

空気力学における最近の数値計算法

里 深 信 行 *

Recent Progress in Computational Aerodynamics

Nobuyuki Satofuka

Kyoto Technical University

Summary

An introductory survey of recent developments in computational aerodynamics is presented in this paper. It begins with an account of methods for numerical grid generation techniques. Emphasis is placed on techniques which have already been used successfully on practical problems or appear to have such potential. A brief review of approaches for acceleration of convergence, i.e., the pseudo-unsteady methods and the multi-grid methods, is also presented. A new explicit method is devised for solving the Navier-Stokes equations for unsteady compressible viscous flow. The method is shown to be very accurate and efficient when results are compared with the implicit methods in use today.

1. まえがき

最近の計算機ハードウェア性能の向上によって、計算空気力学の分野においても従来不可能であった大規模な数値シミュレーションが可能となり、これまで夢とされてきた航空機のような幾何学的形状の複雑な3次元物体まわりの流れも、現実的に意味のある時間内にナビエ・ストークス方程式を数値的に解いて計算できる日が目前に迫りつつある。我が国においても、CRAY-1を凌駕する性能のスーパーコンピュータが最近各社より相次いで発表されているが、これらのハードウェアの性能を十分に活用するには、それに適応した数値計算アルゴリズムの開発が不可欠であり、この方面での今後の努力が強く期待されている。この様な背景から、本論文では空気力学の分野における最近の数値計算法の動向の概説

と、著者らの考案した新しい数値計算法の紹介を試みる。

計算空気力学の目標とするところは、ほぼ表1に要約できるが、利用できる計算機の能力との兼ね合いから、その歴史的発展の過程は、ナビエ・ストークス方程式に対する近似の程度により、図1に示す階層図にまとめられる。図の右側に位置する程近似度が高く、従って当然必要とされる計算量も増大する。表1に示した目標を達成するためには、レイノルズ平均ナビエ・ストークス方程式を3次元に対して解く必要があり、それを可能にするには、計算機のハードウェア性能の向上のみならず、3次元物体まわりの格子形成法の確立、乱流モデルの改良および数値解法のより一層の効率化が要求される。これら4つの要因の全てに対して議論することは紙面の制約により不可能であるので、ここでは格子形成法と数値解法に限定して解説する。

* 京都工芸繊維大学工芸学部

表1 計算空気力学の目標

- ・迅速で経済的な流れ場のシミュレーション
- ・理論と実験のより強固な結合
- ・航空機の状態に及ぼす設計変数の影響の解明
- ・風洞固有の制約（壁効果、支持部の干渉、マッハ数およびレイノルズ数の限界）のない自由飛行状態のシミュレーション
- ・空気力学的形態の最適化の向上

