

41 遠心力, コリオリ力, 浮力が同時に作用する管内流の特性

石垣 博* 望月宗和*

Combined Effects of Curvature, Rotation and Buoyancy on Flow and Heat Transfer in Rotating Heated Curved Pipes

Hiroshi ISHIGAKI and Munekazu MOCHIZUKI

National Aerospace Laboratory, Kakuda Research Center.

The fluid flowing in rotating heated curved pipes is subjected to three body forces: centrifugal, Coriolis and buoyant forces. Fully developed laminar flow in heated rotating coiled pipes is investigated through similarity arguments and computational studies. Similarity arguments for small and large buoyancy clarify that the characteristics of flow and heat transfer in loosely coiled, rotating heated pipes are governed by five parameters: the Dean number K_{LC} , a body force ratio F , the Rossby number Ro , the Prandtl number Pr and a buoyancy parameter B or a thermal parameter K_{LB} . Detailed structures of velocity and temperature fields are shown for wide range of these parameters. By using a composite parameter K_{LCR} , computed results on the friction factor and the Nusselt number are also shown for a wide parameter space.

1 緒言

回転体内部に流路を設け, 流体を流して冷却する回転機械の冷却問題では基本的に3つのモード, すなわち (I) 直流路が回転軸に平行な場合 (平行回転), (II) 直流路が回転軸に直交している場合 (直交回転), (III) 曲流路が曲率中心のまわりに回転している場合 (回転曲管), が重要である. 著者はこれらすべてのモードについて, 流れと熱伝達の特性を系統的に解明している. 本報告はモード (III) についてのものであり, 浮力が作用しない場合の流れ特性^{(1),(2)}と熱伝達特性⁽³⁾について既に報告した.

曲管がその曲率中心のまわりに一定角速度で回転するとき, 管内を流れる流体には管の曲率による遠心力, 管の回転による遠心力とコリオリ力が同時に作用する. さらにたとえば大形回転機械などでは回転による遠心力が 10^4g にも達するので, 管壁と流体のあいだに温度差があると遠心浮力の影響が顕著にあらわれる. このときには3種の体積力が同時に作用し, 流動伝熱特性はさらに複雑になる.

浮力が作用する回転曲管内層流についての研究として, かなり以前のMiyazakiの解析がある^{(4),(5)}. この解析は主流と回転が同方向の場合 (正回転) について, 差分法による数値解を求めたものであるが, 回転および浮力の効果がきわめて微弱な場合しか適用できず, また使用したパラメータ群も物理的に正しいものではない.

さてこの流れの体積力効果は曲率, 回転, 加熱の三つから成るから, 極限状態として静止曲管と回転直管

の二つの強制対流および平行回転直管の複合対流の合計三つの流れをもつ. このうち, 前二者については曲率パラメータ λ とロスビー数 Ro がともに大きい場合に定量的相似性 (アナロジー) が成立して等価であることを示した (層流については文献(6)–(9), 乱流については文献(10),(11)). 著者の回転曲管内流れの研究はこのアナロジーに基礎をおいている. また第三の極限である平行回転直管内複合対流の流動伝熱特性は文献(12)で明らかにした.

本研究では著者の相似理論を適用して標記の問題に対する相似パラメータを導いた⁽¹⁴⁾. その結果, この流れは λ と Ro が大きくてその影響が無視できれば, デーン数 K_{LC} , プラントル数 Pr , 体積力比 F および浮力パラメータ B あるいは熱パラメータ K_{LB} の四つのパラメータにより支配されることが明らかになった. 少なくとも4つのパラメータにより支配されるこの流れの全容は複雑・多岐にわたる. 遠心浮力が作用する回転曲管内複合対流の相似則の議論については既にまとめてあるので⁽¹⁴⁾, ここでは流動伝熱場の構造と実用的に重要な圧力損失と熱伝達について述べる. なお熱的境界条件は軸方向に熱流束一定, 周方向に壁温一定とする.

