

No.6

# TS波型とTransient Growth型の 乱流遷移について

## Laminar Turbulent Transitions in TS and Transient Growth Type

○高橋 直也 (電通大), 山本 稀義 (航技研)

Naoya TAKAHASHI\* and Kiyoshi YAMAMOTO\*\*

\*Dep. Mech. Eng. and Intelligent Systems, Univ. of Electro-Commun.,  
Chofu, Tokyo, 182-8585, Japan,

\*\* National Aerospace Laboratory, Chofu, Tokyo, 182-8555, Japan

We analyse transition mechanism and visualize vortical structure in the transition regions of wall turbulence directly simulated on a parallel-super computer. The simulation started with a initial flow given as the basic flow plus small disturbances. When the simulation starts with a smaller disturbance amplitude than the threshold value, the transition is induced by the well-known Tollmien-Schlichting wave instability. In this case,  $\Lambda$  vortices induced by the nonlinear mechanism appear and produce peak-valley structures on the Tollmien-Schlichting wave, which have been observed in the experiments. On the other case starting with a large disturbance amplitude than the threshold value, transient growth of streamwise vortices becomes to be dominant. Then, the amplified streamwise vortices collapse to three-dimensional vortices by the nonlinear mechanism.

### 1 はじめに

壁乱流の層流・乱流遷移過程の初期値依存性の解明は、遷移予測における重要な基礎の一つである。乱流遷移において指数関数型の線形増幅が主要な役割を司る場合、その遷移過程に対しては多くのことが解明されてきた。しかしながらこれらの結果は、指数関数型遷移がバイパスされてしまうような場合に対しては適用できない。このような遷移は実用上重要な初期攪乱振幅が大きい場合にも発生することがわかってきた。このとき攪乱は代数関数的に増幅され、発達の初期段階から3次元化過程が進行している事が指摘されている。このような成長は Transient Growth (TRG と略称) と呼ばれている [6]。

遷移過程の初期値依存性に関する研究は、境界条件の取扱いが比較的容易であるため、多くがチャンネル流に関してなされている。Henningson ら [2] により固有ベクトル展開法を用いて理論研究が行われ、レイノルズ数無限大の極限の場合の代数関数的な増幅の理論づけがなされた。一方遷移過程の初期値依存性について、Reddy ら [5] が直接数値計算によって研究がなされたが、初期条件

は渦構造を意識した特殊な物である。

そこで我々は初期条件をより現実的な3次元ノイズによって与え、遷移過程の初期値依存性について、チャンネル流の直接数値計算による解析を行った。また同様の解析を平行流近似した平板境界層に対しても行い、境界条件の遷移過程への依存性を調べた。また、これらの遷移過程の力学機構を明らかにするため、流れ場の渦構造を可視化した。

### 2 計算方法

#### 2.1 基礎方程式

壁面に沿って流れる剪断流を調べる目的で、二種類の境界条件下で直接数値計算 (DNS) を行なう。一つはチャンネル流であり、もう一つは平行流近似を行った平板境界層である。

DNS は、非圧縮条件のもとで Navier-Stokes 方程式を数値的に解いている。壁に垂直 ( $z$ ) 方向の計算には Chebyshev 選点法を用い、流れ方向 ( $x$ ) およびスパン方向 ( $y$ ) には取扱いを単純にするために周期的境界条件を適用する。流れ場 (圧力場) は  $x$  成分の主流成分  $U(z)(P(z))$  と攪乱成分  $\mathbf{v}(\mathbf{x})(p(\mathbf{x}))$  に

分解して取り扱う;

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + U \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} + \mathbf{v} \cdot \frac{dU}{dz} = -\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v}. \quad (2)$$

ここで  $U(z)$  は平均流速であり、チャネル流ではポアズイユ流を、平板境界層流ではブラジウス流を用いている。

周期的境界条件を  $x, y$  方向に適用しているため、速度場は

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \sum_{k_x, k_y} \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k}, z, t) \exp(ik_x x + ik_y y) \quad (3)$$

のように波数  $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$  についてフーリエ級数展開することが可能になる。このことから  $x, y$  方向についてはフーリエ・スペクトル法 [1] を適用する。また  $z$  方向についてはチェビシェフ選点法を適用し、非圧縮性を満たすために Influence Matrix 法を用いた。

