

航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-1173

指定された状態推定精度実現のための
センサ要求精度の導出

佐々修一・永安正彦

1992年7月

航空宇宙技術研究所
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

指定された状態推定精度実現のための センサ要求精度の導出*

佐々修一^{*1} 永安正彦^{*1}

Calculation of the Required Sensor Accuracy to Obtain a Specified State Estimation Accuracy

Shuichi SASA^{*1}, Masahiko NAGAYASU^{*1}

ABSTRACT

For the design of sensor systems for flight test data acquisition, the determination of necessary accuracy of the sensors is important.

In this report, one method is presented to calculate the sensor accuracy to obtain a specified state estimation accuracy by a Kalman filter.

This is an inverse problem of a state estimation problem in which observation sensor or input sensor accuracy is obtained by optimization method.

Gauss-Newton method is applied in the iterative optimization calculation, and the basic performance is presented by numerical example using 3rd order linear system model.

Keywords: Kalman filter, Gauss-Newton method, state estimation, sensor accuracy, inverse problem

概 要

飛行試験データの取得などに用いられる計測用センサシステムの設計においては、センサの必要精度の決定が重要である。

本報では計測されたデータを用いてカルマンフィルタにより状態推定を行うとき、指定された状態推定精度を達成するために必要となるセンサ系の精度を計算する一手法を示す。

これは状態推定問題における逆問題に相当し、観測側センサ精度と入力側センサ精度が、指定された推定誤差分散に対して最適化手法により求められる。

Gauss-Newton 法が繰り返し計算による最適化計算に用いられ、3次系での数値例により基本特性が示される。

* 平成4年6月3日受付(received 3 June 1992)

*1 制御部(Control Systems Division)

1. 緒 言

カルマンフィルタを用いて状態推定を行う場合、システム入力及びシステム出力の計測値を用いるが、これらに不規則ノイズが加わっている場合、不規則ノイズの性質によって状態の推定精度が決まる。

本稿ではこの逆問題として、所望の精度で状態推定を行うためにはシステム入力及びシステム出力の計測精度がどの程度であるべきかという問題を定式化し、その数値解法を導くとともに、数値例でその基本特性を示す。

目標の状態推定精度は、カルマンフィルタにおけるリカッチ方程式の解の共分散行列で与え、センサ系で実現された推定誤差共分散行列との差の評価には、それぞれの対角成分の差から作られるベクトルのユークリッドノルムを用いる。本課題はこのノルムをセンサ精度に対応するノイズの共分散行列により最小化する最適化問題となる。ユークリッドノルムを用いることにより効率の良い数値探索が可能となる。

2. 問題の記述

線形システムの状態推定問題を考える。システム入力 u とシステム出力 y は通常不規則ノイズを伴って計測されていると考えられる。 u 、 y の計測値を u_m 、 y_m とすれば、これらを用いたシステムの状態推定問題は図1のように表せると考えられる。

ここで w 、 v は u_m 、 y_m に含まれる不規則ノイズに対応する。この場合対象システムの状態推定問題は、確定入力としての入力計測値と、センサ計測値の不規則外乱を含む、次式のような動的システムの状態推定問題として定式化される。

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}(\mathbf{u}_m + \mathbf{w}) \\ \mathbf{y}_m = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{v} \end{cases} \quad (2-1)$$

ここで $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 、 \mathbf{u} 、 \mathbf{u}_m 、 $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^r$ 、 \mathbf{y} 、 $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$ であり \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 、 \mathbf{C} は対応する次元のマトリクスである。センサノイズはお互いに相関のない正規性白色ノイズで次の性質を有するとする。