2. 主な記号

B	: 浮力パラメータ	$= K_{LB}^2 / (Pr K_{LC}^2)$
F	: 体積力比	$= \lambda / Ro$
K_{LB}	: 水平直管複合対流の層流特性数	$= \sqrt{Ra_H}$
K_{LC}	: 曲管の層流特性数 (デーン数)	$= Re / \sqrt{\lambda}$
Pr	: プラントル数	$= \nu / \alpha$

* 航空宇宙技術研究所角田宇宙推進技術研究センター

- Ra_H : 回転レイリー数 = $R\Omega^2 \beta q_w d^4 / (\nu k \alpha)$
- Re : 主流のレイノルズ数 = $w_m d / \nu$
- Ro : ロスピー数 = $w_m / \Omega d$
- β : 体積膨張係数
- λ : 曲率パラメータ = R/d

3. 基礎式と数値解法

図1に示すように、曲率中心まわりに回転する曲管に固定して円環座標系 (r, θ, ϕ) をとり、速度成分を (u, v, w) 、温度 T とする。曲管は $O'-y'$ 軸のまわりに一定の角速度 Ω で回転するものとし、回転方向が主流方向と同じ場合 ($\Omega > 0$) を正回転、逆の場合 ($\Omega < 0$) を逆回転と呼ぶ。一般に回転機械では回転半径が大きいので、 λ が十分に大きい ($\lambda \gtrsim 8$) と仮定すれば、管軸距離 $z = R\phi$ として円筒座標 (r, θ, z) に変換できる。曲管壁が管軸方向に熱流束一定、周方向に壁温一定の条件で加熱されているものとし、管内の流れは定常、非圧縮性層流で、速度場、温度場ともに完全に発達した状態にあるものとする。また Boussinesq 近似を導入して密度変化は浮力項でのみ考慮し、粘性係数などの物性値は一定と仮定、重力による浮力は無視する。

このとき加熱曲管内の完全発達層流の基礎方程式は次のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial r}(ru) + \frac{\partial}{\partial \theta}(v) = 0 \dots\dots\dots (1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial r} + \frac{w^2 \cos \theta}{R} + 2\Omega w \cos \theta + R\Omega^2 \beta (T_w - T) \cos \theta + \nu \left(\nabla^2 u - \frac{u}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \dots\dots\dots (2)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{uv}{r} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p^*}{\partial \theta} - \frac{w^2 \sin \theta}{R} - 2\Omega w \sin \theta + R\Omega^2 \beta (T_w - T) \sin \theta + \nu \left(\nabla^2 v - \frac{v}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \dots\dots\dots (3)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial z} - 2\Omega (u \cos \theta - v \sin \theta) + \nu \nabla^2 w \dots\dots\dots (4)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha \nabla^2 T \dots\dots\dots (5)$$

ここに ν は動粘性係数、 α は温度拡散係数であり、ラプラスアンは次式で与えられる。

$$\nabla^2 \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

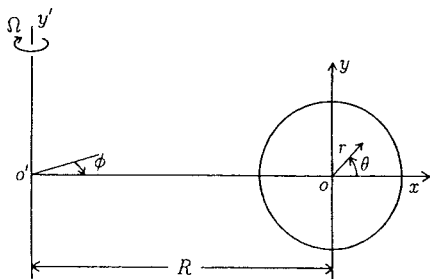


図1 回転曲管の座標系

また p^* は実際の圧力 p から回転遠心力場の作用による平衡圧力を引いた換算圧力である。

$$p^* = p - \frac{1}{2} \rho \Omega^2 (R + r \cos \theta)^2 \dots\dots\dots (6)$$

完全発達流では $\partial p / \partial z$ は一定となる。

$$-\frac{\partial p^*}{\partial z} = C \dots\dots\dots (6a)$$

さらに軸方向熱流束一定で加熱したときの温度場の完全発達条件より

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{dT_b}{dz} = \frac{4q_w}{\rho c_p w_m d} \dots\dots\dots (6b)$$

の関係がある。ここに ρ は密度、 c_p は比熱、 T_b は混合平均温度、 q_w は壁熱流束、 w_m は管内平均流速である。

計算は全管断面について行い、境界条件を次のように与えた。

$$r = d/2 : u = v = w = 0, T = T_w,$$

しかし計算結果の等高線はすべて x 軸に関して対称であったので、§5の等高線は半断面のみについて示してある。数値計算プログラムは Patanker の著書⁽¹⁵⁾を参考にして作成したもので、著者らの一連の研究に用いているものである。有限体積法、スタガード格子、ベキ乗スキーム、SIMPLE法によっている。速度場、温度場ともに発達している場のエネルギー式の計算方法は Kays & Crawford の著書⁽¹⁶⁾を参考にした。格子点は r 方向32、 θ 方向53点を取り、 θ 方向はほぼ等間隔、 r 方向は壁近傍で密な不等間隔にとった。

