

ISSN 0389-4010
UDC 681.5.015.44

航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-1182

カルマンフィルタによる入力推定

佐々修一・永安正彦

1992年11月

航空宇宙技術研究所
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

カルマンフィルタによる入力推定*

佐々修一*¹ 永安正彦*¹

Kalman Filter Input Estimation

Shuichi SASA*¹ and Masahiko NAGAYASU*¹

ABSTRACT

As system output includes information concerning system input, it seems possible that system output can be used to estimate noisy system input. For SISO systems, the problem of input estimation using Kalman filter is examined.

Since the problem is different from an ordinary Kalman filter problem, it is first modified to an ordinary Kalman Filter problem, and the input estimation accuracy is then calculated from the measurement accuracy through the Riccati equation.

The input accuracy for an integrator system is analyzed, and a sinusoidal input is estimated using the simulated output of an integrator system.

Keywords: input estimation, Kalman filter

概 要

システム出力にはシステム入力の情報が含まれているため、これを用いると、入力信号の推定や入力信号計測値に含まれるノイズの平滑化などが可能と考えられる。ここでは一入力一出力系において、カルマンフィルタを用いた入力信号の推定問題について考察する。

上記の問題は通常の状態推定問題とは異なるため、まずカルマンフィルタ型に定式化し直し、入力の推定精度をカルマンフィルタにおけるリカッチ方程式と関係づける。

積分系での入力の推定精度を解析的に調べ、正弦波入力を、積分器出力のシミュレーションデータにより推定し、ここで提案する手法の特性を示す。

1. 緒 言

システムの入出力信号が観測雑音を伴って計測されているとき、システム出力にはシステム入力の情報が含まれているため、これを用いてシステム入力を推定することができると考えられる。

通常のカルマンフィルタは、図1のようにシステムの入出力計測値を用いてシステムの状態(出

力)を推定するものだが、本問題は図2に示すように、システムの入出力計測値を用いてシステムの入力を推定するという本来の推定問題とは逆の推定問題となっている。

まず問題を変形し、システムの入出力を入れ換えて、通常のカルマンフィルタ型に問題を定式化する。

簡単な積分系に本手法を適用した場合の、推定

* 平成4年10月6日受付 (received 6 October 1992)

*¹ 制御部 (Control Systems Division)

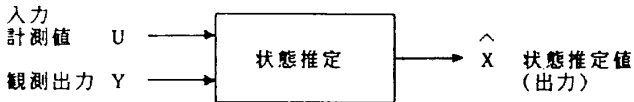


図1 カルマンフィルタによる状態(出力)の推定問題

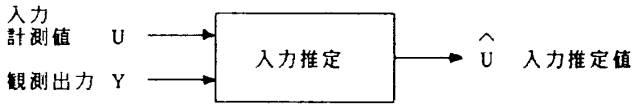


図2 カルマンフィルタによる入力の推定問題

された入力信号精度と計測精度の関係について検討し、推定精度が向上する物理的意味を考察する。

数値例として積分系に正弦波入力を加えたシステムのノイズを含むシミュレーションデータを用いて、本手法により入力推定を行い、その有効性を示す。

提案される手法はセンサダイナミクスの影響を受けたセンサ出力信号を用いての、ノイズを含む元信号の平滑化等に有効と考えられる。

2. 定式化

以下実際のデータ処理との対応から、離散化されたシステムで考える。

1入力1出力系(U:入力, Y:出力)の離散時間表現を

$$Y(z) = \frac{b(z^{-1})}{a(z^{-1})} U(z), \quad U(z) = \frac{a(z^{-1})}{b(z^{-1})} Y(z) \tag{2.1}$$

とする。ここで

$$\begin{aligned} a(z^{-1}) &= a_p z^{-p} + \dots + a_0 \\ b(z^{-1}) &= b_q z^{-q} + \dots + b_0, \quad b_0 = 1, \quad p \geq q \end{aligned} \tag{2.2}$$