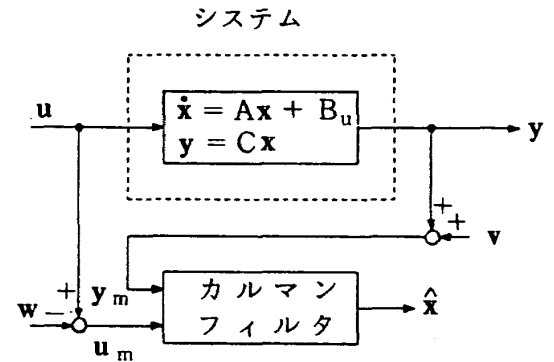


図1 センサ計測情報を用いた状態推定問題

$$E\{\mathbf{w}(t)\mathbf{w}'(t+\tau)\} = \mathbf{Q}\delta(\tau) \quad \mathbf{Q}: \text{対角行列}$$

$$E\{\mathbf{v}(t)\mathbf{v}'(t+\tau)\} = \mathbf{R}\delta(\tau) \quad \mathbf{R}: \text{対角行列}$$

(2-2)

センサ計測誤差が不規則ノイズで表されるとすれば \mathbf{Q} 、 \mathbf{R} の各対角成分はそれぞれ入力側センサ精度、観測側センサ精度を表していると考えられる。(2-1)式は \mathbf{u}_m を確定入力と考えれば、確定入力を含む状態推定問題となり、この場合のカルマンフィルタによる状態推定誤差の共分散行列 \mathbf{P} の定常値は、確定入力のない場合と同様次のリカッチ方程式の解となる。

$$\mathbf{A}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}' - \mathbf{P}\mathbf{C}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{P} + \mathbf{B}\mathbf{Q}\mathbf{B}' = 0 \quad (2-3)$$

状態推定精度は誤差共分散行列 \mathbf{P} で評価され、その目標値は \mathbf{P} の対角成分で指定されるとする。

よって本稿の課題は次のように記述できる。

「 \mathbf{P} (推定誤差共分散行列) の対角成分で指定される状態推定精度を達成するために、

- (1) \mathbf{R} (出力計測精度) を与えられたとき、 \mathbf{Q} (入力計測精度) はどのようなものか。
- (2) \mathbf{Q} (入力計測精度) を与えられたとき、 \mathbf{R} (出力計測精度) はどのようなものか。」

3. 入力計測精度要求の導出

所望の状態推定精度を実現するために、与えられた \mathbf{R} (出力計測精度) のもとに、 \mathbf{Q} (入力計測センサの必要精度) を求める問題を考える。

目標状態推定精度 $\underline{\mathbf{P}}$ と、(2-3)式の解の推定精度 \mathbf{P} の近さを、それぞれの行列の対角成分からな

るベクトルの差のユークリッドノルムで評価する。
 $P(\underline{P})$ の対角成分を縦に並べた列ベクトル $\tilde{\mathbf{P}}(\tilde{\underline{P}})$
 を導入する。

$$\tilde{\mathbf{P}} \triangleq [p_{11} \quad p_{22} \quad \dots \quad p_{nn}]^T \quad (3-1)$$

$$= [\tilde{p}_1 \quad \tilde{p}_2 \quad \dots \quad \tilde{p}_n]^T$$

$$\tilde{\underline{P}} \triangleq [\underline{p}_{11} \quad \underline{p}_{22} \quad \dots \quad \underline{p}_{nn}]^T \quad (3-2)$$

$$= [\underline{\tilde{p}}_1 \quad \underline{\tilde{p}}_2 \quad \dots \quad \underline{\tilde{p}}_n]^T$$

よって次の評価関数を最小にする Q を求める。

$$J = (\tilde{\underline{P}} - \tilde{\mathbf{P}})^T (\tilde{\underline{P}} - \tilde{\mathbf{P}}) \quad (3-3)$$

リカッチ方程式の解という拘束条件のもとでの上
 記の最適化問題には、数値探索手法の適用が可能で、
 ここでは Gauss-Newton 法¹⁾ (付録)を用いる。
 添え字 i はイタレーション番号を示す。

Q の対角成分を取り出してベクトル \mathbf{q} と表記すれ
 ば

$$\mathbf{q} \triangleq [Q_{11} \quad Q_{22} \quad \dots \quad Q_{rr}]^T \quad (3-4)$$