4. 流動伝熱場の相似性

緒言でも述べたように、この流れは三つの流れを極限としてもつので、三通りの無次元化が可能である。このうち曲管流と直交回転管内流のあいだには $\lambda, Ro \gg 1$ のときにアナロジーが成立するので、この場合には実質的には二つと考えてよい。

浮力が小さいときを想定して曲管内流れを基準にとれば、 B が小さいときの無次元基礎式が得られる。浮力パラメータ $B = K_{LB}^2 / (Pr K_{LC}^2)$ は流体にはたらく浮力と遠心力の比をあらわし、 $B \rightarrow 0$ とおけば回転曲管内強制対流の無次元式となる。 $B = 0$ のときの速度場は温度場から独立で、 Pr に無関係であり、軸速度場のパターンは K_{LC} のみによって決まる。温度場は Pr によって大きく異なり、(i) $Pr \ll 1$ のときは二次流れのない直管強制対流場に相似、(ii) $Pr \approx 1$ のときは軸速度場に相似、(iii) $Pr \gg 1$ のときは二次流線 ψ に相似となる。

つぎに他方の極限である平行回転直管内複合対流を基準にとれば、 B が大きいときの無次元基礎式が得られる。この式で $B \rightarrow \infty$ にすれば平行回転直管内複合対流の無次元式となる。この流れでは速度場ではなく温度場が Pr に独立になる。 Pr の影響は速度場に大きくあらわれ、速度場 \bar{w} のパターンは (i) $Pr \ll 1$ のときには二次流線 ψ に相似、(ii) $Pr \approx 1$ のときには温度場に相似、(iii) $Pr \gg 1$ のときには二次流れのない直管強制対流のポワズイユ分布に相似となる。

浮力が作用する曲管内の流動伝熱特性は上に述べた二つの極限の中間状態になり、 B の値を増加させると $B = 0$ の特性から $B = \infty$ の特性へと変化していく。したがって K_{LC}, F を一定にとり B を増加させると軸速度と温度場のパターンは次のように変化する。(i) $Pr \ll 1$ では軸速度場は K_{LC} の値により決まるパターン (K_{LC} が小さければ粘性流型、 K_{LC} が大きければ境界層型) から ψ に相似なパターンへと変化する。温度場は直管強制対流場の分布から $K_{LB} = K_{LC} \sqrt{Pr B}$ より決まるパターンに移行する。(ii) $Pr \approx 1$ で

