

三次元翼間の非粘性圧縮性流れの数値計算

福田 正大

Numerical Simulation of Inviscid Compressible Flow through Three-Dimensional Cascade

By Masahiro Fukuda

National Aerospace Laboratory

ABSTRACT

The steady inviscid compressible flow through a three-dimensional cascade is computed by Denton's original Time-Dependent Finite Volume Method. We are developing a research code, working code, and production code in order to analyze three-dimensional cascade flows. The present paper is concerned with the numerical results obtained during the course of development, adopting the RD-blade⁽²⁾ for a test case. Two types of evaluation of flux vector through up and down stream surface of the integral domain are compared.

In the steady state, the computed Mach number shows good agreement with the experimental isentropic one, except near both leading and trailing edges on the suction surface, although computed isentropic Mach numbers differ somewhat from those obtained in experiments on the fore part of the compression surface. This is caused by computed total pressure variation resulting from low static pressure on the compression surface. In the case of our two-dimensional computations based on McDonald's Finite Area Method, such difference resulted from somewhat inaccurate density. This problem has almost been overcome by the research of Nishimura et. al.¹⁵⁾ In the three-dimensional case, it is expected that his approach is also applicable to overcome present difficulties.

1. 緒 言

航空機の運航経費節減を目的とする技術改良・開発の一つの大きな対象として、航空機エンジンの効率改善がある。航空機は一大総合システムであるが、航空機エンジンそのものも一つのシステムである。従ってその技術改良・開発もまた材料、構造、空

力性能、燃焼技術、燃料等多岐にわたり総合的に行なわれるべきものである。そこで達成される効率改善は1%未満から数%のものまで種々様々である。さらに飛躍的な効率改善を図るには革新的な設計概念も要求されるであろう。

計算機のハードウェア費用の相対的低下と実験費用の増大とを考えると、これらの改良・開発の中に占める数値シミュレーション技術の位置は年々その重要性を増しているといえる。総合的な改良・開

発を支える実験的要素技術が広汎にわたっていることに対応して、数値シミュレーションの要素技術もこれらに対応していく必要がある。航技研においても空力性能、熱伝達、燃焼、エンジンのダイナミックシミュレーション等の数値シミュレーション技術の開発が進められている。本稿では空力性能の数値シミュレーションのうち、三次元翼間の圧縮性非粘性流れの計算について報告する。

翼間流れの数値シミュレーションが対象とするエンジン要素はファン、圧縮機、タービンであり特殊な応用としてプロップファンのプロペラなども考えられる。またそれらは必ずしも航空機エンジンに限らず、発電用タービン等応用範囲の広いものである。この部分の三次元圧縮性非粘性流の解析には、オイラー方程式に差分法^{1),2),3)}あるいは有限体積法(FVM)^{4)~9)}を適用することがよく行われている。筆者らはすでに二次元翼間流れの解析コードとして有限面積法(FAM)によるコードを完成し検証計算を進めており¹⁰⁾、その延長としてFVMによるコードを開発することにした。

FVM(FAM)においては積分領域をどうとるかということが一つの問題点である。筆者らのFAMコードではMc Donaldの提案になる六角形領域を採用したが、これを三次元に拡張することは必ずしも直截的でなく、複雑さを増すだけである。このためDentonはより単純で三次元への拡張も容易な積分領域を提案した⁴⁾。この方法は、コーディングするに単純でありまた「丈夫さ」にも優れており、多くの実用計算がなされている。このことは汎用ソフトウェアの解法として好ましいことである。そこでこの積分領域を回転円柱座標で表現されたオイラー方程式に適用して、三次元翼間流れの数値計算を行った。計算は、i) FJR 710/600ターボファンエンジンの低圧タービンの平均径断面に相当する二次元翼¹¹⁾、ii) 航技研原動機部で設計された圧縮機の入口案内翼と第一段動翼、iii) 高圧タービンの動翼を模擬したRD-blade¹²⁾、の三つについて行った。ここではiii)の結果について報告する(i), ii)は[13])。

