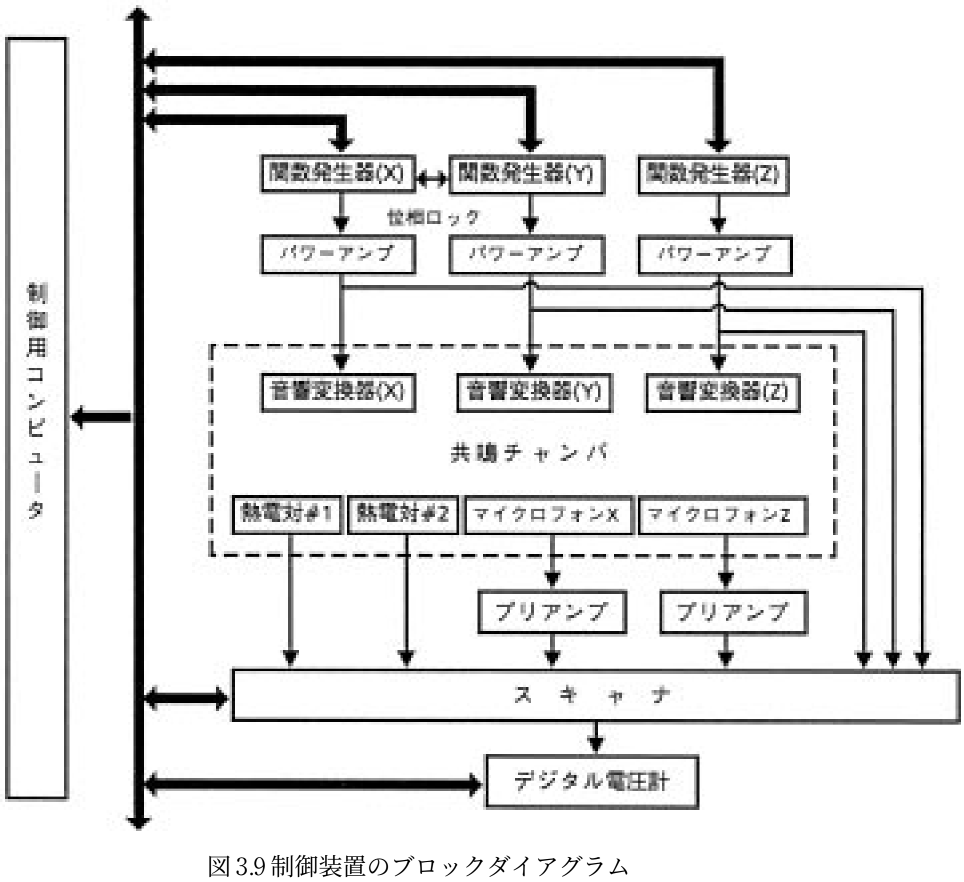

図 3.9 制御装置のブロックダイアグラム

して製作したが，三軸音波共鳴実験［M-15］の制御機能は地上実験用制御装置と同一である。

SECE に使われている CPU は Intel 8086 で，LDF（Liquid Drop Facility; M-15 専用実験装置）に割り当てられたメモリーは 300 バイト，実験制御プログラムの記述言語はアセンブリー言語である。図 3.10，および図 3.11 はそれぞれ実験操作および制御モードのブロックダイアグラムである。実験の基本的な手順はコンピューターとクルーによるイベントコントロールである。共鳴条件の制御はコンピューターにより閉ループのアルゴリズムで自動的に行われる。

著者等の実験［M-15，LDF］は，LDF が組込まれていたラックの別の装置に関連する水漏れ修理のため，当初のタイムラインがリスケジュールされ，MET（Mission Elapsed Time）02/10 : 16 に開始された。実験では，液滴の挙動と共鳴音場との干渉を観測する一連の実験が図 3.11 の手順にしたがって実行される予定であった。