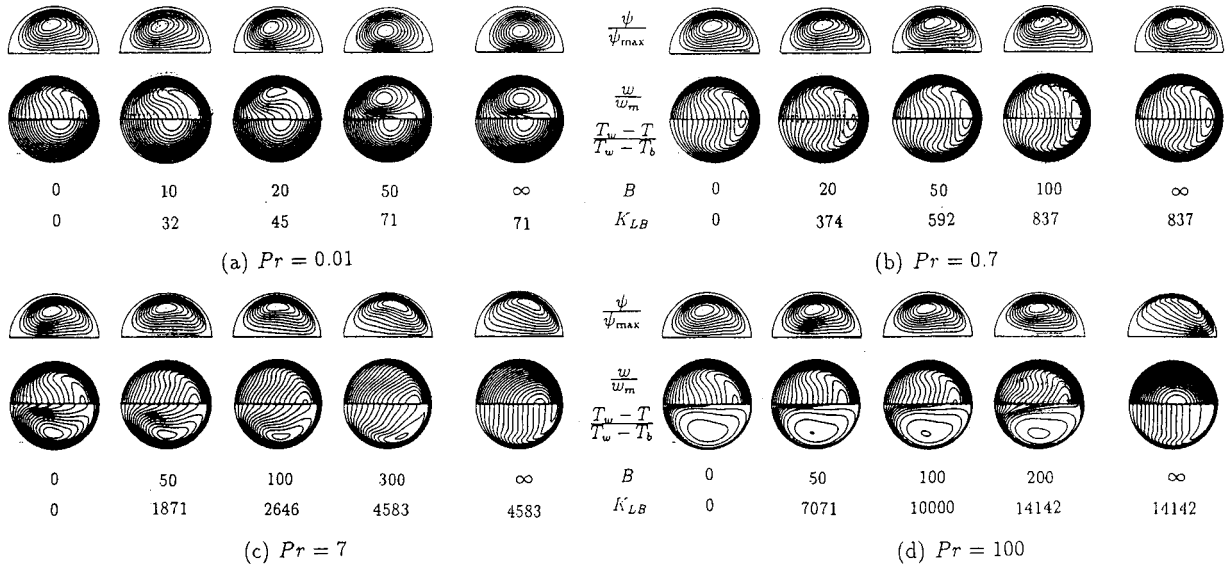


図2 浮力パラメータ B による等高線の変化 ($K_{LC} = 100, F = 2, \lambda = 20$)

は軸速度と温度場は常に相似である, (iii) $Pr \gg 1$ では軸速度場は K_{LC} によって決まるパターンからポワズイユ流れのパターンに変化し, 温度場は ψ に相似なパターンから K_{LB} によって決まるパターンに移行する.

5. 速度場と温度場の基本構造

浮力パラメータ B による流動伝熱場の構造変化の例として正回転 ($F > 0$) の計算結果を示す. 図2 (a) - (d) は $K_{LC} = 50, F = 2, \lambda = 20$ に固定し, $Pr = 0.01, 0.7, 7, 100$ の4種の流体について, 軸速度 w , 二次流線 ψ , 温度 T の無次元等高線分布が B の増加とともにどのように変化するかを示したものである. 左端の $B = 0$ は回転曲管内強制対流を示し, w 分布は $K_{LC} = 100$ で決まるパターン (粘性流形) をとり, Pr によって変化しない. 他方 T の分布は $Pr = 0.01$ では放物面分布, $Pr = 0.7$ では w 分布と相似, $Pr = 100$ では2ヶ所に極値をもつ ψ に類似した分布になっている.

参考のため右端には水平直管複合対流 ($B \rightarrow \infty$) の分布を示した. このときの K_{LB} はその隣の分布と同じ値を与えているので, 同一条件における直管 ($\lambda \rightarrow \infty$) の分布に相当する. このとき T 分布は K_{LB} の値によって決まるパターンをとり, Pr にはほとんど関係ない. 他方, w の分布は前節で述べたように $Pr = 0.01$ では $\psi, Pr = 0.7$ では $T, Pr = 100$ では放物面分布にそれぞれ相似になっている.

B の有限値の分布を見る. $F > 0$ のこの場合には管曲率による遠心力, 回転によるコリオリ力および加熱による遠心浮力が同一方向 (x 方向) にはたらき, 3種の二次流れの方向が同じになって重畳されるので, 二次流れの逆転現象は起きない. $Pr = 0.01$ の場合の w 分布の変遷を見ると, \bar{w} は $K_{LC} = 100$ の一つの極値が分岐して極大値が二つのパターンになり, $B \rightarrow \infty$ の流線に相似なパターンに漸近する. また T は放物面分布から, $K_{LB} = 71$ の値で決まるパターンに漸近していく.

$Pr = 0.7$ の場合には, w と T のパターンはつねにたがいの相似性を保持しながら変化し, 分布の様相も K_{LC} で規定されるパターンから K_{LB} で規定されるパターンへと変化していく. $Pr = 7, 100$ の場合には $Pr = 0.01$ の w とは逆に, B が増加するにつれて T 分布の2つの極値が一つに縮退する現象がおきる. $Pr = 100$ では K_{LB} が非常に大きな値になっても, 極限形の対称パターンにはなかなか近づかない. またこれ以上

の大きな K_{LB} の値では, 数値計算が不安定となって収束解が得にくくなる. 現実にも K_{LB} の値が非常に大きくなれば, 層流状態が維持できず, 非定常あるいは乱流状態になると思われる. 逆回転 ($F < 0$) の場合の計算結果については文献(13)を見て頂きたい.