よって

$$\begin{aligned} u_n &= -b_1 u_{n-1} - \dots - b_q u_{n-q} \\ &\quad + a_0 y_n + a_1 y_{n-1} + \dots + a_p y_{n-p} \end{aligned} \tag{2.3}$$

u_i, y_i の計測値 \tilde{u}_i, \tilde{y}_i はそれぞれノイズ w_i, v_i を含む。

$$u_i = \tilde{u}_i + w_i, \quad y_i = \tilde{y}_i + v_i \tag{2.4}$$

(2.4)式を(2.3)式に代入すると

$$\begin{cases} u_n = -b_1 u_{n-1} - \dots - b_q u_{n-q} \\ \quad + a_0 (\tilde{y}_n + v_n) + \dots + a_p (\tilde{y}_{n-p} + v_{n-p}) \\ \tilde{u}_n = u_n - w_n \end{cases} \tag{2.5}$$

状態方程式で表現すると、

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_p \\ \xi_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \xi_q \end{bmatrix}_{n+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \cdot & 0 & 1 & \cdot \\ & & & 0 \\ \cdot & & 0 & 1 \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \hline & & & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 1 & \cdot \\ & & 0 & & & & & 0 & 1 \\ a_p & \cdot & \cdot & a_1 & -b_q & \cdot & \cdot & -b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_p \\ \xi_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \xi_q \end{bmatrix}_n$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} (a_0 \tilde{y}_{n+1} + \dots + a_p \tilde{y}_{n-p+1}) + \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ a_0 \end{bmatrix} v_{n+1}$$

$$\tilde{u}_n = [0 \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} z_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_p \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \xi_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \xi_q \end{bmatrix}_n - w_n \tag{2.6}$$

$z_1 \sim z_{p-1}, \xi_1 \sim \xi_{q-1}$ は過去の v_i 及び u_i のための

状態変数を示す。これは $(a_0 \tilde{y}_{n+1} + \dots + a_p \tilde{y}_{n-p+1})$ を確定入力とするランダムノイズ w_n と v_n を含む確率システムなので、カルマンフィルタが適用可能となり、システム出力及び入力の計測値、 \tilde{y}_{n+1} 、 \dots 、 \tilde{y}_{n-p+1} と \tilde{u}_n を用いて入力 u_n が推定できることになる。

(2.6)式は、通常のカルマンフィルタの定式化とは違い、入力の時刻が1ステップ進んでいるが、入力を仮想的に1ステップ遅らせれば、通常と同様に考えることができる。

推定精度の評価には、(2.6)式をシステム方程式と考えて、定常リカッチ方程式から求まる共分散行列を用いる。

3. 適用例（一重積分系への適用）

(1) 定式化

$$y = \frac{1}{s} u \quad (3.1)$$

上記の積分系において、 y と u が計測されている時、出力 y の計測値を用いて入力 u の推定値を求める問題を考える。(3.1)式で出力から入力への伝達関数はプロパーではないため、安定な離散時間近似システムを得るため、次式の後進差分近似¹⁾を用いる。

$$s \rightarrow \frac{1}{T} (1 - z^{-1}) \quad (3.2)$$

$$u = \frac{1}{T} (1 - z^{-1}) y, \quad u_n = \frac{1}{T} (y_n - y_{n-1}) \quad (3.3)$$

これは通常の一次の数値微分公式に対応する。

ノイズを考慮すると(3.3)式は(2.4)式より

$$u_n = \frac{1}{T} (\tilde{y}_n + v_n - \tilde{y}_{n-1} - v_{n-1}) \quad (3.4)$$

状態変数 $z_n (= v_n)$ を導入し状態方程式表示すれば

$$\begin{bmatrix} z \\ \xi \end{bmatrix}_{n+1} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/T \ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \xi \end{bmatrix}_n + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/T \end{bmatrix} (\tilde{y}_{n+1} - \tilde{y}_n) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1/T \end{bmatrix} v_{n+1}$$

$$\tilde{u}_n = [0 \ 1] \begin{bmatrix} z \\ \xi \end{bmatrix}_n - w_n \quad (3.5)$$

(2) 推定誤差の評価

離散型カルマンフィルタの定常誤差共分散により入力 u の推定精度を評価する。(3.9)式のシステム行列を

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1/T & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/T \end{bmatrix} \quad C = [0 \ 1] \quad (3.6)$$

とし、離散型カルマンフィルタによる推定誤差共分散の定常値 P は次式を連立させて解けば良い²⁾。

$$\begin{aligned} P &= (M^{-1} + C^T W^{-1} C)^{-1} \\ M &= APA^T + DVD^T \\ P &: \text{状態推定誤差共分散} \\ M &: \text{状態予測誤差共分散} \end{aligned} \quad (3.7)$$

