

AF2法による遷音速翼型まわりの流れの数値解析

里 深 信 行* 西 田 秀 利*

Numerical Analysis for Steady Transonic Flows Past an Airfoil
Using AF2 SchemeNobuyuki SATOFUKA and Hidetoshi NISHIDA
Kyoto Institute of Technology

ABSTRACT

An approximate factorization scheme has been developed for analyzing transonic flows past an airfoil. In this scheme, upwind differencing is used for introducing artificial viscosity in the supersonic region and central differencing is used in the subsonic region. The resulting simple two- and three-banded matrices are solved by the relaxation procedure. This scheme is fully implicit, and in principle can be combined with the solution-adaptive method. In both sub- and super-critical cases, the computed surface pressure distributions for an NACA0012 airfoil are in good agreement with those obtained by other methods.

1. ま え が き

遷音速翼型まわりの流れを完全ポテンシャル方程式により解析しようとする際の困難さとしては、計算領域内に亜音速領域 ($M < 1$) と超音速領域 ($M > 1$) とが混在するために、方程式の型が前者では楕円型、後者では双曲型と変化する点が挙げられる。この困難さを解消するために、Murman¹⁾は亜音速領域では通常を中心差分を用いるが、超音速領域での差分を風上差分によって評価することにより人工的な粘性を付加し、衝撃波を含む解が得られる緩和法を考案した。それ以来、ポテンシャル流れの解析に対しては、多くの緩和法が試みられている。現在では、Ballhausらによって提案された演算子近似分割法 (Approximate Factorization Method)²⁾ 及び Brandt や Jameson による多重格子法 (Multi-Grid

Method)^{3),4)}が有望視されている。

一方、我が国の数値流体力学の現状を鑑みると、コードの開発はまだ欧米各国に依存しており、この面での立遅れが指摘できる。さらに、最近のアメリカの先端技術流出防止政策を考え合せると、我が国独自でコードを開発することが急務であると思われる。

そこで、本報告に於いては、その第一段階として、解適応格子法と組合せることができ、内部流れへの応用も比較的容易であると思われる演算子近似分割法の一つである AF2 法を用いて基本的な遷音速翼型まわりの流れを解析することを試みる。

2. 基礎方程式

臨界音速 a^* 、澱み点密度 ρ_0 、及び翼弦長 l を用いて無次元化した速度を u, v 、密度を ρ 、速度ポテンシャルを ϕ とする。2次元完全ポテンシャル方程式は保存形で、

* 京都工芸繊維大学工学学部

$$(\rho\phi_x)_x + (\rho\phi_y)_y = 0 \tag{1}$$

と書くことができる。また、密度 ρ は、

$$\rho = \left[1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} (\phi_x^2 + \phi_y^2) \right]^{\frac{1}{\gamma-1}} \tag{2}$$

となる。ここで、 γ は比熱比であり、添字 x 及び y は各々 x, y に関する偏微分を表わす。

(1)式及び(2)式を

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y) \tag{3}$$

なる座標変換を用いて、一般座標に変換すると、

$$\left(\frac{\rho U}{J} \right)_\xi + \left(\frac{\rho V}{J} \right)_\eta = 0 \tag{4}$$

$$\rho = \left[1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} (U\phi_\xi + V\phi_\eta) \right]^{\frac{1}{\gamma-1}} \tag{5}$$

の様に表わされる。ここで、 U 及び V は物理速度、 u, v の反変成分であり次の様に表わせる。

$$\left. \begin{aligned} U &= \xi_x \phi_x + \xi_y \phi_y = A_1 \phi_\xi + A_2 \phi_\eta \\ V &= \eta_x \phi_x + \eta_y \phi_y = A_2 \phi_\xi + A_3 \phi_\eta \end{aligned} \right\} \tag{6}$$

また、 J は変換のヤコビアン、 A_1, A_2, A_3 は変換のメトリックスであり、

$$\left. \begin{aligned} J &= \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x = 1 / (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi) \\ A_1 &= \xi_x^2 + \xi_y^2 = J^2 (x_\eta^2 + y_\eta^2) \\ A_2 &= \xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y = -J^2 (x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta) \\ A_3 &= \eta_x^2 + \eta_y^2 = J^2 (x_\xi^2 + y_\xi^2) \end{aligned} \right\} \tag{7}$$