6. 管摩擦係数と平均ヌッセルト数

工学的には管摩擦係数 f とヌッセルト数 Nu が最も重要である. これらの全体的挙動をみるために, 図3(a),(b)に $Pr = 0.7, K_{LC} = 141.4$ の場合の計算結果

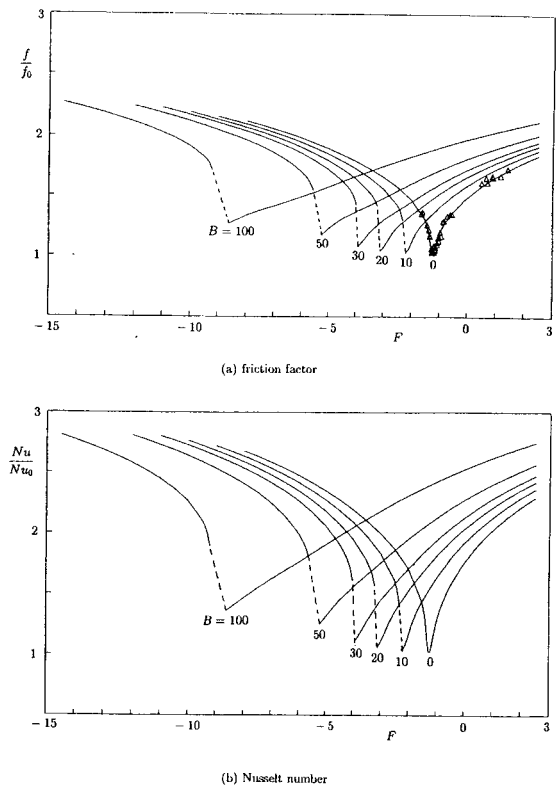


図3 F と B による摩擦係数 f とヌッセルト数 Nu の変化 ($Pr = 0.7, K_{LC} = 141.4, \lambda = 100$). Δ : $B = 0$ の実験データ

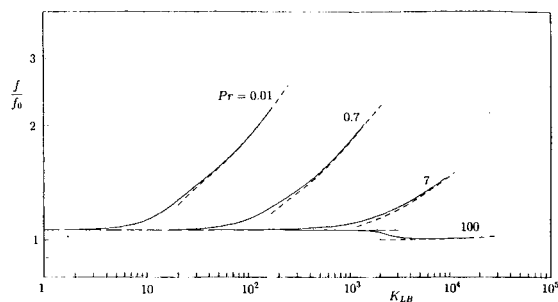
を示す。 $B = 0$ の場合について説明すると、遠心力とコリオリ力によるふたつの二次流れ渦は $F > 0$ では同方向、 $F < 0$ では反対方向である。 $F \cong -1$ では強さが等しく方向反対のふたつの渦が共存し、軸速度に及ぼす効果は相殺して軸速度は二次流れのないポアズイユ分布になる。そのため f, Nu は二次流れのない静止直管流の f, Nu に等しくなり、 f と Nu 曲線の最小値となる。 $B = 0$ の計算結果は既存の実験データとよく一致していることがわかる。

管が加熱されると、浮力による二次流れが加わって同方向の遠心力二次流れを励起し、コリオリ力二次流れを正回転では励起、負回転では減衰させる。 B が増加すると、 f と Nu の最小値は F の負方向に移動する。図中の点線で示した範囲は逆方向に流れる3種の二次流れが存在する領域で、ここでは数値計算が不安定となって定常解が得られなかった。図3の場合には $Pr = 0.7$ なので f と Nu の曲線は相似であるが、 $Pr \gg 1$ あるいは $Pr \ll 1$ では両者はまったく異なった曲線形状になる(図省略)。

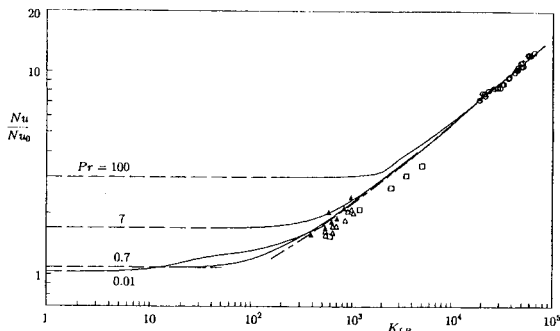
次に熱パラメーター K_{LB} で整理した結果を図4に示す。図中の破線は $B = 0$ の計算結果、 f の点線は浮力のみでの計算結果、 Nu の一点鎖線は浮力のみが作用する平行回転円管の計算結果から導いた次のような半経験式である⁽¹²⁾。

$$Nu_B / Nu_0 = 0.0404 \sqrt{K_{LB}} (1 + 6.71 K_{LB}^{-0.316}) \dots (7)$$

上式は Pr に無関係であるが、図中に示した Pr の大きく異なる空気 ($Pr = 0.7$)、水 ($Pr \approx 7 \sim 10$)、エチレングリコール ($Pr \approx 100$) の既存実験データはこの式にしたがっている。これらの図から f は K_{LB} の小さいところでは Pr に無関係、大きいところでは Pr に関係すること、逆に Nu は K_{LB} の小さいところでは Pr に関係し大きいところでは無関係になって式(7)に漸近することがわかる。