実験では，共鳴チャンバーの中心で注入針の先端に定められた大きさの液滴をつくるところまでは順調に進んだ。次に三軸方向の共鳴周波数を求めた後，保持力を大きくすることにより液滴の切り離しを容易にするため，X および Y 方向の音圧を上げたところ予定していた値よりも音圧が高くなってしまった。このため液滴に激しい振動が起こり液滴は大きく変形した。結果的には液滴は注入針を後退させて切り離す前にいくつかに分裂してしまった。その後，液滴を切り離しても保持されず分裂の際に何らかの不具合が発生したことが推測された。POCC（Payload Operation Control Center）でダウンリンクされた映像およびデータをもとに原因を調べた結果，分裂

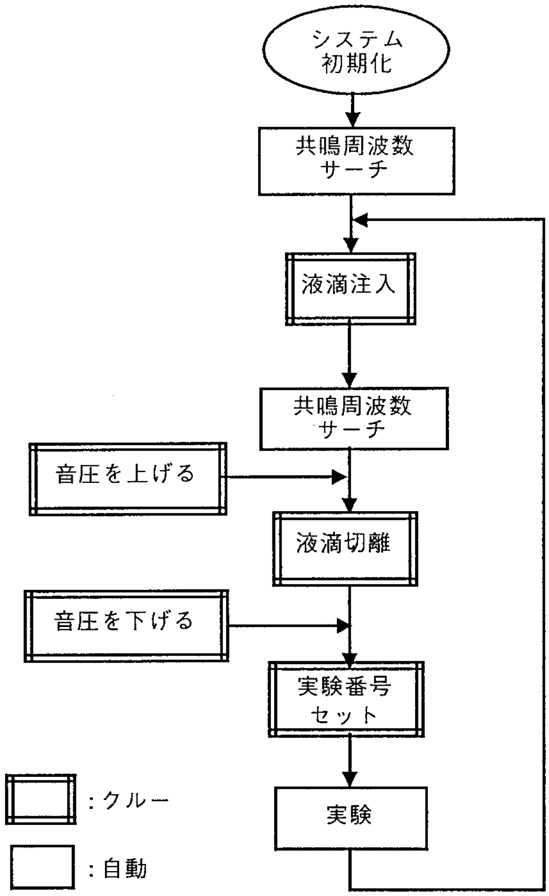

図 3.10　実験手順のブロックダイアグラム

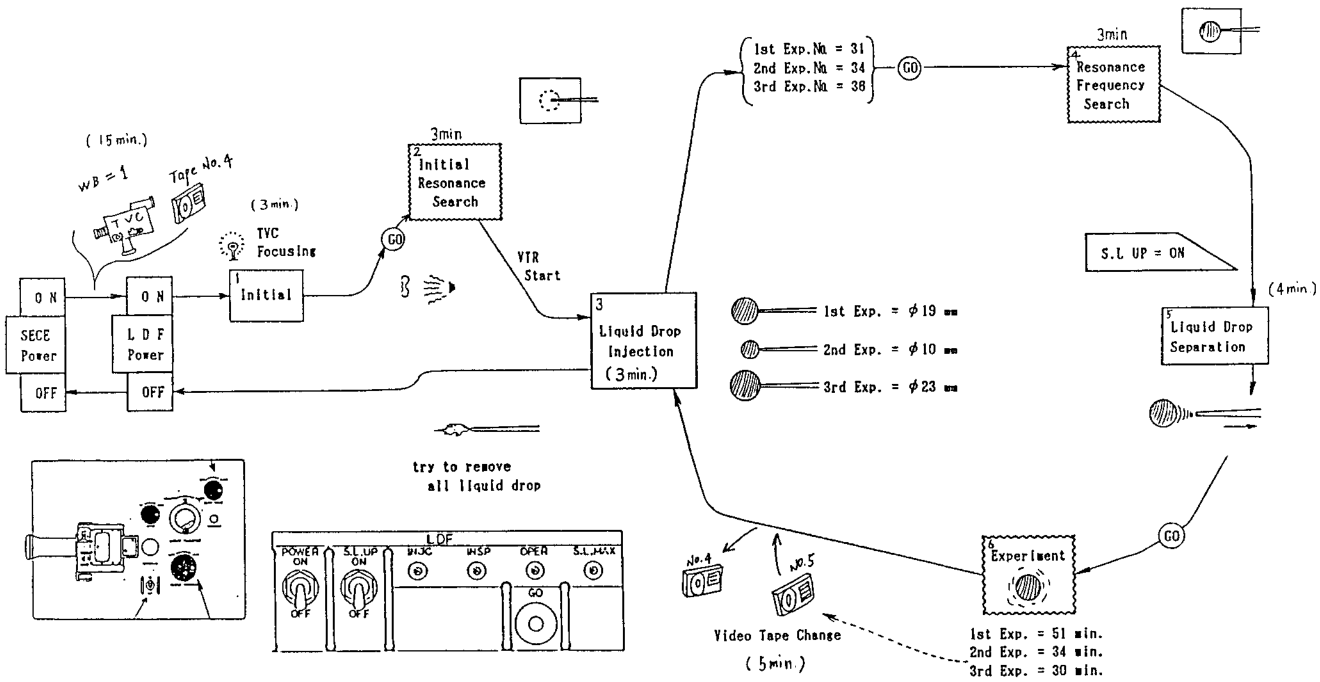

図 3.11　実験モードの手順を示す図

図 3.12　液滴の変形写真（1）

図 3.13　液滴の変形写真（2）

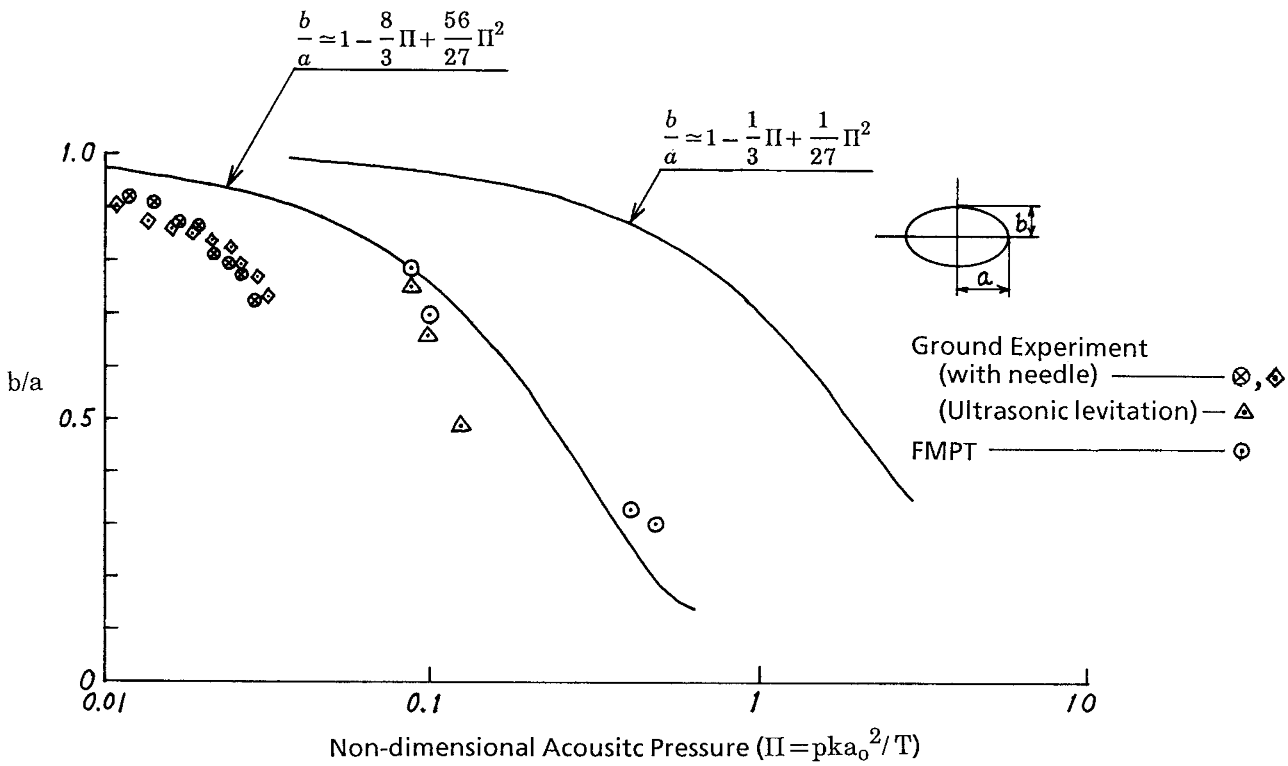

図 3.14　液滴の変形

した液滴の一部が Y 軸音響ドライバーの音の出口に付着し，共鳴チャンバーへの音源孔を塞ぐかたちで覆っていたため，Y 軸方向にのみ予定していた定在波が立たなくなっていることが分った。