W, V はシステム入出力ノイズの分散で次式とする。

$$E[w_i w_j] = W \delta_{ij}, \quad E[v_i v_j] = V \delta_{ij} \quad (3.8)$$

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & P_3 \\ P_3 & P_2 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

とすれば、(3.5)式の状態変数の定義から P_2 が入力の推定誤差分散を示す。(3.7)式より P_2 が陽に解けて次式となる。

$$P_2 = \frac{-1 + \frac{2V}{T^2 W} + \sqrt{1 + \frac{4V}{T^2 W}}}{1 + \frac{2V}{T^2 W} + \sqrt{1 + \frac{4V}{T^2 W}}} W \quad (3.10)$$

$$P_2^* = \frac{P_2}{W}, \quad V^* = \frac{V}{T^2 W} \quad (3.11)$$

上式のように無次元化すれば、(3.10)式は次式となる。

$$P_2^* = \frac{-1 + 2V^* + \sqrt{1 + 4V^*}}{1 + 2V^* + \sqrt{1 + 4V^*}} \quad (3.12)$$

V^* に対し P_2^* をプロットしたのが図3である。

$V^* \ll 1/4$ の時

$$P_2^* \simeq \frac{4V^*}{2 + 4V^*} \simeq 2V^* \quad (3.13)$$

即ちシステム出力計測精度がシステム入力計測精度より相対的に十分良いとき、システム入力の推定精度はシステム出力の計測精度で決まることを示す。ここで右辺の $2V^*$ は、(3.11)の正規化により、出力計測値の1次差分による数値微分の誤差

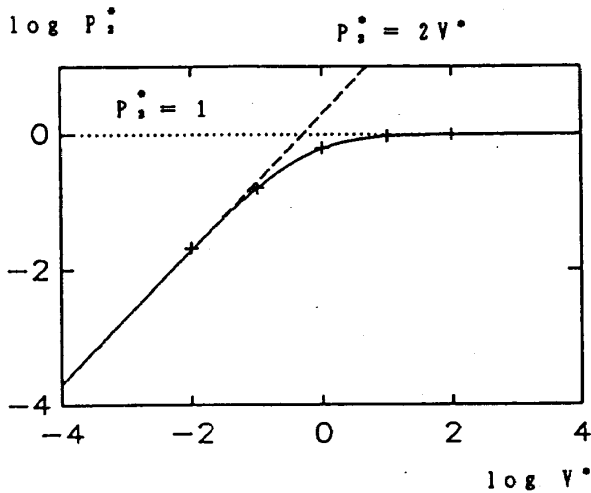


図3 積分系での出力計測精度に対する入力推定精度 (+ 数値シミュレーション結果)

分散に等しいことが分かる。

$V^* \gg 1/4$ の時

$$P_2^* \approx \frac{2V^*}{2V^*} = 1 \quad (3.14)$$

即ちシステム出力の計測精度がシステム入力の計測精度と比べて相対的に悪いとき、システム入力の推定精度は入力の計測精度で決まることを示す。

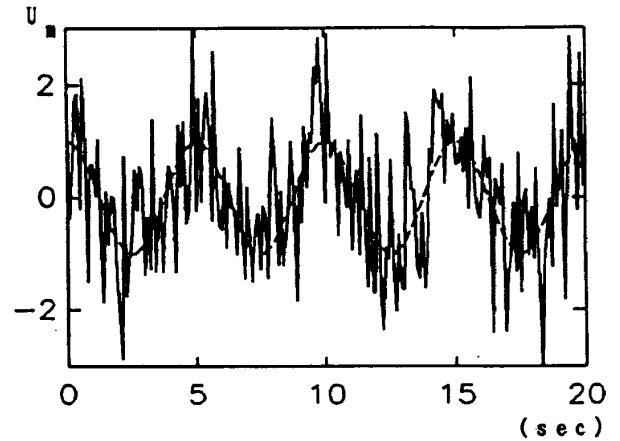
以上より、入力の計測精度と比べその積分出力の計測精度が良い場合は出力の数値微分の情報を主に利用し、逆の場合は入力計測値の情報を主に利用して、入力の推定精度を向上させていることが分かる。