と表わすことができる。

3. 座標形成法

一般に、任意形状物体まわりの流れ場を解析する際には、物理面での複雑な形状の境界での内挿を避けるために、物理面での物体境界が座標軸の一つと一致するような計算面への変換を行なうことにより単純な計算面に於いて計算を進める手法が取られる。

物理面と計算面とを関係付ける方法としては、等角写像の応用、代数的方法、偏微分方程式を用いる方法等があるが、ここでは、Thompson⁵⁾に倣いラプラス方程式

$$\left. \begin{aligned} \xi_{xx} + \xi_{yy} &= 0 \\ \eta_{xx} + \eta_{yy} &= 0 \end{aligned} \right\} \tag{8}$$

を採用する。実際には、境界条件の設定を容易にするために、(8)式の独立変数と従属変数を入れ換えた

$$\left. \begin{aligned} Ax_{\xi\xi} - 2Bx_{\xi\eta} + Cx_{\eta\eta} &= 0 \\ Ay_{\xi\xi} - 2By_{\xi\eta} + Cy_{\eta\eta} &= 0 \end{aligned} \right\} \tag{9}$$

を用いて物理面の座標を形成する。ここで、

$$\left. \begin{aligned} A &= x_\eta^2 + y_\eta^2, \quad B = x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta, \\ C &= x_\xi^2 + y_\xi^2 \end{aligned} \right\} \tag{10}$$

である。また、計算を容易に進めるために、 ξ 及び η 方向の格子間隔は各々 1 としている。

物理面と計算面との関係を図 1 に示す。

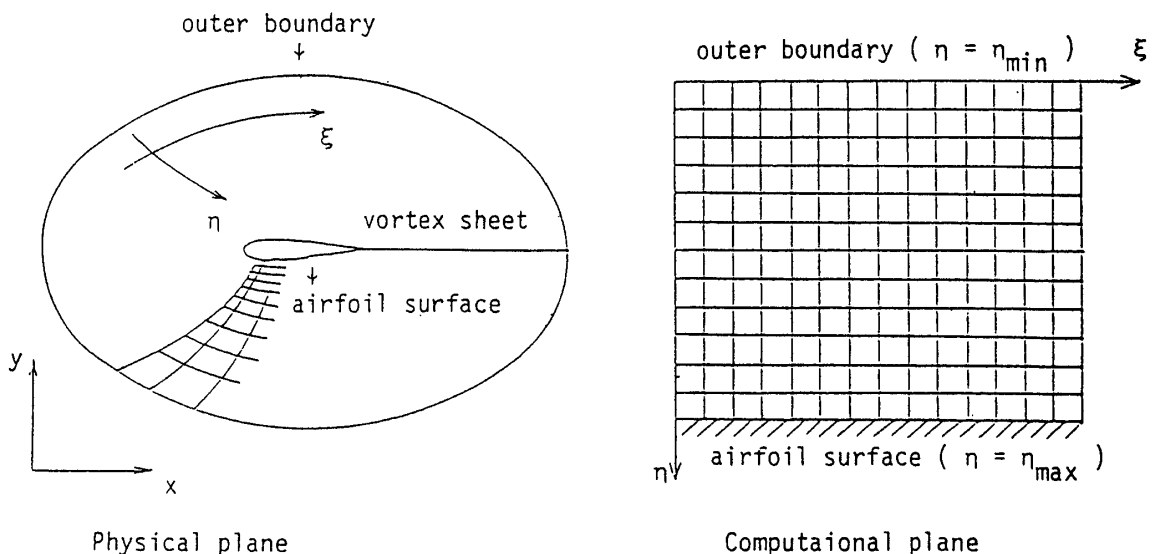


図 1 物理面と計算面との関係

4. 空間微分項の離散化

(4)式を2次の精度で離散化すると,

$$\overleftarrow{\delta}_\xi \left(\frac{\rho U}{J} \right)_{i+\frac{1}{2},j} + \overleftarrow{\delta}_\eta \left(\frac{\rho V}{J} \right)_{i,j+\frac{1}{2}} = 0 \quad (11)$$