2. 記号

r ; 比熱比

t ; 時間

r, θ, z ; 円柱座標

p ; 圧力

ρ ; 密度

T ; 温度

u_r, u_θ, u_z ; r, θ, z 方向の相対速度

\vec{q} ; 相対速度ベクトル, $\vec{q}^T = (u_r, u_\theta, u_z)$

E ; 全エネルギー

H ; 全エンタルピー

R_0 ; ロータルピー

M ; マッハ数

ω ; 角速度

V ; 積分領域

$|V|$; V の体積

A_r, A_θ, A_z ; 法線方向の面積要素の成分

3. 基礎方程式と境界条件

ここで求めようとしているのは、翼間流を対象とした三次元オイラー方程式の定常数値解である。定常解を求める方法として、時間に依存する微分方程式を用いる方法と時間に依存しない微分方程式を用いる方法との二種類がある。前者の方法では、時間変数 t が十分大きくなるまで計算して、定常状態に達したところの解を定常解とする。ここではこの時間依存型の微分方程式による方法を用いる。

実際の圧縮機やタービン、ファンの計算を行なうには方程式系を円柱座標で表現しておくのが便利である。また動翼の計算を行なうことを考慮に入れるなら、相対速度ベクトルによる表現が好ましい。これらで三次元オイラー方程式を表わすと

$$\frac{\partial \vec{\phi}}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \vec{F}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{G}}{\partial \theta} + \frac{\partial \vec{H}}{\partial z} = \vec{K} \quad (1)$$

$$\vec{\phi} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_r \\ r \rho u_\theta \\ \rho u_z \\ \rho E_r \end{pmatrix} \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} \rho u_r \\ \rho u_r^2 + p \\ r \rho u_r u_\theta \\ \rho u_r u_z \\ \rho u_r R_0 \end{pmatrix} \quad \vec{G} = \begin{pmatrix} \rho u_\theta \\ \rho u_\theta u_r \\ r \rho u_\theta^2 + r p \\ \rho u_\theta u_z \\ \rho u_\theta R_0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{H} = \begin{pmatrix} \rho u_z \\ \rho u_z u_r \\ r \rho u_z u_\theta \\ \rho u_z^2 + p \\ \rho u_z R_0 \end{pmatrix} \quad \vec{K} = \begin{pmatrix} 0 \\ p/r + \rho(u_\theta + r\omega)^2/r \\ -2r\omega\rho u_r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} E_r &= E - r\omega(u_\theta + r\omega) \\ R_0 &= H - r\omega(u_\theta + r\omega) \\ p &= (r-1) \{ \rho E_r - \rho(q^2 - r^2\omega^2)/2 \} \\ q^2 &= u_r^2 + u_\theta^2 + u_z^2 \end{aligned}$$

である。回転していない場合 ($\omega=0$) には、定常状態という仮定の下で前記方程式系は流線に沿って全温度 $T_t = T(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2)$ が一定という積分を有する。従って無限上流で流線によらず全温度が一定であれば、それは全領域で一定となる(閉じた流線は考えない)。ここでは定常状態の数値解を求めようとしているから、静翼あるいは回転数が零の動翼を計算対象とする場合、入口断面で全温度が一定であればエネルギーの方程式の代わりにこの代数式を使うことも可能である。

境界条件は二次元計算の場合とほとんど同じであり、出口で静圧 p_{ex} を与え、入口で全温度 $T_{t,in}$ 、全圧力 $P_{t,in}$ 、各面内での流入角 θ_{in} を与え、さらに擬似流線方向を S としたとき $\frac{\partial u_r}{\partial S} = 0$ を追加する。ここで入口の全温度、全圧力の値は半径方向に必ずしも一定である必要はない。入口の全温度が半径方向に一定でない場合には基礎方程式としてエネルギーの式を用いることになる。また出口静圧の半径方向への変化は、半径方向の釣合い条件により求める。剛体壁上の境界条件に関しては、相対速度ベクトルを使っているの、剛体壁に垂直な方向への流れがないというスリップ条件を用いる。

4. 数値計算法

有限体積法 (FVM)