→

- ・初期設計の顕著な改善
- ・風洞実験の効率の向上
- ・設計における時間、経費および危険度の減少

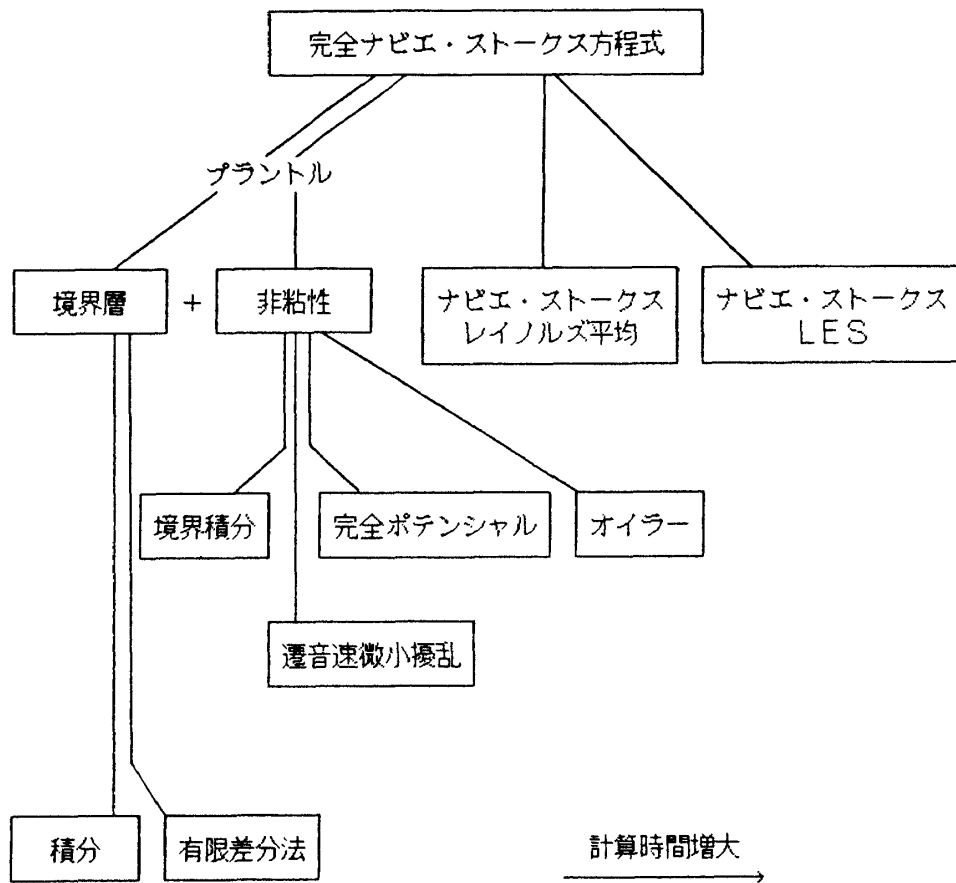


図1 計算空気力学の階層

2. 格子形成法

複雑な形状をした3次元物体まわりの流れを数値的に解くには、まずそのまわりに格子点系を形成する必要がある。任意形状の3次元物体まわりに格子点系を電子計算機により数値的に形成する問題は、計算空気力学において、現在最も多くの人々の関心を集めているものの一つであり、この問題のみに関

するシンポジウムが各地で開催されている。

2.1 楕円型方程式による方法

楕円型方程式のディリクレ問題を解くことにより、数値的に格子を形成する方法は、最初Thompsonらにより採用され、その後多くの人々により応用されている。¹⁾ 簡単のため、2次元の場合に対してその原理を説明すると、図2に示すように物理面 (x, y) 、計算面 (ξ, η) とすると、複雑な形状をした物理面

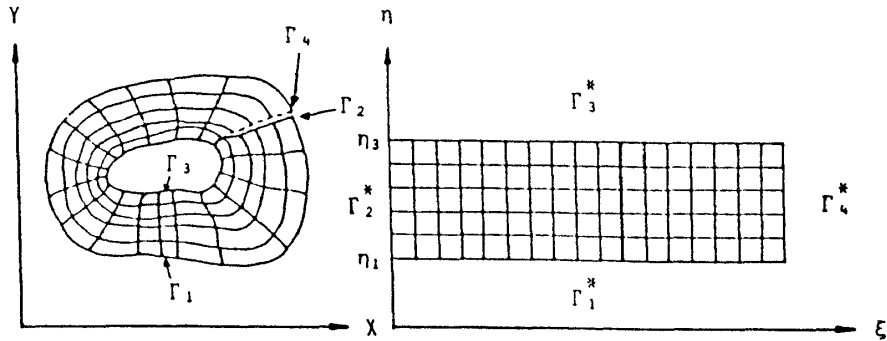


図2 数値的格子形成法の原理

での境界 Γ_1, Γ_3 は、計算面においては ξ 軸に平行な直線 Γ_1^*, Γ_3^* に変換される。このような変換は、楕円型方程式としてラプラス方程式を選ぶと、

$$\left. \begin{aligned} \xi_{xx} + \xi_{yy} &= 0 \\ \eta_{xx} + \eta_{yy} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

を Γ_1 上で $\eta = \eta_1$ (一定), Γ_3 上で $\eta = \eta_3$ (一定)の境界条件のもとで解くことにより得られる。計算上は独立変数を (x, y) から (ξ, η) に変換した方が境界条件が簡単になるので、変換すると、

$$\left. \begin{aligned} \alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta} &= 0 \\ \alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

となる。

ここで、 $\alpha = x_\eta^2 + y_\eta^2$, $\beta = x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta$, $\gamma = x_\xi^2 + y_\xi^2$ であり、境界条件は Γ_1^* 上で $x = f_1(\xi, \eta_1)$, $y = g_1(\xi, \eta_1)$, Γ_3^* 上で $x = f_3(\xi, \eta_3)$, $y = g_3(\xi, \eta_3)$ となる。