\mathbf{q} の変動 $\Delta\mathbf{q}$ に対する $\tilde{\mathbf{P}}$ の変化は $\Delta\mathbf{q}$ の1次の項
 まで展開し

$$\tilde{\mathbf{P}}_{i+1} = \tilde{\mathbf{P}}_i + \frac{\partial \tilde{\mathbf{P}}}{\partial \mathbf{q}} \Delta\mathbf{q} \quad (3-5)$$

(3-3)式に代入し

$$J_{i+1} = (\tilde{\underline{P}} - \tilde{\mathbf{P}}_i - \frac{\partial \tilde{\mathbf{P}}}{\partial \mathbf{q}} \Delta\mathbf{q})^T (\tilde{\underline{P}} - \tilde{\mathbf{P}}_i - \frac{\partial \tilde{\mathbf{P}}}{\partial \mathbf{q}} \Delta\mathbf{q}) \quad (3-6)$$

の極小化より

$$\Delta\mathbf{q} = \left[\left[\frac{\partial \tilde{\mathbf{P}}}{\partial \mathbf{q}} \right]^T \left[\frac{\partial \tilde{\mathbf{P}}}{\partial \mathbf{q}} \right] \right]^{-1} \left[\frac{\partial \tilde{\mathbf{P}}}{\partial \mathbf{q}} \right]^T (\tilde{\underline{P}} - \tilde{\mathbf{P}}_i) \quad (3-7)$$

この $\Delta\mathbf{q}$ を用い、 $\mathbf{q}_{i+1} = \mathbf{q}_i + \Delta\mathbf{q}$ とする。ここで

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{P}}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{P}_1}{\partial q_1} & \frac{\partial \tilde{P}_1}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial \tilde{P}_1}{\partial q_r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \tilde{P}_n}{\partial q_1} & \frac{\partial \tilde{P}_n}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial \tilde{P}_n}{\partial q_r} \end{bmatrix} \quad (3-8)$$

上式の j 列ベクトルは Q の (j, j) 成分の変動を
 Δq_j とした時の、リカッチ解の変動 ΔP より求める。

$$\left[\frac{\partial \tilde{\mathbf{P}}}{\partial \mathbf{q}} \right]_{ij} \simeq \frac{\Delta \tilde{P}_i}{\Delta q_j} \quad (3-9)$$

このほか Q の変動 ΔQ に対する P の感度は以下の
 ようにも求められる。

Q に変動 ΔQ を与えた時、(2-3) 式の解 P が P
 $+\Delta P$ になったとすれば、それぞれを (2-3) 式に
 代入し、

$$A(P+\Delta P) + (P+\Delta P)A' - (P+\Delta P)C \cdot R^{-1}C$$

$$(P+\Delta P) + B(Q+\Delta Q)B' = 0 \quad (3-10)$$

これと (2-3) 式を用いると

$$(A-PC'R^{-1}C)\Delta P + \Delta P(A'-C'R^{-1}CP)$$

$$-\Delta PC'R^{-1}C\Delta P + B\Delta QB' = 0 \quad (3-11)$$

(3-11) 式は、 ΔP と ΔQ の満足するリカッチ
 方程式であり既存の求解アルゴリズムで解けば、 Q
 の各成分の変動に対する、 P の感度が計算できるこ
 とになる。

4. 出力計測精度要求の導出

所望の状態推定精度 P を実現するために、与えら
 れた Q (入力計測精度) のもとに R (出力計測セン
 サの必要精度) を求める問題を考える。

3章と同様に目標の状態推定精度 \underline{P} と実現された
 P の近さを (3-3) 式で評価する。式展開を容易
 にするため、 $R^{-1} = S$ とする。 $\tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\underline{P}}$ の定義は前
 と同様である。

$$\mathbf{s} \triangleq [S_{11}, S_{22}, \dots, S_{mm}]^T \quad (4-1)$$

i 番目のイタレーションにおける s の更新則は

$$\Delta s = \left[\left[\frac{\partial \tilde{P}}{\partial s} \right]^T \left[\frac{\partial \tilde{P}}{\partial s} \right] \right]^{-1} \left[\frac{\partial \tilde{P}}{\partial s} \right]^T (\tilde{P} - \tilde{P}_i) \quad (4-2)$$