(1)式の空間微分の項は円柱座標での発散形式であるので、これを領域 V で積分すると

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \vec{\phi} r dr d\theta dz + \iint_S (\vec{F} r d\theta dz + \vec{G} dz dr + \vec{H} r dr d\theta) = \iint_V \vec{K} r dr d\theta dz \quad (2)$$

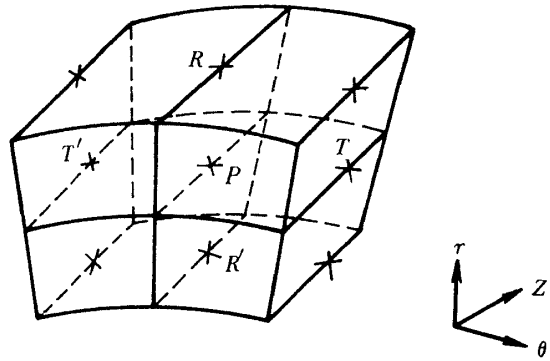


図1 積分領域

×は変量が定義されている節点

となる。領域 V として図1のような微小六面体を取り、時間微分を差分で置き換え、近似積分することにより、

$$\Delta\vec{\phi} \cdot |V| + \Delta t \sum_{i=1}^6 (\vec{F}_i A_{r_i} + \vec{G}_i A_{\theta_i} + \vec{H}_i A_{z_i}) = \Delta t \vec{K} |V| \quad (3)$$

が得られる。ここで ϕ および K の値は点 P で評価する。各面を通過するフラックスの計算は以下のようにする。 r 方向および θ 方向の面に関しては、その面内の点である R, R', T, T' で値を使う。 z 方向の面についてはその面内に値をもつ節点が存在しないので、何らかの形の内挿法を使う。このとき、運動量に関しては上流に、圧力については下流に偏った点を使う⁴⁾ 本報告では $i-1$ 面を通過するフラックスの計算法として(図2)、i) 運動量は $i-1$ 点での値を、圧力は i 点での値を使う方法、ii) 運動量は $i-2, i-1, i$ 点を使い、圧力は $i-1, i, i+1$ 点を使う二次式から計算する方法、の二通りの方法

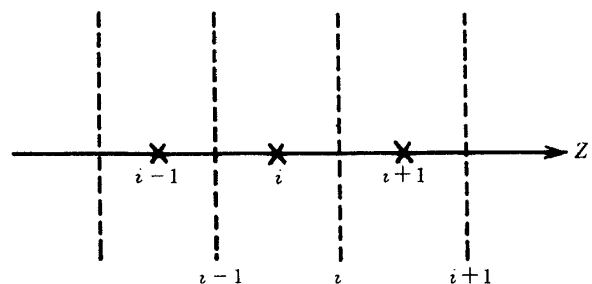


図2 z方向フラックスの計算

---- 格子線
 $i-1$ 面を通過する運動量 $i-1$ 点の値
 " 圧力 i 点 "

について比較計算を行った。 r 方向, θ 方向の面に関して, 剛体境界上の計算をする積分領域ではその面内に値をもつ節点が存在しない。本報告では翼面上の計算に関してのみ, 二点を使う方法と三点を使う方法の比較計算を行った。

以上により適当な初期値 φ^0 から始め, (3)式に基づいて各時刻 n での増分 $\Delta\varphi^n$ を求め

$$\varphi^{n+1} = \varphi^n + \Delta\varphi^n$$

とすることにより時刻 $n+1$ での φ の値が求まる。このようにして φ^n が変化しなくなる (変化が十分小さくなる) まで計算を続け, そのときの φ^n を定常解とする。