(2)式をSOR法あるいはADI法で解くことにより、求める格子系を数値的に形成できる。格子点分布の制御は、境界条件として与える計算面での等間隔な格子点に対応する物理面での座標点分布を変えることにより可能であるが限界があり、一般的にはラプラス方程式の代わりにポアソン方程式を用いることになるが、所望の格子点分布を得るには、多くの試行錯誤を必要とする。図3には、このようにして得られた対称ジュウコフスキー翼型まわりの格子配列を示す。楕円型方程式を用いる方法の欠点は、格子点の形成に時間がかかることであり、解適応格子 (solution-adaptive grid) を用いる場合には、各計算段階毎に(2)式の収束解を得なければならないため能率が悪い。また、物体表面と格子点とが必ずしも直交しないため、境界条件の設定法に工夫を要する場合もある。

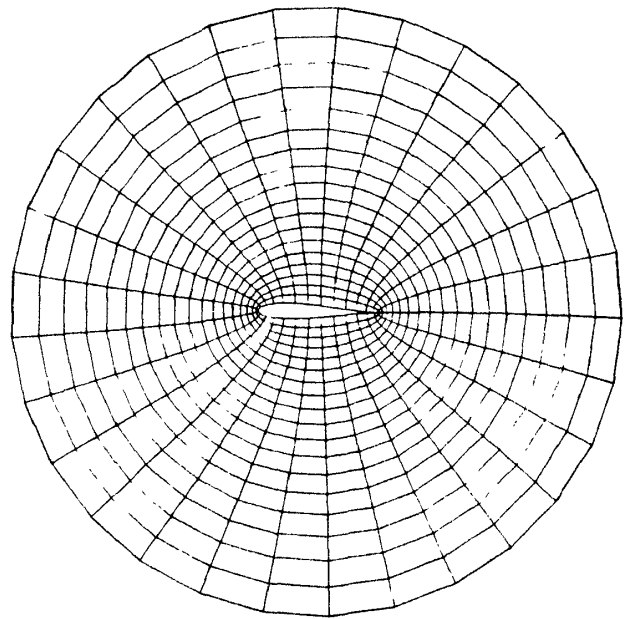


図3 対称ジュウコフスキー翼型まわりの格子配列

2.2 双曲型方程式による方法

最近、StegerとSorensonは双曲型方程式を用いて、格子系を形成する方法を提案した²⁾。彼等の方法には、直交条件式と組み合わせる関係式として、 $\eta =$ 一定の座標線間の距離を規定する方法と格子セルの容積を規定する方法の2種類が提案されている。前者に対して、格子形成の基礎方程式は、

$$\left. \begin{aligned} x_\xi^2 + y_\xi^2 + x_\eta^2 + y_\eta^2 &= (\Delta S)^2 \\ x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

となり、後者に対しては、

$$\left. \begin{aligned} x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi &= V \\ x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

となる。

ここで (ΔS) および V は利用者が与えるパラメー

タである。(4)式の方法を例にとると、適当な局所線形化を行なうことにより、

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_\eta & \tilde{y}_\eta \\ \tilde{y}_\eta - \tilde{x}_\eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_\xi + \begin{pmatrix} \tilde{x}_\xi & \tilde{y}_\xi \\ -\tilde{y}_\xi & \tilde{x}_\xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_\eta = \begin{pmatrix} 0 \\ V + \tilde{V} \end{pmatrix} \quad (5)$$

となり、行列表示では

$$\tilde{A} \vec{r}_\xi + \tilde{B} \vec{r}_\eta = \vec{f} \quad (6)$$

と書ける。 $x_\xi^2 + y_\xi^2 \neq 0$ のとき \tilde{B}^{-1} は存在し、 $\tilde{B}^{-1}\tilde{A}$ は対称行列となり、(6)式は双曲型となって、 η 方向に解き進むことができる。彼等は(6)式を Beam-Warming 法を用いて解き、種々の形状の2次元物体まわりの格子を形成している。この方法は、前述の楕円型方程式を用いる方法に比べ、格子形成に要する時間が少く、また、直交格子が得られる利点があるが、一方、外部計算境界の形状が予め規定できないこと、3次元への適用が直接的でないことなどの短所もある。

2.3 解適応格子

数値計算に於ては、流体力学方程式の空間微分項は格子点での値の差分により近似される。従って、衝撃波や境界層の様な流れの物理量の急激に変化する領域には格子点が集中することが望ましい。実際ナビエ・ストークス方程式を解く場合には、物体近傍の粘性層に格子点を集中させることは通常良く行なわれる。しかし、一般には、これら流れの物理量の急激に変化する領域は解の一部として得られるものであり、予め知られている場合は特殊な例である。そこで、流れ場の状態に対応して、各時間段階で格子点分布を再配列する解適応格子法が有望な方法として提案され、幾つかの問題に応用されている。ここでは、その代表的な方法を紹介する。