計算はすべて科学技術庁航空宇宙技術研究所の数値風洞を用いて行なわれた。

## 2.2 エネルギーノルムと初期条件

各モードのエネルギーノルムは流れ方向およびスパン方向にフーリエ変換した速度場  $\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k})$  を用いて

$$E(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{L_z} \int_{L_z} |\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k}, z, t)|^2 dz \quad (4)$$

と定義する。ここで  $L_z$  は  $z$  方向の計算領域全体を表す。

これらを用いて、初期条件を次のように定義する。初期攪乱  $\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k}, z)$  に対して、振幅  $A_{3D}$ 、エネルギーを与える最大波数  $k_{lim}$  を任意パラメタとする。初期攪乱  $\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k}, z)$  の速度分布は境界層にエネルギーが注入されるように  $U'''(z)$  に比例させ、また  $A_{3D}^2 = E(\mathbf{k}, 0)$  となるように初期攪乱振幅を与える。一方エネルギーを与える最大波数を  $k \leq k_{lim}$  までに制限する。

$$E(k_x, k_y) = \begin{cases} \varepsilon^2 & \text{for } |k_x|, |k_y| \leq 10k_{TS}, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (5)$$

ここで  $\varepsilon$  は励起されたモードの振幅を表す。このような速度場が非圧縮性と境界条件を満たすよう、直交関数を用いて正規化する [3]。

## 3 計算結果

渦構造を探るため、平板境界層における渦度  $|\omega|^2$  の等値面の可視化結果を以下に示す。ここでの結果は渦度の rms 値にて正規化されている。

### 3.1 TS 波型遷移

指数関数型の線形増幅が乱流遷移において支配的に振舞う場合を図 1 に示す。図 1a はエネルギーノルム (式 (4)) の時間変化であり、図 1b はその時の特徴的な渦構造 ( $\Lambda$  渦) である。

図 1a において、線形安定性理論によって予測される二次元波 (Tollmien-Schlichting 波) に対応するモードが指数関数的に増幅され、それに対応する高調波が励起されていく ( $t \leq 4000$ )。発達に伴いこのモードはスパン方向に不安定性を生じ、Peak-Valley 構造を形成する。その後 3 次元化が促進されて  $\Lambda$  渦を形成し (図 1b)、更にその先端部が上昇、それと同時に渦構造は引き延ばされ、やがて崩壊する。これにより流れ場の全てのモードが一度に励起され、乱流へと遷移する過程が観測された。

### 3.2 TRG 型遷移

Transient Growth は有限時間しか増幅が行われなため、これによって場の 3 次元化がなされるためには初期攪乱振幅が十分大きくなければならない。このような遷移過程におけるエネルギーノルム (4) の時間変化を図 2a に、特徴的な渦構造を図 2 に示す。

発達の初期段階においては流れ方向の渦の Transient Growth が生じ、これにより初期の乱雑な状態からストリーク状の渦構造を形成する (図 2b)。この構造はしばらく安定に維持された後、3 次元的な不安定性が生じ、ストリーク構造が崩壊する (図 2b)。これが場全体に広がり、乱流へと遷移した。

### 3.3 遷移過程の初期値依存性

層流-乱流遷移過程の初期条件依存性およびレイノルズ数  $Re$  依存性を調べるため、さまざまな初期攪乱振幅  $\varepsilon$  を持つ初期条件 (5) を用いて DNS を行った。