安全性および設計上の問題から，スペースシャトルの軌道上では搭乗科学者が共鳴チャンバーの内側へアクセスして，内部に付着する液体等の除去作業等をすることは，不可能な設計になっていたこと，また手動で音圧や周波数を操作する機能もなかったことから，対策として予定されていた実験ルーチンの中でもっとも高い音圧を出すルーチンを何度か空運転してオイルを吹き飛ばすことを試みた。その結果をダウンリンクＴＶで見る限り Y 軸音源孔を覆っていたオイルは消失したが，X–Y 軸の音圧は液滴の分裂前と比べて依然として低いままであった。

液滴の分裂後，液滴を共鳴チャンバーで浮揚させることは困難となったものの，音圧を受けて変形する液滴のデータは幾種類か得ることができた。それらのデータはいずれも液滴が針先に付着したままのものではあるが，地上と違い注入針の影響は無視できる程度に液滴のサイズが大きいこと，分裂事故の後もチャンバー内の音圧，温度の測定系は正常に働いたことから，十分意義のあるものとなったことは幸いであった。図 3.12 および図 3.13

はこのようにして得られた変形液滴の画像データである。

4　理論と実験結果の比較

共鳴音場における液滴変形に関する実験は，第3章3.1節および3.3節で述べたように，地上およびスペースシャトルにおける宇宙実験として行われた。地上実験では，前述のように，注射針の先端に液滴を付着させて行った実験と，超音波を利用した液滴の無接触保持装置を用いた実験を行った。

注射針を利用する実験では，極めて小さいサイズの液滴を対象とせざるを得なかっただけでなく注射針と液滴の濡れによる影響を受けるため実験の精度も制約を受けた。超音波を利用する実験では，液滴を完全無接触で空中に保持することができたが，理論的に導かれた式と比較するには取り扱うことのできる液滴の大きさが十分ではなかった。スペースシャトルで行った宇宙実験から得られた結果は地上実験では得ることのできなかった，データの空白領域を満たすものであり，これにより図3.14のグラフに示すように理論式は実験結果と広い範囲にわたって比較することができた。

グラフでは液滴の変形量と2.4節で導いた無次元パラメータΠとの関係を示している。グラフからわかるように式(4.22)は実験値と大きな隔たりがある。しかし，式(5.57)は液滴形状の測定がビデオ画像をもとに行われていることを考慮すれば比較的実験値とよく一致していると言える。殊に宇宙実験から得られた値はいずれも理論値と極めて良い一致があると言える。これは，前述したように式(4.22)が単純化のため液滴を剛体とみなして液滴周りの音響放射圧を求めているのに対し，これは，式(5.57)では変形した液滴がその変形故に共鳴音場の音響放射圧に及ぼす影響を考慮していることによるものである。