Dwyer らは、物理空間において格子間隔が、適当に選んだ流れの物理量の勾配に比例するように、各時間段階で計算格子を形成する方法を提案している。³⁾ いま、 ξ 方向の格子間隔を制御する場合を考えると、彼等の方法は、

$$\xi(x, y, t) = \frac{\int_0^S (1+b) \left| \frac{dT}{dS} \right| dS}{\int_0^{S_{\max}} (1+b) \left| \frac{dT}{dS} \right| dS} \quad (7)$$

と書ける。

ここで、 T は流れの物理量、 S は $\xi = \text{一定}$ の線に沿って測った弧の長さであり、 b は格子分布を調節するパラメータである。すなわち、 $b \rightarrow 0$ のとき一様分布となり、 $b \rightarrow \infty$ のとき、各格子点間で T の変化が一定となる。この方法は熱伝導の問題などに対しては成功裡に応用されているが、着目する流れの物理量が2つ以上存在する場合は、解決しなければならない問題が残されている。これに対し、Rai と Anderson は基準値からの偏差の大きい領域に格子点が集中するように、物理空間における格子点の移動速度を制御する方法を提案している。⁴⁾ 彼等の方法によると i 番目の格子点の移動速度は、

$$(\xi_i)_\tau = K \left[\sum_{j=i+1}^N \frac{|e|_j - |e|_{av}}{r_{i,j}^n} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{|e|_j - |e|_{av}}{r_{i,j}^n} \right] \quad (8)$$

$$(x_\tau)_i = (\xi_i)_\tau / (\xi_x)_i \quad i = 1, 2, \dots, N-1$$

で表わされる。

ここで、 $(\xi_i)_\tau$ は計算面での格子の移動速度であり、 K と n は適当に定める定数、 N は全格子点数、そして、 $r_{i,j}$ は格子点 i と j の間の計算面における距離である。また、 $|e|_j$ は格子点 j における代表的な物理量の勾配、 $|e|_{av}$ はその場合全体での平均である。Rai らは、この方法により衝撃波を伴う各種の2次元流れを計算しているが、一般化にはまだ解決しなければならない問題が残されている。

3. 収束加速法

空気力学における数値計算の多くは、時間依存法によりある初期条件より出発し、長時間の極限として定常解を得ている。従って、定常状態に収束するのに要する時間ステップ数を少なくすることが計算効率の向上に大きく寄与するので、この面での改良の試みが多くなされている。定常解のみに興味がある場合に対して用いられる最も一般的な方法は、過渡的状态に対する時間的正確性を棄てさることであり、

各格子点毎に安定条件で許される最大の時間格子幅を用いる局所時間ステップ法や方程式系を修正し、減衰効果を導入する擬似時間依存法などがある。一方、収束の速さが格子系を情報が伝播する速度に支配されることに着目し、階層状の格子系を用い、細かい格子系から粗い格子系へと計算を交互に繰返す多重格子法が最近多くの注目を集めている。ここでは、これらの代表的な方法について、その概略を説明する。

3.1 擬似時間依存法

基礎方程式系を修正することにより、系に減衰効果を導入し、定常解への収束を加速する方法は既に幾人かの人々により提案され、応用されているが、ここでは、Essers による方法⁵⁾を紹介し、簡単のため一次元の場合について説明する。いま(9)式の定常解を求める場合を考える。

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = A(\vec{u}) \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} \quad (9)$$

ここで、 $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_N)^T$ とする。擬似時間依存法では、(9)式をそのまま解くかわりに、別の従属変数 $\vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_N)^T$ を導入し、方程式を以下のように修正する。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \vec{q}}{\partial t} &= A \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} \\ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + K\vec{u} &= A \frac{\partial \vec{q}}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

(10)式より \vec{q} を消去すると、振動方程式におけるダッシュポットに相当する項が存在することが容易に示されるため、(10)式を用いる方法は DASH1 と呼ばれる。(10)式を適当な差分法で解くと元の方程式(9)を解く場合よりもずっと少い時間ステップ数で定常解に収束する。しかし、この方法の欠点は(10)式より明らかなる如く、新たに未知数 \vec{q} を導入したことにより方程式数が2倍になることである。この事は必要な記憶容量も2倍となることを意味し、記憶容量が決定的な要因となる3次元計算においては致命的な欠点である。この欠点を除去するために、

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + K(\vec{u} - \vec{u}_0) = A \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} \quad (11)$$