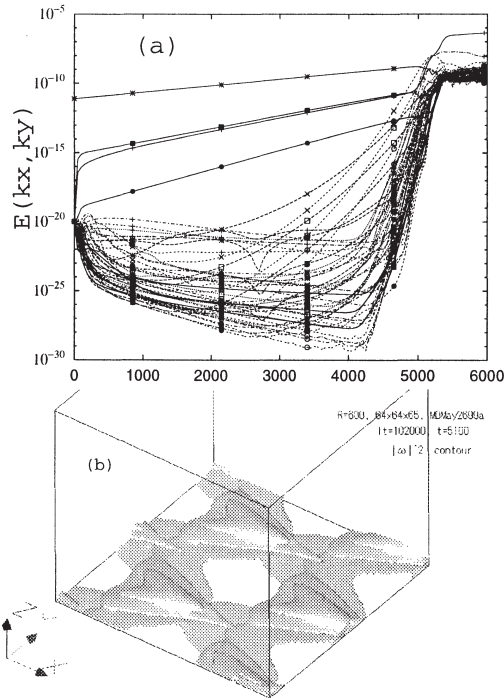


Fig. 1: (a) Time evolution of dominant Fourier modes in the TS type transition of boundary layer for  $R = 600$ . An initial disturbances flow is given as a large 2D TS wave plus 3D small disturbances. solid lines denote 2D modes and dashed lines 3D modes (b) Contour surfaces of enstrophy obtained in a secondary instability period at  $t=5100$ .

図3はチャンネル流に対して行った結果であり、TRG過程による遷移の有無を、攪乱振幅の二乗  $\varepsilon^2 = E(k_x, k_y)$  とレイノルズ数について調べたものである。この図において●はTRG過程によって遷移が行われたことを示し、○はそのような遷移が行われなかったことを示す。

この図より、遷移過程を分ける初期条件の閾値の二乗  $\varepsilon_0^2 = E(k_x, k_y)$  は Reynolds 数  $Re$  の冪  $Re^{-7/2}$  によって分けられることがわかる。この結果は、同じチャンネル流のDNSで、理想的な初期条件を用いた Lundbradhet *al.*[4] の場合 (図の△に対応) とよく一致する。

一方同様の実験を、平板境界層の場合において行った結果を図4に示す。ここでは攪乱振幅の二乗  $\varepsilon^2 = E(0)$  と排除厚さに基づくレイノルズ数  $Re$  について調べたものである。図において□は Transient Growth 過程

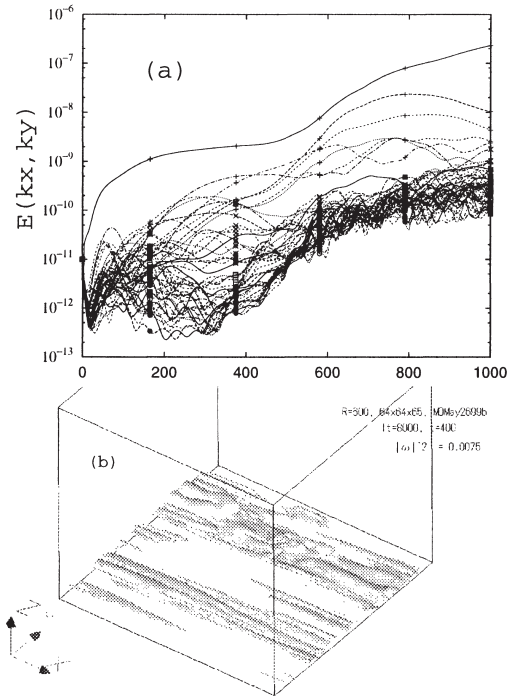


Fig. 2: (a) Time evolution of dominant Fourier modes in the transition of boundary layer for  $R = 600$ . An initial disturbances flow is given as 3D small disturbances. (b) Contour surfaces of enstrophy obtained at  $t = 400$ .

によって乱流遷移がなされ、\*はTRG過程によっては遷移がなされなかった事を示す。この場合もチャンネル流の場合と同じく、遷移過程としてTRG過程が選択されるようになる攪乱振幅の閾値  $\varepsilon_0$  はレイノルズ数  $Re$  の冪に依存することがわかった。その冪はこの図の場合、 $\varepsilon_0^2 \propto Re^{-3 \sim -4}$  にあることがわかる。

## 4 むすび

層流・乱流遷移過程の初期値依存性を調べるため、我々はチャンネル流および平行流近似下の平板境界層の直接数値計算を行った。遷移過程は初期攪乱振幅  $\varepsilon$  に依存してTS型とTRG型とに分けられ、それぞれの特徴的な渦構造を捉える事ができた。

TS型遷移では2次元から3次元構造へと遷移する過程が可視化され、実験的に報告されている Peak-Valley 構造や  $\Lambda$  渦が計算によっても再現された。