を用いて $s_{i+1} = s_i + \Delta s$ となる。

$\frac{\partial \tilde{P}}{\partial s}$ は S に微小変動を与えた時のリカッチ解の変動

から求めるが、以下の様にして求められる。

(2-3) 式より、 S の変動に対する P の感度を考える。即ち、 S に変動 $-\Delta S$ を与えた時、(2-3) の解 P が $P + \Delta P$ になったとすれば

$$A(P + \Delta P) + (P + \Delta P)A' - (P + \Delta P)C' \\ (S - \Delta S)C(P + \Delta P) + BQB' = 0 \quad (4-3)$$

(2-3) 式を考慮してまとめると

$$(A - PC'(S - \Delta S)C) \Delta P + \Delta P(A' - C'(S - \Delta S)C) \\ - \Delta PC'(S - \Delta S)C \Delta P + PC' \Delta S C P = 0 \quad (4-4)$$

これは ΔP に関するリカッチ方程式になっており、行列の入れ替えにより、既存のリカッチ方程式求解アルゴリズムが適用可能であり、 ΔS (ΔR に対応) に対する P の感度が計算できる。

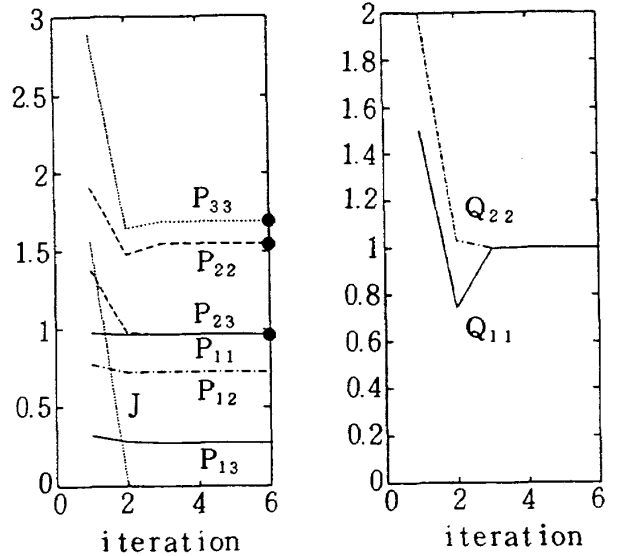
5. 数値計算例

(5-1) 式の3次系(3重積分系)に、本手法を適用し基本性能を確かめる。以下確定入力 u_m は省略する。

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bw \\ y_m = Cx + v \end{cases} \quad (5-1)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

この時(2-3)式のリカッチ方程式を満足する Q , R , P の組み合わせとして次式がある。



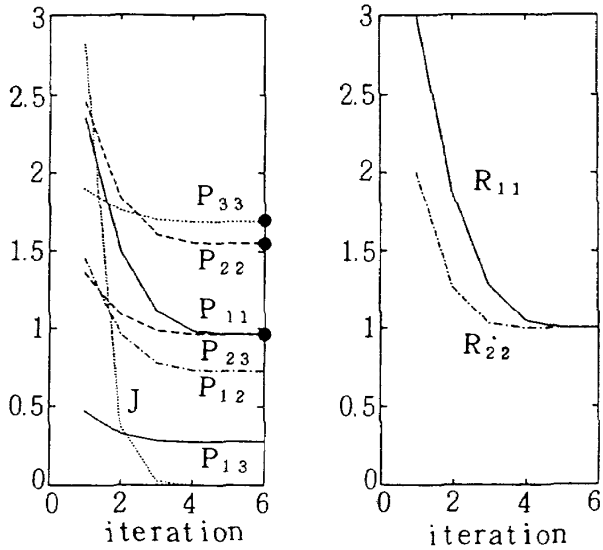
(a) 状態推定誤差分散の変化 (b) 入力計測誤差分散の変化 (●: 指定値)