のような方程式系を用いる DASHCO 法が提案されている。ここで、 \vec{u}_0 は定常解への収束を加速する様

に選ばれた特解であり、通常は数時間ステップ前の値を用いる。DASHCO 法では方程式の数が2倍になる問題は解消されたものの収束は(10)式より大分おそくなると報告されている。

3.2 多重格子法

多重格子法は最近実に多種多様の問題に多くの人々により応用され、一つの流行とさえ思われる程であるが、ここでは標準的な Brandt による方法⁶⁾に対してその原理を説明する。いま、領域 Ω 内で $LU(x) = F(x)$, 境界 $\partial\Omega$ 上で $AU(x) = \Phi(x)$ を満足する解 $U(x)$ を求める場合を考える。ここで、演算子 L は例えばラプラシアンなどの微分演算子であり、 A は境界条件を示す演算子とする。多重格子法では、計算領域を格子間隔が $h_0 > \dots > h_M$ である階層格子 G^0, G^1, \dots, G^M に分割する。最も細かい格子 G^M での U の近似解を u^M とすると、以下の様な関係が成り立つ。

$$L^M u^M = F^M - f^M, \quad A^M u^M = \Phi^M - \phi^M \quad (12)$$

ここで、 $V^M = U^M - u^M$ とすると、(12)式より残差に対する方程式が

$$L^M V^M = f^M, \quad A^M V^M = \phi^M \quad (13)$$

の如く得られる。多重格子法の計算過程は以下のようになる。まず、(13)式を格子 G^M 上で適当な緩和法により解くことを試みる。当然1回の緩和では収束解が得られないので、その場合は一段粗い格子 G^{M-1} に対する f^{M-1} , ϕ^{M-1} を格子 G^M での値に適当なフィルターをかけることにより求める。この操作を容易に収束解の得られる一番粗い格子 G^0 に達するまで繰り返し行なう。 G^0 での収束解が得られたら、今度は G^1, G^2, \dots と逐次細かい格子で収束解が得られるように V の予測値を内挿により求め、最も細かい格子 G^M での収束解が得られるまで、この過程を反復する。多重格子法の計算過程のフローチャートを図4に示す。このようにすると、格子 G^M 上でのみ緩和を行なう場合に較べて、はるかに少い計算労力で収束解が得られる。多重格子法は現在、遷音速完全ポテンシャル方程式やオイラー方程式に広く応用されており、今後ナビエ・ストークス方程式への適用が予想される。