体積および面積要素の計算

(3)式に基づいて計算を実行するには積分領域の体積と各面の面積要素の法線方向成分を求める必要がある。前縁あるいは後縁が必ずしも同一動径上にある必要はないが同一の格子線上にあり, また特に動翼では内壁側から外壁側に向けて取付け角が大きく変化することを考えれば, 積分領域は捩れているのが普通である。そのため体積および面積要素, 法線方向の計算が統一かつ容易に行える方法として局所写像の方法を用いた¹⁴⁾ 図3に示すように, 直角座標系 (ξ, η, ζ) で頂点の座標 (ξ_i, η_i, ζ_i) が $\pm 1/2$ である単位体積をもつ立方体 C を考える。今対象としている積分領域を V とし, その頂点の座標を (r_i, θ_i, z_i) とする。このとき C と V の間に

$$r = 8 \sum_{i=1}^8 r_i (\frac{1}{4} + \xi_i \xi) (\frac{1}{4} + \eta_i \eta) (\frac{1}{4} + \zeta_i \zeta)$$

$$\theta = 8 \sum_{i=1}^8 \theta_i (\frac{1}{4} + \xi_i \xi) (\frac{1}{4} + \eta_i \eta) (\frac{1}{4} + \zeta_i \zeta)$$

$$z = 8 \sum_{i=1}^8 z_i (\frac{1}{4} + \xi_i \xi) (\frac{1}{4} + \eta_i \eta) (\frac{1}{4} + \zeta_i \zeta)$$

として局所写像を定義する。このようにして定まった局所写像を用い, 原点 ($\xi=\eta=\zeta=0$) における写像のヤコビアンから

$$|V| = \begin{vmatrix} \frac{\partial r}{\partial \xi} & \frac{\partial r}{\partial \eta} & \frac{\partial r}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial \theta}{\partial \xi} & \frac{\partial \theta}{\partial \eta} & \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{vmatrix} \times \frac{\sum_{i=1}^8 r_i}{8}$$

として V の体積を求める。

次に各面の面積要素の計算であるが, (1'-2'-3'-4') 面を例として考える。この面は直角座標系の (1-2-3-4) 面と対応しており, 局所写像において $\zeta = -1/2$ とおくことにより (1'-2'-3'-4') 面のパラメータ表示が得られる。このパラメータ表示において $\xi = \eta = 0$ の点における外向法線 \vec{n} および二つの接ベクトルが張る平行四辺形の面積 dS とにより, 面積要素の各方向成分を

$$(A_r, A_\theta, A_z)^T = \vec{n} dS$$

として求める。残りの面のことも考慮して, 面のパラメータ表示を $r = r(s, t)$, $\theta = \theta(s, t)$, $z = z(s, t)$ とする。このとき

$$A_r = r \left(\frac{\partial \theta}{\partial s} \frac{\partial z}{\partial t} - \frac{\partial \theta}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial s} \right)$$

$$A_\theta = \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial t} - \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial s}$$

$$A_z = r \left(\frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\partial r}{\partial t} \frac{\partial \theta}{\partial s} \right)$$

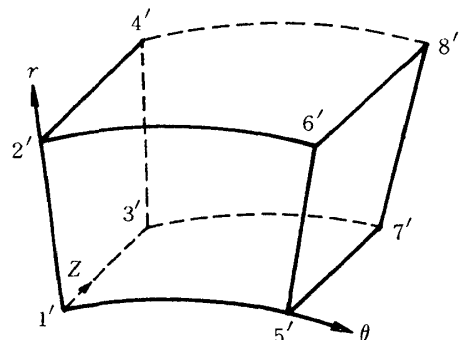
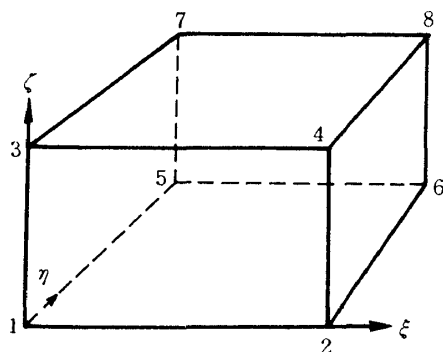


図3 局所写像

である(外向き方向が正となるように符号を定める)。

積分領域と計算格子

二次元の場合の Denton の積分領域を図 4 に示す(翼型は FJR710/600)。三次元の場合には, 翼間方向と同様に半径方向にもセルを取る(図 1)。

実際に使った計算格子の例を図 5 に示す。これは圧縮機の第一段動翼について計算したときのもので, 前縁・後縁が同一半径上にあるのがよくわかる。この例では翼間方向は等分割であり, また前縁付近の