となる。ここで、 $(i+\frac{1}{2}, j)$ 及び $(i, j+\frac{1}{2})$ に於ける ρ , A_1 , A_2 , A_3 及び J の値は単純平均で計算される。また、 $U_{i+\frac{1}{2},j}$ 及び $V_{i,j+\frac{1}{2}}$ は,

$$\begin{aligned} U_{i+\frac{1}{2},j} &= A_{1,i+\frac{1}{2},j} (\phi_{i+1,j} - \phi_{i,j}) \\ &+ \frac{1}{4} A_{2,i+\frac{1}{2},j} (\phi_{i+1,j+1} - \phi_{i+1,j-1} \\ &+ \phi_{i,j+1} - \phi_{i,j-1}) \\ V_{i,j+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{4} A_{2,i,j+\frac{1}{2}} (\phi_{i+1,j+1} - \phi_{i-1,j+1} \\ &+ \phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j}) + A_{3,i,j+\frac{1}{2}} (\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j}) \end{aligned} \quad (12)$$

で計算される。さらに、 $\overleftarrow{\delta}_\xi(\cdot)$ 及び $\overleftarrow{\delta}_\eta(\cdot)$ は ξ 及び η 方向の後退差分を表わす演算子とする。

(11)式の離散化は亜音速領域では適当なものであるが、超音速領域に於いては人工粘性を付加する必要がある。ここではHolst^{(6)~(8)}に倣い

$$- \Delta \xi \left(\nu \rho_\xi \frac{|U|}{J} \right)_\xi - \Delta \eta \left(\nu \rho_\eta \frac{|V|}{J} \right)_\eta \quad (13)$$

という人工粘性項を用いる。

従って、(11)式は次の様に変換することができる。

$$\overleftarrow{\delta}_\xi \left[\tilde{\rho}_i \left(\frac{U}{J} \right)_{i+\frac{1}{2},j} \right] + \overleftarrow{\delta}_\eta \left[\bar{\rho}_j \left(\frac{V}{J} \right)_{i,j+\frac{1}{2}} \right] = 0 \quad (14)$$

ここで、 $\tilde{\rho}_i$ 及び $\bar{\rho}_j$ は各々

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_i &= [(1-\nu)\rho]_{i+\frac{1}{2},j} + \nu_{i+\frac{1}{2},j} \rho_{i+k+\frac{1}{2},j} \\ \bar{\rho}_j &= [(1-\nu)\rho]_{i,j+\frac{1}{2}} + \nu_{i,j+\frac{1}{2}} \rho_{i,j+l+\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (15)$$

$$k = \begin{cases} -1 & (U_{i+\frac{1}{2},j} > 0) \\ 1 & (U_{i+\frac{1}{2},j} < 0) \end{cases}, \quad l = \begin{cases} -1 & (V_{i,j+\frac{1}{2}} > 0) \\ 1 & (V_{i,j+\frac{1}{2}} < 0) \end{cases}$$

と表わされる。すなわち、 $\tilde{\rho}_i$ 及び $\bar{\rho}_j$ は人工粘性を加味した密度であり、その人工粘性は(13)式の ρ の微分を常に風上差分で評価することにより導かれる。また、 ν は人工粘性項に対する係数であり

$$\nu_{i+\frac{1}{2},j} = \begin{cases} \max [(M_{i,j}^2 - 1)C, 0] & (U_{i+\frac{1}{2},j} > 0) \\ \max [(M_{i+1,j}^2 - 1)C, 0] & (U_{i+\frac{1}{2},j} < 0) \end{cases} \quad (16)$$

で与えられる。ここで、 M は局所マッハ数、係数 C は通常 $1 < C < 2$ の値を取る。

5. 緩和法

(14)式を形式的に

$$L(\phi_{i,j}) = 0 \quad (17)$$

と書くと、上式は一般に、次の様な反復操作で解くことができる。

$$NC_{i,j}^n + \omega L(\phi_{i,j}^n) = 0 \quad (18)$$

ここで、 N は反復操作を表わし、 ω は緩和パラメータ、肩文字 n 及び $n+1$ は反復レベルを示す。また、 $C_{i,j}^n$ は、

$$C_{i,j}^n = \phi_{i,j}^{n+1} - \phi_{i,j}^n \quad (19)$$

で与えられる。

本研究では、緩和法として演算子近似分割法の一種であるAF2法を用いる。AF2法に於いては反復操作 N は

$$\begin{aligned} \alpha N = & - \left[\alpha - \overleftarrow{\delta}_\eta \bar{\rho}_j \left(\frac{A_3}{J} \right)_{i,j-\frac{1}{2}} \right] \\ & \cdot \left[\alpha \overleftarrow{\delta}_\eta \mp \alpha \beta \overleftarrow{\delta}_\xi - \overleftarrow{\delta}_\xi \tilde{\rho}_i \left(\frac{A_1}{J} \right)_{i+\frac{1}{2},j} \overleftarrow{\delta}_\xi \right] \end{aligned} \quad (20)$$