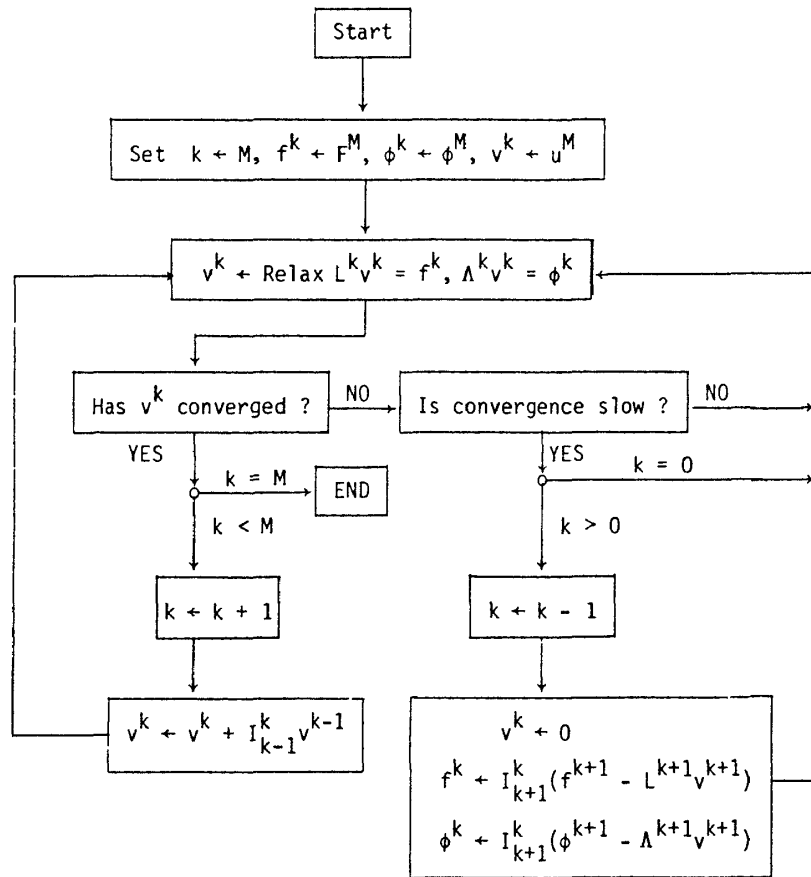


図4 多重格子法の計算過程の流れ図

4. ナビエ・ストークス方程式の数値解法

高レイノルズ数の流れに対して、レイノルズ平均ナビエ・ストークス方程式を解く場合には、物体表面近傍の粘性層に対する分解能の要求から、流れに垂直な方向の格子間隔は極めて細かくとらねばならず、一方では計算機の記憶容量の制約から全格子点数はある限度内で抑えなければならなくなる。この結果、問題は数学的な意味の硬直性を有することになり、この問題に対する対策から、陰的な数値解法が多く用いられている。現在では、BeamとWarmingによるADI型の方法⁷⁾が最も多く用いられているが、プログラミングが複雑で、1格子点、1時間ステップ当りの計算量も陽的方法に較べて多くなる欠点がある。最近MacCormackはBeam-Warming法におけるブロック3重対角行列のかわりに2重対角行列を解く新しい陰的方法⁸⁾を提案し、この問題を一部解決したが、彼の方法においても要求される

計算量は全格子点に対して陰的计算を行なう場合には、彼の陽的方法よりも3倍程度必要となる。従って、もし陽的方法と同程度の計算労力で、陰的方法のような安定性をもつ方法が考案できれば、その実用的価値は計りしれない。最近、著者はこのような方法⁹⁾の開発に成功したので、ここにその概要を紹介する。

説明を簡単にするため、以下のような模型方程式に対して、その計算過程を示す。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -c \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (14)$$

(14)式の空間微分項に対して、 $m = (M-1)/2$ として

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i \cong \sum_{j=-m}^m a_j u_{i+j} \equiv D_M(u_i) \quad (15)$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i \cong \sum_{j=-m}^m b_j u_{i+j} \equiv D_M(D_M(u_i))$$

の様に近似すると、模型方程式は形式的に時間 t に対する連立常微分方程式

$$\frac{d\vec{U}}{dt} = \vec{F}(D_M(u_i), D_M(D_M(u_i))) \equiv \vec{F}(\vec{U}) \quad (16)$$

に書き換えられる。

ここで、 $\vec{U} = (u_1, u_2, \dots, u_N)^T$ である。(16)式を適当な時間積分法を用いて、積分すれば良い訳であるが、従来の陽的積分法ではやはり厳しい安定条件が課される。著者の提案する方法が従来の方法と異なる安定特性を持つ理由は、時間積分法としてWambecqの提案した有理Runge-Kutta(RRK)法¹⁰⁾を用いることによる。RRK法は、単一の方程式に対しては無条件安定であり、(16)式に対して適用した場合には、

$$\vec{g}_1 = \Delta t \vec{F}(\vec{U}^n), \quad \vec{g}_2 = \Delta t \vec{F}(\vec{U}^n + c_2 \vec{g}_1)$$

$$\vec{U}^{n+1} = \vec{U}^n + \frac{2\vec{g}_1(\vec{g}_1, \vec{g}_2) - \vec{g}_2(\vec{g}_1, \vec{g}_1)}{(\vec{g}_3, \vec{g}_3)} \quad (17)$$

と書ける。ただし、 $\vec{g}_3 = b_1 \vec{g}_1 + b_2 \vec{g}_2$, $b_1 + b_2 = 1$ である。(17)式において、記号 (\vec{d}, \vec{e}) は、ベクトル \vec{d} と \vec{e} の内積を示す。この方法は、一般には時間に対して1次精度であるが、 $b_2 c_2 = -1/2$ のときには2次精度となる。常微分方程式の安定性理論によると、(16)式を行列表示に直した方程式、

$$\frac{d\vec{U}}{dt} = A\vec{U}, \quad A = \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{U}} \quad (18)$$

の係数行列 A の固有値 β は一般に複素数となるが、数値積分法の安定領域が、この複素平面の左半分全体であるとき A -安定、負の実軸と角 α をなすカサビ状の領域であるとき、 $A(\alpha)$ -安定、負の実軸上であるとき A_0 -安定と呼ばれる(図5参照)。この定義に従うと、RRK法は $b_2 c_2 \leq -1/2$ のとき A_0 -安定であり、 $b_2 c_2 \leq -1/[2\cos\alpha(2-\cos\alpha)]$ のとき、 $A(\alpha)$ -安定であることが証明されている。ナビエ・ストークス方程式は放物型であるので、(15)式の形式で空間微分項を離散化して得られる係数行列 A の固有値は一般に複素数となる。従って、固有値が安定領域に入るよう $b_2 c_2$ の値を適当に選べば、RRK法を用いることにより時間ステップ幅は任意に大きく取れることが期待できる。