(3) 数値シミュレーション

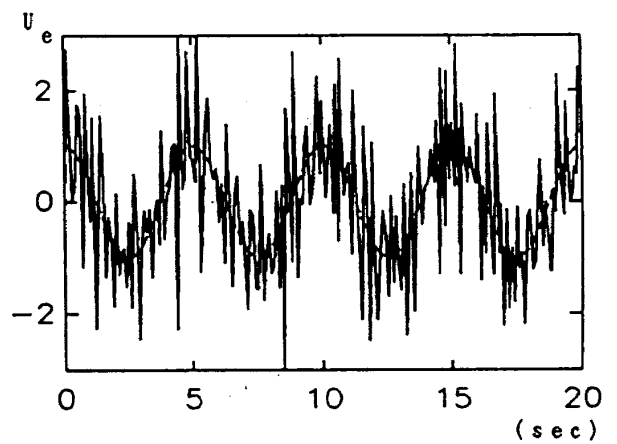
入力信号 u とその積分出力 y の変化を正弦波と考え、数値的に発生させた正規性白色ノイズを重畳したシミュレーションデータを用いた入力推定の結果を図4に示す。サンプリング周期0.1sec, 正弦波の周期5.0sec, 入力ノイズの分散 $W=1.0$, 出力ノイズの分散 $V=0.005$ と設定した。

カルマンフィルタに必要なノイズ分散値にはシミュレーションでの真値を用いた。初期推定値は0, 初期共分散行列は単位行列とした。

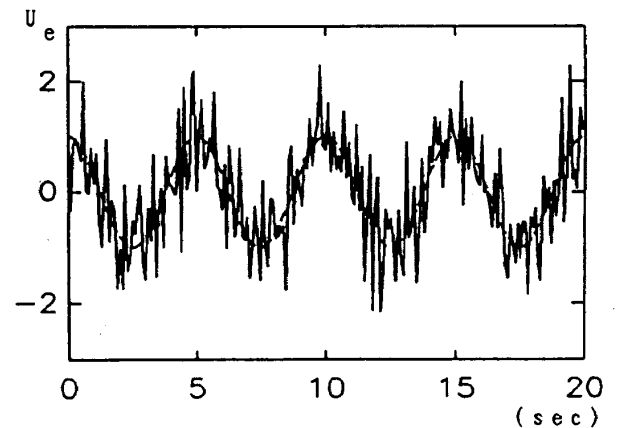
この場合(3.11)式より $V^*=0.5$ である。図4(a)は入力計測値(入力推定誤差分散: 1.0027, 実現された入力ノイズ分散に相当), (b)は出力の数値微分(一次微分)(同誤差分散: 1.0606), (c)は本手法による推定値(同誤差分散: 0.4551)とな



(a) 入力計測値



(b) 出力の数値微分



(c) 提案手法

図4 積分系の入力推定の数値シミュレーション (破線: 真の入力)

り、本手法では入力計測値や出力の数値微分より入力推定精度が向上していることが分かる。

上記と同様のシミュレーションで出力ノイズの分散 V を変えて V^* を変化させ、推定誤差分散値の実測を行った結果を図3に+で表記する(フィ

ルタ過渡応答の終わった10ステップ以降の誤差分散を、同じ統計的性質を持つノイズ系列を用いた5個のデータでそれぞれ求め、その平均値を示す)。推定誤差がカルマンフィルタで計算される推定誤差分散値にほぼ一致していることが分かる。

4. 結 言

1入力1出力系においてシステム入力を推定する問題を、カルマンフィルタの枠組みで定式化した。

ここでの手法は、センサダイナミクスの影響を受けたセンサ出力信号を用いての、ノイズを含む元信号の平滑化などに有効と考えられる。

実データ処理に当たっては、カルマンフィルタに必要なノイズ分散値、初期状態推定値、同共分散値の決め方が重要となる。

連続システムの離散化手法の推定精度への影響の評価、多入力多出力系への拡張が今後の課題である。

参 考 文 献

- 1) 木村英紀；デジタル信号処理と制御(1982), 58, 産業図書.
- 2) 有本 卓；カルマンフィルタ, 71,(1978), 産業図書.

航空宇宙技術研究所報告1182号

平成4年11月発行

発行所 航空宇宙技術研究所
東京都調布市深大寺東町7丁目44番地1
電話三鷹(0422)47-5911(大代表)〒182

印刷所 株式会社三興印刷
東京都新宿区西早稲田2-1-18

Printed in Japan