と表わされる。ここで、 $\overleftarrow{\delta}_\xi(\cdot)$, $\overleftarrow{\delta}_\eta(\cdot)$ は ξ 及び η に関する前進差分の演算子である。

従って、計算手順は次の様な2段階となる。

第1段階)

$$\left[\alpha - \overleftarrow{\delta}_\eta \bar{\rho}_j \left(\frac{A_3}{J} \right)_{i,j-\frac{1}{2}} \right] f_{i,j}^n = \alpha \omega L(\phi_{i,j}^n) \quad (21)$$

第2段階)

$$\left[\alpha \overleftarrow{\delta}_\eta \mp \alpha \beta \overleftarrow{\delta}_\xi - \overleftarrow{\delta}_\xi \tilde{\rho}_i \left(\frac{A_1}{J} \right)_{i+\frac{1}{2},j} \overleftarrow{\delta}_\xi \right] C_{i,j}^n = f_{i,j}^n \quad (22)$$

すなわち、(21)式に於いて2重対角行列を解き、修正値 $f_{i,j}^n$ を求め、その修正値 $f_{i,j}^n$ を用いて(22)式の3重対角行列を解くことにより次の反復レベルの解を得る。 α は緩和反復操作を擬似時間と見なした場合の時間格子幅(Δt)の逆数に相当する任意のパラメータであり、

$$\alpha = \alpha_k = \alpha_H \left(\frac{\alpha_L}{\alpha_H} \right)^{\frac{k-1}{K-1}}, \quad (k=1, 2, \dots, K) \quad (23)$$

で与えられる。また、(22)式中の干 $\alpha\beta\delta_\xi$ の項は、 ξ 方向の減衰項であり、翼上面では後退差分($\overleftarrow{\delta}_\xi$)、翼下面では前進差分($\overrightarrow{\delta}_\xi$)で評価する。すなわち、流れの方向と逆方向に差分することにより減衰効果をもたらす。 β はその減衰項に対する重み係数であり、

$$\beta = \begin{cases} \beta_H \begin{cases} M_{i-1,j} \geq 1 & (\text{翼上面}) \\ M_{i+1,j} \geq 1 & (\text{翼下面}) \end{cases} \\ \beta_L \begin{cases} M_{i-1,j} < 1 & (\text{翼上面}) \\ M_{i+1,j} < 1 & (\text{翼下面}) \end{cases} \end{cases} \quad (24)$$

で与えられる。本研究では、緩和パラメータ $\omega=1.8$ 、 $K=8$ として計算を行なっている。

6. 初期及び境界条件

初期条件としては、計算面全体に一樣流を与える。すなわち、一樣流マッハ数を M_∞ とすると、物理速度 u 、 v 及び速度ポテンシャル ϕ は、

$$u = u_\infty \cos \theta, \quad v = u_\infty \sin \theta, \quad \phi = u_\infty x \quad (25)$$

で与えられる。ここで、 θ は迎角であり、 u_∞ は一樣流速で、一樣流マッハ数 M_∞ と比熱比 γ を用いて、

$$u_\infty = \left[\frac{(\gamma+1)M_\infty^2}{2+(\gamma-1)M_\infty^2} \right]^{1/2} \quad (26)$$

と表わされる。

境界条件としては、翼面境界に於いては、流れが翼面内に流れ込まないとする接線条件を用いる。すなわち、翼面上の格子番号を (i, j_{max}) とすれば、

$$V_{i,j_{max}} = (A_2 \phi_\xi + A_3 \phi_\eta)_{i,j_{max}} = 0 \quad (27)$$

となる。また、

$$\phi_\xi |_{i,j_{max}} = \frac{1}{2} (\phi_{i+1,j_{max}} - \phi_{i-1,j_{max}}) \quad (28)$$

$$\phi_\eta |_{i,j_{max}} = \frac{1}{2} (3\phi_{i,j_{max}} - 4\phi_{i,j_{max}-1} + \phi_{i,j_{max}-2}) \quad (29)$$