一方 TRG 型遷移においては Transient Growth によって流れ方向の渦が励起され、

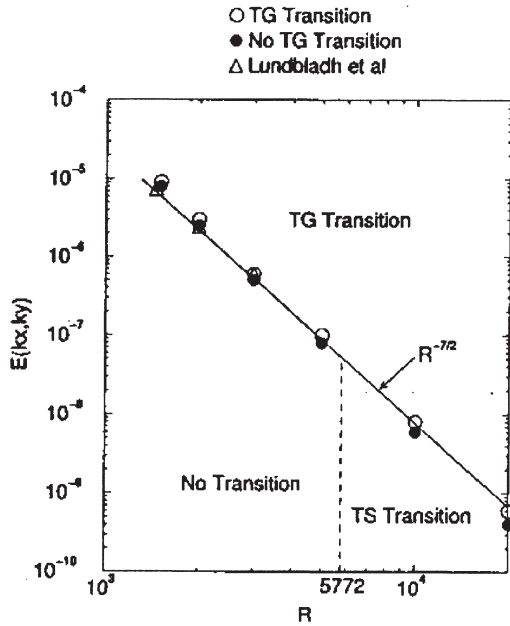


Fig. 3: Mode energies of Initial disturbances which can induce the TRG type transition in channel flows

その3次元化が層流・乱流遷移において重要な役割を司る事がわかった。

またこれらどちらかの遷移過程が選択される初期条件振幅の閾値  $\varepsilon_0$  は、レイノルズ数  $Re$  の冪に比例する事が分かった。この特徴はチャンネル流、平板境界層の両方で共通である。またその冪は、チャンネル流で  $\varepsilon_0^2 \propto Re^{-7/2}$ 、平板境界層で  $\varepsilon_0^2 \propto Re^{-3 \sim -4}$  であることがわかった。

## 参考文献

- [1] C. Canuto, M. Y. Hussaini, A. Quarteroni, and T. A. Zang. *Spectral Methods in Fluid Dynamics*. Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [2] D. S. Henningson and P. J. Schmid. Vector eigenfunction expansions for plane channel flows. *Stud. Appl. Math.*, 87:15–43, 1992.
- [3] I. Hosokawa and K. Yamamoto. On direct numerical simulation of incompressible shear-flow turbulences by the Fourier-Spectral method. *J. Phys. Soc. Japan*, 55(3):1030–1031, March 1986.

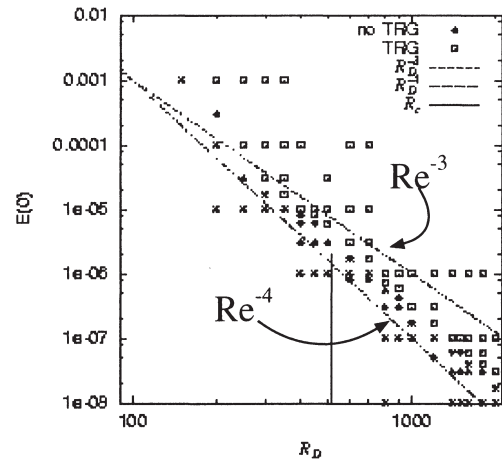


Fig. 4: Mode energies of Initial disturbances which can induce the TRG type transition in boundary layers.

- [4] A. Lundbladh, P. J. Schmid, S. Berlin, and D. S. Henningson. Simulations of bypass transition for spatially evolving disturbances. In B. Cantwell, J. Jiménes, and S. Lekoudis eds., *Application of Direct and Large Eddy simulation to transition and turbulence*, No. 551 in AGARD conference proceedings, Neuilly-sur-seine, France, April 1994. Advisory Group for Aerospace Research & Development.
- [5] S. C. Reddy, P. J. Schmid, J. S. Baggett, and D. S. Henningson. On stability of streamwise streaks and transition thresholds in plane channel flows. *J. Fluid Mech.*, 365:269–303, 1998.
- [6] L. N. Trefethen, A. E. Trefethen, S. C. Reddy, and T. A. Driscoll. Hydrodynamic stability without eigenvalues. *Science*, 261:578–584, 1993.