本方法の有効性を実際の数値計算において示すために、準一次元ノズル流問題に適用し、その安定性、精度および計算能率を陰的MacCormack法と比較検討した。その結果の一例を図6に示す。図はノズル

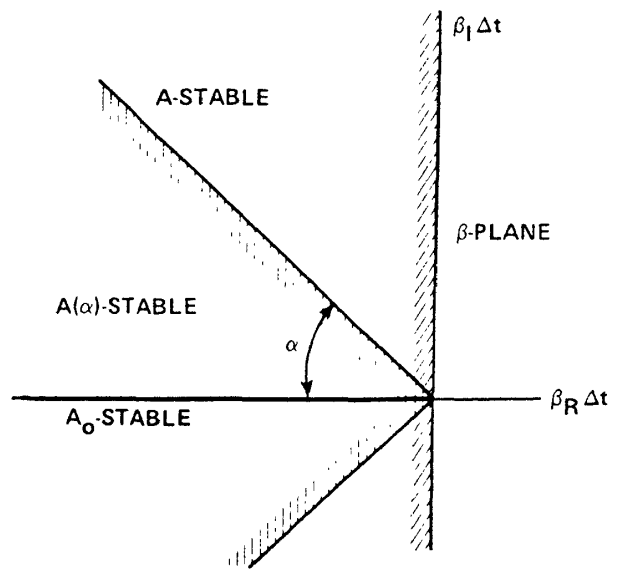


図5 数値計算法の安定性の定義

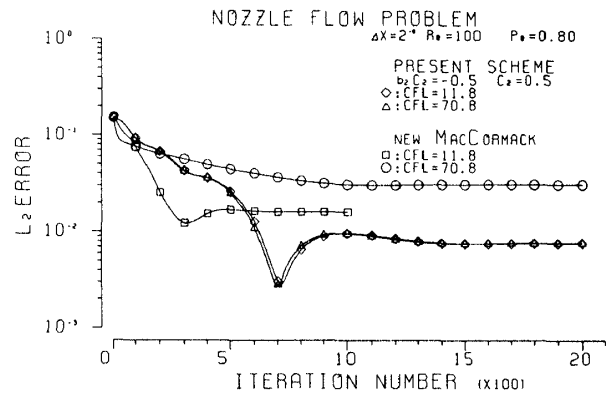


図6 準一次元ノズル流における定常解への収束の比較

全長に基づくレイノルズ数 $Re = 100$ 、出口圧力 $Pe = 0.8$ の場合における定常解への収束の様態を縦軸に L_2 誤差を横軸に時間ステップ数を取って比較したものである。両者とも、通常陽的方法の安定限界よりずっと大きな2種類のクーラン数で計算した結果を同時に示してある。本問題に対しては解析解が存在しないので、4倍の格子点数を用いて計算した結果を参照解として L_2 誤差を求めた。図より定常解の精度に関しては、本方法の方が問題なく優れていることがわかる。しかも、MacCormack法では定常解が時間ステップ幅に依存する欠点が認められる。定常解に収束するのに要する繰り返し数は境界条件にもよるが、本方法の方が若干多くなる。全体としての計算能率は、収束に必要な時間ステップ数と1

表2 演算数および計算時間の比較

Scheme	C.P.U. Time Iteration · Grid point	Operation count	
		multipli- cation	addition
Present	36×10^{-6} sec	184-282/N	97-150/N
new MacCormack	265×10^{-6} sec	523-543/N	207-311/N

格子点，1時間ステップ当りの計算時間の積により決まるが，本方法の計算労力は表2に示すように，MacCormack法の1/3以下であり，これより本問題に対しては，著者の方法の方が優れていると結論できる。多次元の問題に対しても拡張が容易であることを示すために，2章で述べた楕円型方程式を用いる格子生成法と，組合わせて計算された2次元および軸対称物体まわりの超音速粘性流に対する結果を