上流側格子も若干粗い。これらは計算精度に影響を及ぼすので格子生成プログラムではそれらのことを考慮する必要がある。

5. 計算結果

三次元計算の対象として高圧タービンの動翼を模擬した RD-blade¹²⁾の実験を選んだ。この実験は数値シミュレーションを検証する目的で行われたもので, flared planar cascade の配置をとっている(図 6)。計算プログラムは円柱座標に対して書かれているので, 内径を十分大きくとって曲率の影響を無視できるようにして計算を行った。また計算に使ったデータは出口マッハ数が 1.2 に対応するものであ

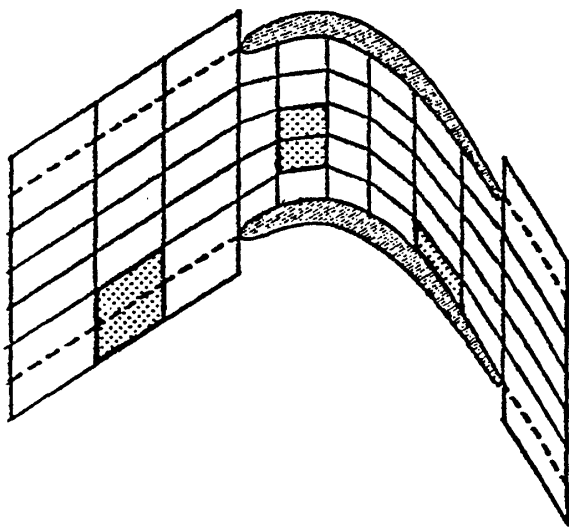


図 4 積分領域
----- 周期境界

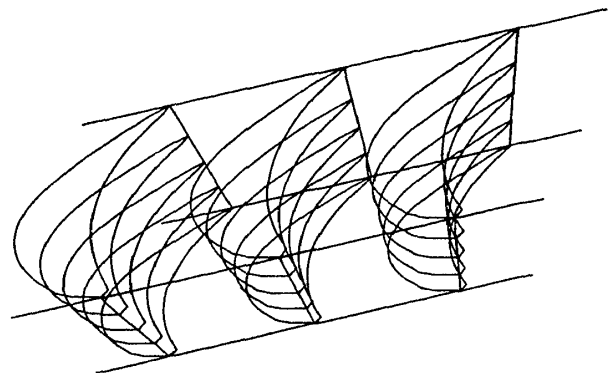


図 6 RD-blade
(flared planar cascade)

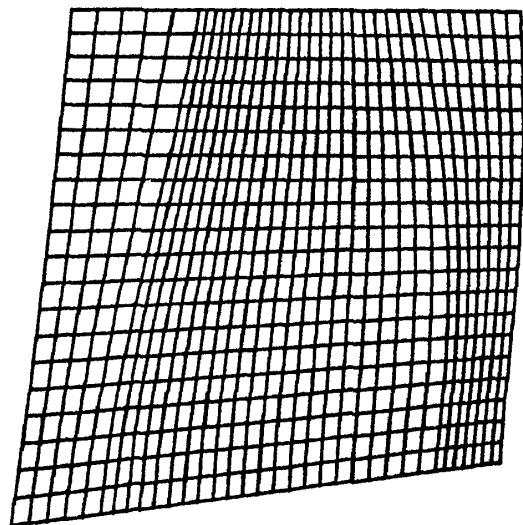
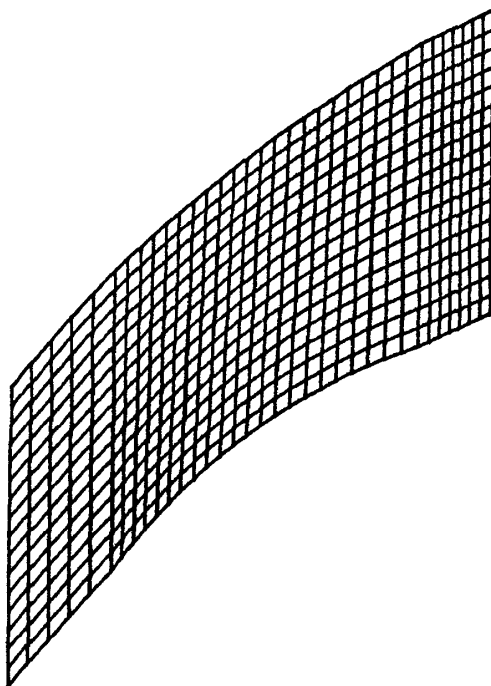