図2 必要な入力計測精度の数値探索 (1)

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 0.9617 & 0.7260 & 0.2740 \\ 0.7260 & 1.5480 & 0.9617 \\ 0.2740 & 0.9617 & 1.6877 \end{bmatrix} \quad (5-2)$$

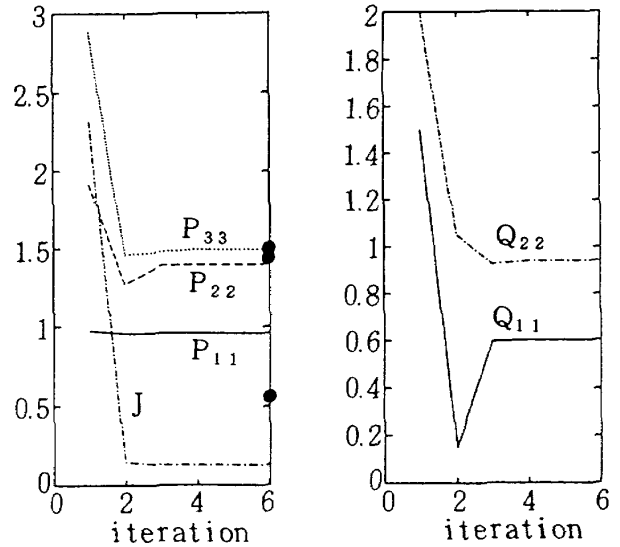
5.1 入力精度要求値の計算

観測精度を $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ とし、状態推定精度の目標値として(5-2)式での P の対角成分を与え、 Q の初期値 $\begin{bmatrix} 1.5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ からスタートして最適な Q (必要な入力精度) を3章の手法で探索した。イタレーションに伴う P , 評価関数 J , 及び Q の変化を図2に示す。目標として与えた P の対角成分が(2-3)式の可能解の対角成分であるため、4ステップで誤差評価関数値が 10^{-4} 以下になっている。 P は非対角項も含めて(5-2)式の P に収束し、最適な Q も(5-2)式の Q と一致し必要な入力精度を正しく与えている。



(a) 状態推定誤差分散の変化
(b) 出力計測誤差分散の変化
(● : 指定値)

図3 必要な出力計測精度の数値探索



(a) 状態推定誤差分散の変化
(b) 入力計測誤差分散の変化
(● : 指定値)

図4 必要な入力計測精度の数値探索 (2)

5.2 観測精度要求の計算

入力精度を $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ とし、状態推定精度の

の目標値として (5-2) 式での P の対角成分を与え、 R の初期値 $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ からスタートして最適な

R (必要な観測精度) を4章の手法で探索した。イタレーションに伴う P , 評価関数 J , 及び R の変化は図3であり、5.1節と同様、必要な観測精度を正しく与えている。

5.3 近似解

図4は P の目標値として $\tilde{P} = (0.6, 1.4, 1.5)^T$ を与えて Q を5.1節と同様に求めたものだが、この場合 \tilde{P} がリカッチ方程式の可能解に対応しないので、得られた P の対角成分は目標値に完全には一致せず (3-3) 式の意味での最適近似解となっている。

6. 結 言

状態推定問題において、所望の推定精度を実現するために必要な計測精度を求める問題を定式化し、その数値解法を数値例とともに示した。

本手法は Q (または R) を変えて得られる、リカ

ッチ解 P の対角成分で張られる曲面を考え、目標に最も近い同曲面上の点を数値探索する手法となっている。この曲面はシステムの構造により決まるため、不適切な状態の目標推定精度の与え方により、解 Q (または R) の対角成分が実現不能なほど小さくなる (場合により 0)。この場合は目標精度設定に無理があるためこれを変更するか、システムの構造を変える必要がある。