5　あとがき

本実験は著者等にとって初めての宇宙実験であった。液滴を注入針から無事に切り離すことが本実験の鍵であると理解していたので，この問題に関して必要なデータを得るためにあらゆる種類の地上実験および航空機実験を行って宇宙実験に臨んだが，宇宙実験では装置のスペース，構造上の制約がある上，無重力環境が実験にもたらす影響が完全には把握できず，予定していた多くの実験をあきらめざるを得なかったのはまことに残念であった。

しかしながら，液滴の変形に関する実験では，幸いにもよいデータを得ることができた。この結果は，将来宇宙において無接触の膜材料または線材料を製造する実験が試みられる場合には，有益なデータとなることを確信している。

最後に，宇宙開発事業団の関係者をはじめ長年にわたって本実験のためにご協力をいただいた全ての方々に感謝を申し上げる。

参考文献

1 Lous V. King, *On the Acoustic Radiation Pressure on Spheres*, Proc. of Royal Society A147 pp.212-240, 1934

2 T. Yamanaka and H. Kamimura, *Distortion of Sound Field in a Resonator*, Acta Astronautica Vol.8, No. 5-6, pp. 675-687, 1981.

3 T. Yamanaka, H. Kamimura, et al, *Stability of a Rotating Liquid Drop in an Acoustic Resonator*, IAF-81-143, The 32 nd International Astronautical Federation Congress, Rome, 1981.

4 H. Kamimura and T. Yamanaka, *An Experimental Study of Tri-axial Acoustic Chamber for* Weightless Positioning and Manipulating, Proceeding of The 13 th International Symposium on Space Technology and Science, Tokyo, pp. 1685-1690, 1982.

5 T. Yamanaka and H. Kamimura, *Influence of Acoustic Fields on Drop Dynamics in an Acoustic Resonator*, Adv. Space Res. Vol. 3, No. 5, COSPAR, pp. 155-163, 1983.

6 T. Yamanaka, M. Saito and H. Kamimura, *Deformation of Drop Due to Radiation Pressure of Acoustic Standing Wave*, Proceeding of The 14 th International Symposium on Space Techonolgy and Science, Tokyo, pp. 1625-1630, 1984.

7 H. Lamb, *Hydrodynamics*, 6 *th ed*., Cambridge University Press, 1932.

8 M. S. Plesset, J. Appl. Phys., 25, pp.96-98, 1954.

9 C. A. Miller and L. E. Scriven, J. Fluid Mech., 32, pp.417-435, 1968.

10 P. M. Morse and H. Feshbach, *Method of Theoretical Physics*, *Part* 1, MacGraw-Hill, New York, 1953.

11 M. Abramowitz and I. A. Stegun (Eds.), *Handbook of Mathematical Functions with Formulas*, *Graphs and Mathematical Tables*, 4 *th ed*., National Bureau of Standards, Washington D. C., 1965.

12 S. Chandrasekhar, Proc. R. Soc. London, A286, pp.1-26, 1965.

13 R. A. Brown and L. E. Scriven, Proc. R. Soc. London. A371, pp.331-357, 1980.

14 T. Hasegawa and K. Yosioka, The Journal of the Acoustic Society of America, Vol. 46, No. 5 (Part 2), 1969, pp. 1139-1143.

15 T. Hasegawa, The Journal of the Acoustic Society of America, Vol. 65, No. 1, 1979, pp. 32-40.

16 H. Kamimura, et al., *On The Levitation Of A Liquid Drop In 1-g Field*, Proceedings of the 18 th International Symposium on Space Technology and Science, Kagoshima, May, 1992

17 H. Kamimura, et al., *The Low-g Flight Experiment with a Business Jet*, Proceedings of the 16 th International Symposium on Space Technology and Science, Sapporo, 1988, pp. 2381-2386.

航空宇宙技術研究所報告 1337号

平成9年10月発行

発行所　科学技術庁航空宇宙技術研究所
東京都調布市深大寺東町7丁目44番地1
電話（0422）47-5911　〒182

印刷所　株式会社　東京プレス
東京都板橋区桜川2－27－12

Printed in Japan