円柱，球，楕円柱および回転楕円体に対して，それぞれ等密度線図を図7に示す。

5. まとめ

最初に述べた様に，1980年代は我が国における計算空気力学の大発展期であると期待される。特に我が国では，計算機メーカー各社のスーパー・コンピュータ以外にも，通産省の大型プロジェクトとして1980年代の末までにCRAY-1の100倍近い能力を持つ科学技術計算用の超高速計算機の開発が進行中である。従って近い将来，我が国がアメリカを凌ぐ計算機能力を持つことも夢ではなくなりつつある。このような状況に対して，我々計算空気力学者としては，それに対応した新しい数値計算法の開発は勿論，その最も有効な利用法や利用形態の確立に衆知を結集しなければならない。

参考文献

- 1) Thompson, J.F., Thames, F.C., and Mastin, C.W., "Automatic Numerical Generation of Body-Fitted Curvilinear Coordinate Systems for Fields Containing Any Number of Arbitrary Two-Dimensional Bodies", J. Comp. Phys., 15, 299, 1974
- 2) Steger, J.L. and Sorenson, R.L., "Use of Hyperbolic Partial Differential Equations to Generate Body Fitted Coordinates", NASA CP-2166, 463, 1980
- 3) Dwyer, H.A., Kee, R.J., and Sanders, B.R., "An Adaptive Grid Method for Problems in Fluid Mechanics and Heat Transfer", AIAA paper 79-1464, 1979
- 4) Rai, M.M. and Anderson, D.A., "Grid Evolu-

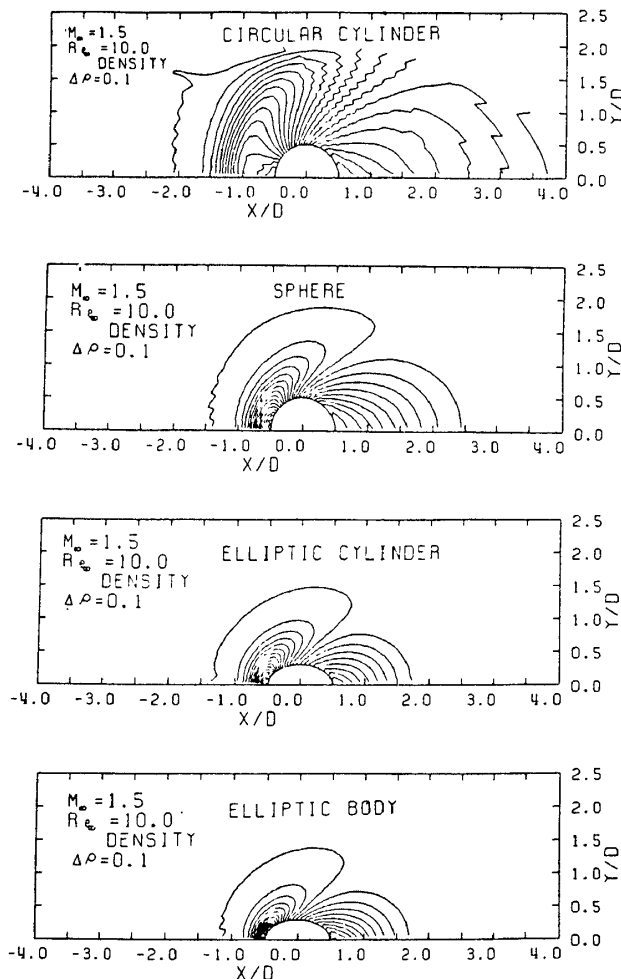


図7 2次元および軸対称物体まわりの超音速流の数値解

- tion in Time Asymptotic Problems”, J. Comp. Phys., 43, 327, 1981
- 5) Essers, J.A., “Evolution Approaches to the Numerical Treatment of Inviscid Internal Flows”, VKI LS-1978-4, 1978
 - 6) Brandt, A., “Multi-Level Adaptive Solutions to Boundary-Value Problems”, Math. Comp., 31, 333, 1977
 - 7) Beam, R.M. and Warming, R.F., “An Implicit Factored Scheme for the Compressible Navier-Stokes Equations”, AIAA J., 16, 393, 1978
 - 8) MacCormack, R.W., “A Numerical Method for Solving the Equations of Compressible Viscous Flow”, AIAA paper 81-0110, 1981
 - 9) Satofuka, N. and Tsujita, M., “A New Explicit Method for the Numerical Solution of the Compressible Navier-Stokes Equations”, Proc. BAIL II Conf., 364, 1982
 - 10) Wambecq, A., “Rational Runge-Kutta methods for Solving Systems of Ordinary Differential Equations”, Computing, 20, 333, 1978