目標推定精度及び誤差評価に、共分散行列の全成分を用いることも行列ノルムの選択²⁾により可能である。またノイズ共分散行列の非対角成分を無視できない場合や離散システムに対しても同様の手法が可能である。

有色雑音に対しては成形フィルタを導入すればよい。

参 考 文 献

- 1) 中溝高好：信号解析とシステム同定, (1988), pp.14-16, コロナ社
- 2) 児玉慎三, 須田信英：システム制御のためのマトリクス理論, (1978), pp.234, 計測自動制御学会

付録 最適化手法

未知パラメータ θ を含む評価関数の最小化により θ の最適値を求める手法として、最急降下法や Newton-Raphson 法、Gauss-Newton 法 (準線形化法) 等がある。ここでは収束の速いあとの2者について簡単に説明する。

1. Newton-Raphson 法

評価関数 $J(\theta)$ を θ_i (i 番目のイタレーションにおける θ の値) の近傍で Taylor 展開し、2次の項までとると

$$J(\theta) = J(\theta_i) + \frac{\partial J}{\partial \theta_i} (\theta - \theta_i) + \frac{1}{2} (\theta - \theta_i)^T \frac{\partial^2 J(\theta_i)}{\partial \theta \partial \theta^T} (\theta - \theta_i)$$

最小点では $\frac{\partial J}{\partial \theta_i} = 0$ より

$$\frac{\partial J}{\partial \theta_i} + \frac{\partial^2 J(\theta_i)}{\partial \theta \partial \theta^T} (\theta_{i+1} - \theta_i) = 0$$

上式を用いれば

$$\theta_{i+1} = \theta_i - \left[\frac{\partial^2 J(\theta_i)}{\partial \theta \partial \theta^T} \right]^{-1} \left[\frac{\partial J(\theta_i)}{\partial \theta_i} \right]$$

のような更新則が得られる。

2. Gauss-Newton 法 (準線形化法)

評価関数が次式のような2次形式型になっている場合を考える。

$$J = h(\theta)^T Q h(\theta)$$

$h(\theta)$ を θ_i の近傍で1次の項まで Taylor 展開し、上式に代入すると、

$$J(\theta) = [h(\theta_i) + \frac{\partial h(\theta_i)}{\partial \theta_i} (\theta - \theta_i)]^T Q [h(\theta_i) + \frac{\partial h(\theta_i)}{\partial \theta_i^T} (\theta - \theta_i)]$$

最小点では $\frac{\partial J}{\partial \theta_i} = 0$ より

$$\left[\frac{\partial h(\theta_i)}{\partial \theta_i} \right]^T Q [h(\theta_i) + \frac{\partial h(\theta_i)}{\partial \theta_i^T} (\theta - \theta_i)] = 0$$

上式を用いれば

$$\theta_{i+1} = \theta_i - \left[\left[\frac{\partial h(\theta_i)}{\partial \theta} \right]^T Q \left[\frac{\partial h(\theta_i)}{\partial \theta^T} \right] \right]^{-1} \left[\frac{\partial h(\theta_i)}{\partial \theta_i} \right]^T Q h(\theta_i)$$

のような更新則が得られる。

本手法は、Newton-Raphson 法での $\left[\frac{\partial^2 J(\theta_i)}{\partial \theta \partial \theta^T} \right]$

が必ずしも正定にならないという数値的不安定性を補償したものになっている。

本報告においては、評価関数は推定誤差分散とその目標値との差のユークリッドノルムであり、本文中(3-3)式のように次式となっている。

$$J = (\tilde{\mathbf{P}} - \tilde{\mathbf{P}})^T (\tilde{\mathbf{P}} - \tilde{\mathbf{P}})$$

航空宇宙技術研究所報告1173号

平成4年7月発行

発行所 航空宇宙技術研究所
東京都調布市深大寺東町7-44-1
電話 三鷹(0422)47-5911(大代表) 千182
印刷所 株式会社実業公報社
東京都千代田区九段南4-2-12