図 5 Computational Mesh

り、基礎方程式としては全温度一定の関係式を用いた。

主流方向のフラックスを一点で評価した場合の結果を図7に示す。ここで実線が示すマッハ数は、計算結果として得られた速度と温度をもとに求めたものである。記号は実験で得られた isentropic なマッハ数である。このときには計算で生じる全圧変動、流量変化が大きく翼背面では全く合わない結果となっている。一点による評価では精度が出ないので、4)で述べたように三点を用いて主流方向のフラックスを計算した場合の結果を図8に示す。この結果、

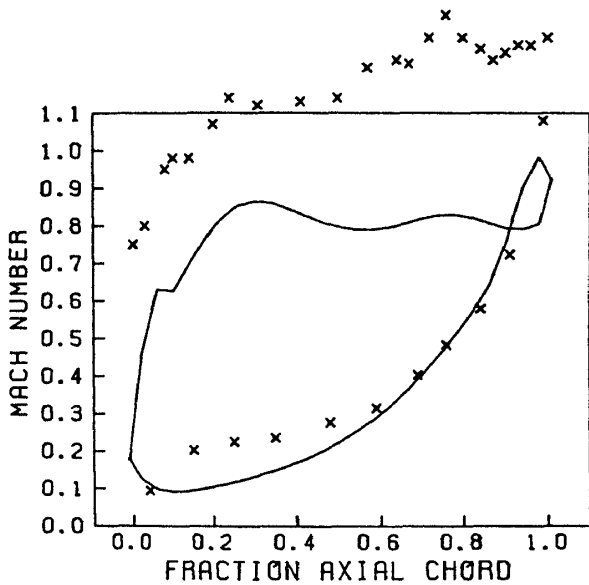


図7 翼面マッハ数分布(1/2 スパン)
主流方向フラックスを一点で評価

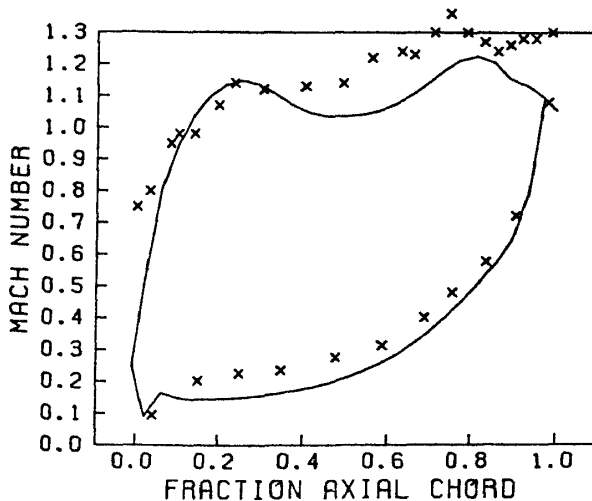


図8 翼面マッハ数分布(1/2 スパン)
主流方向フラックスを三点で評価

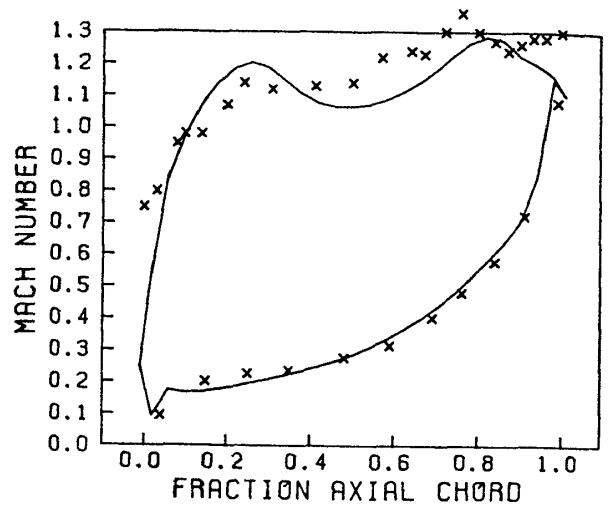


図9 翼面マッハ数分布(1/2 スパン)
主流方向および翼面上のピッチ方向
のフラックスを三点で評価

計算精度の向上により翼背面全域で大巾な改善が達成され、また翼腹面前半でも改善されているのがわかる。Dentonの積分領域は剛体境界の所では一セルしかない。従って翼面上の値を計算する場合、半径方向の面を通過するフラックスの計算にも精度上の問題があり得る(図1参照)。そこでこの部分のフラックスの計算をピッチ方向の三点を使って行った結果が図9である。このようにすると翼腹面ではよく一致し、翼背面でもさらに改善された結果が得られた。