(a) friction factor



(b) Nusselt number

図4 K_{LB} による摩擦係数 f とヌッセルト数 Nu の変化 ($K_{LC} = 20, F = 2, \lambda = 100$)。実験データ; 水平円管 (Δ : 空気, \square : 水, \circ : エチレングリコール), 平行回転円管 (\blacktriangle : 空気)

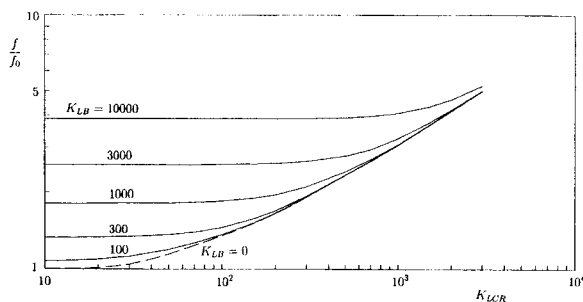
文献(1)-(3)では K_{LC} と F を一つにまとめた次のような無次元数 K_{LCR} を使用すれば、浮力が作用しない回転曲管内層流強制対流の f と Nu の広範囲の計算結果、実験値がよく整理できることを示した。

$$\left. \begin{aligned} K_{LCR} &= K_{LC} \sqrt{F+1}, & (F > -0.8) \\ &= K_{LC} \sqrt{|F|-1}, & (F < -1.3) \end{aligned} \right\} \dots (8)$$

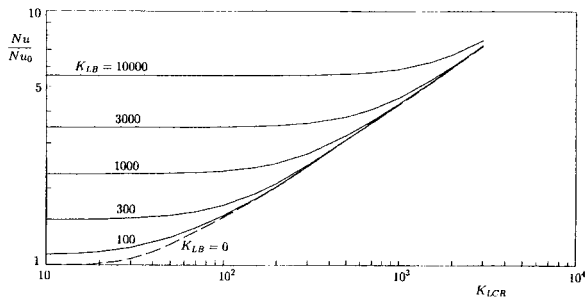
浮力が作用する場合も K_{LC} を使用すれば種々の K_{LC} と F の組合せは一本の曲線にまとまる(図省略)。 K_{LC} を用いて整理した浮力が作用する場合の f と Nu の計算結果の一例を図5(a)(b)に示す。

引用文献

- (1) 石垣, 機論, 58-561, B, (1993), 1494-1591.
- (2) Ishigaki, H. J. Fluid Mech. 329 (1996), 373-388.
- (3) Ishigaki, H., JSME Int. J., 42-B (1999), 489-497.
- (4) Miyazaki, H., Int. J. Heat Mass Transfer, 14(1971), 1295-1309.
- (5) Miyazaki, H.; Trans. ASME, J. Heat Transfer, 95 (1973), 64-71.
- (6) Ishigaki, H., J. Fluid Mech. 268 (1994), 133-145.
- (7) Ishigaki, H., JSME Int. J., 42-B (1999), 48-55.
- (8) Ishigaki, H., JSME Int. J., 42-B (1999), 197-205.
- (9) Ishigaki, H., Heat Transfer Asian Research., 29 (2000), 512-522.
- (10) 石垣, 機論, 60-576, B (1994), 2736-2741.
- (11) Ishigaki, H., J. Fluid Mech. 307 (1996), 1.
- (12) Ishigaki, H., JSME Int. J., 40-B (1997), 273-280.
- (13) 石垣, 機論, 63-609, B (1997), 1541-1546.
- (14) Patankar, S. V., Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, (1980), 113-137, Hemisphere.
- (15) Kays, W. M. & Crawford, M. E., Convective Heat and Mass Transfer 2nd ed. (1980), 90-98.



(a) friction factor



(b) Nusselt number

図5 $Pr = 0.7$ の摩擦係数 f とヌッセルト数 Nu (正回転, $\lambda, Ro > 8$)