これまでの計算に用いた計算格子は、翼の上流・下流ともに等間隔であった。この計算格子を改めて前縁上流および後縁下流に密な格子で、図9と同じ条件で計算した結果が図10である。翼背面の前縁、後縁部分を除いて非常に良い結果が得られた。これらの部分における食い違いは、前縁下流および後縁上流の翼面上の格子を密にとることによりさらに改善されるものと思われる。

図7~図10までのFVMによる計算で得られたマッハ数は流速をもとにしたものであった。これを計算で得られた静圧をもとにして isentropic なマッハ数を算出したものが図11である(図10に対応)。これからわかることは、翼腹面では流速と温度はよい値が得られている(図10)が、静圧は実験値に比べて小さい値が得られていることである(図11)。これはFVMの計算で全圧が小さくなったのがどちら

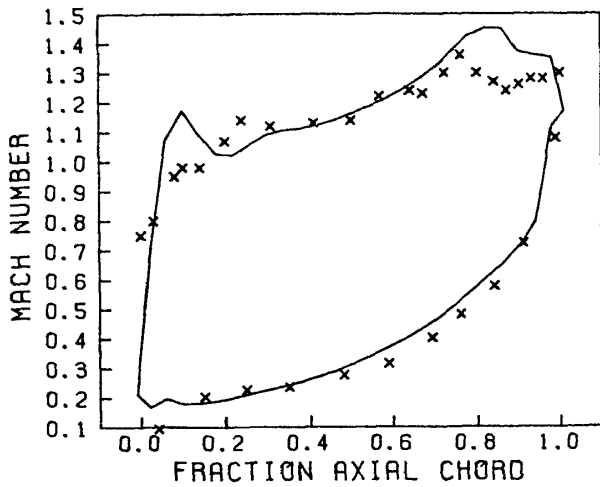


図10 翼面マッハ数分布 ($\frac{1}{2}$ スパン)
前縁上流, 後縁下流に密な格子を使用

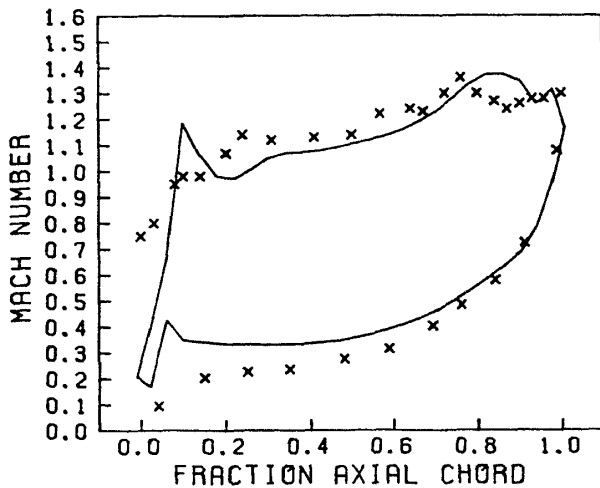


図11 翼面マッハ数分布 ($\frac{1}{2}$ スパン)
isentropic マッハ数

の影響かということにも関係している。同様の現象が McDonald の FAM でも生じ、現在かなり改善されている¹⁵⁾ (この場合には主として翼背面で小さい流速と正しい静圧が得られていた)。この経験をもとにすれば、この食い違いも解決できるものと思われる。

6. 結 語

巨大汎用コードの開発には様々な段階のコードが必要であり¹⁶⁾ 最も下流に位置しているのが設計コードである。設計コードとして利用可能かどうか—経済性(計算時間, 主記憶容量), 適用範囲(丈夫さ)等—を調べるには、或るアルゴリズムを working

code や production code に仕上げて何百 case もの計算をしなければならない。さらにその最上流の仕事として、物理・数学による定式化から解法アルゴリズムの開発が挙げられる。これらのどの段階から始めるかあるいはどの段階を行うかは種々の要因から決められるべき事柄である。

三次元翼間の圧縮性非粘性流の解析コードを開発するにあたっては、概ね working code のレベルから始めることにした。従って解法アルゴリズムとしてはすでに相当の評価がなされており、また将来性を見込めるものが好ましいわけである。このような観点から解法として Denton の FVM を採用し、それを production code さらに設計コードへと発展させる目的で始めた仕事である。

本報告ではフラックスベクトルの計算の仕方、計算格子の取り方による数値解の振舞について調べた。その結果、主流方向のフラックスベクトルを一点で評価した場合には、全く精度が得られない場合もあることがわかった。また、前縁・後縁近傍での格子間隔も精度に影響を及ぼすことがわかった。ここでは議論しなかったが、計算を安定させるための平滑化あるいは人工粘性の導入も重要な課題である。

汎用コードの開発という観点からみた課題としては、様々な解法アルゴリズムの進歩に即応できしかも日常的利用には煩雑でないようなコード構造をもたせるといふことがある。本報告の計算は Denton が最初に提案した形のものであるが、新しい形の FVM も発表されている¹⁷⁾ ここでは計算時間の短縮、鋭い衝撃波の捕獲性等が報告されている。もう一つの課題としては実験によるコードの検証作業が挙げられる。現在のように数値シミュレーション技術が発達してくれば、それを検証するための精密な実験・数多くの実験が必要となる。またそのような実験の存在が数値シミュレーションをより一層発展させる。それ故、実験を行なう研究者と数値計算を行なう研究者との交流が今まで以上に重要になるとと思われる。

文 献

- 1) W.T. Thompkins, Jr., A.H. Epstein: AIAA 76-368

- 2) A.J. Strazisar, R.V. Chima: AIAA 80-1078
- 3) G. Haymann-Haber, W.T. Thompkins, Jr.: ASME 80-GT-81
- 4) J.D. Denton: ARC R&M 3775(1975)
- 5) J.D. Denton: VKI Lecture Series 84(1976), 97
- 6) J.D. Bryce, M.R. Litchfield: ARC CP 1373(1977)
- 7) U.K. Singh: ASME 81-Gr/GT-5
- 8) 田沼, 小林; 第10回ガスタービン定期講演会, (1982), 139
- 9) J.D. Denton: Numerical Methods in Applied Fluid Dynamics (B. Hunt Ed.), Academic Press, 1980, p. 473
- 10) 福田, 西村, 田村; 航技研 TR-709
- 11) 養田, 山崎, 能瀬; 第21回航空原動機に関する講演会, (1981), 14
- 12) J.J. Camus, J.D. Denton, J.V. Soulis, C.T.J. Scrivener: ASME 83-GT-12
- 13) 福田; 計算スキーム/アルゴリズム・ワークショップ講演予稿集, (1983), 69
- 14) A. Jameson: Numerical Methods in Applied Fluid Dynamics (B. Hunt Ed.), Academic Press, 1980, pp 363-386
- 15) 西村, 橋本, 福田; to appear
- 16) Aeropropulsion 1979: NASA CP 2092
- 17) J.D. Denton: ASME 82-GT-239