であるから、(27)式により陰的に $\phi_{i,j_{max}}$ を求めることができる。遠方に於ける境界条件としては、迎角のない場合は、速度ポテンシャル及び密度を初期値に固定する方法を取り、迎角のある場合は、翼後縁の循環 Γ を用いて、圧縮性の渦解 (compressible vortex solution) より速度ポテンシャルを決定する。渦層 (vortex sheet) に於いては、その境界に垂直な速度成分が連続であるという条件及び速度ポテン

シャルの躍びが、翼後縁の躍びに等しいという条件より求める。

7. 計算結果

遷音速翼の一例としてNACA0012翼を取上げる。本研究で使用した格子系を図2に示す。計算領域は、

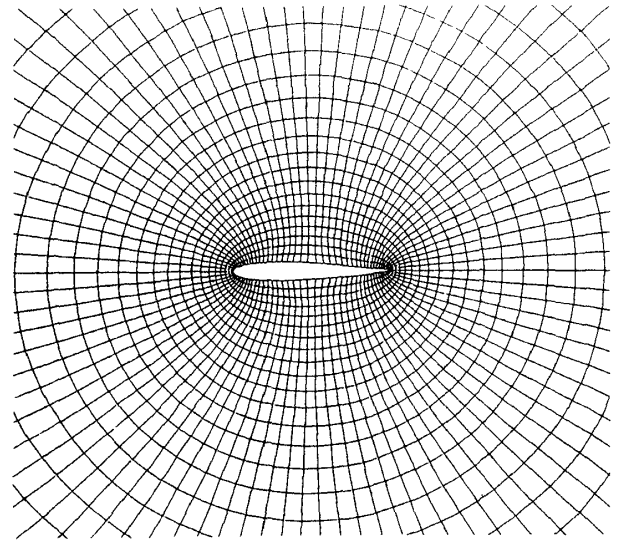


図2 NACA0012まわりの格子配列

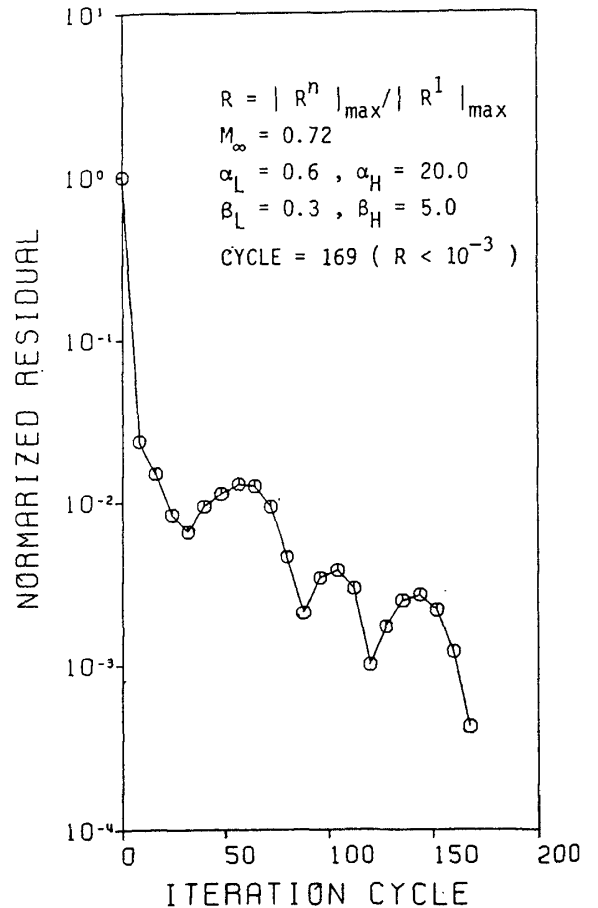


図3 収束過程

遠方境界が翼前方及び後方に翼弦長の10倍、翼上方及び下方に6倍とした。また、翼上に91格子、遠方方向に30格子を取っている。

収束の判定としては、反復レベル n に於ける残差を R^n とすると、最大残差 $|R^n|_{max}$ を用いて、

$$R = |R^n|_{max} / |R^1|_{max} \quad (30)$$

という関係で与えられる正規化された最大残差 R が、 10^{-3} よりも小さくなれば良いという条件を用いた。

図3に一樣流マッハ数 $M_\infty = 0.72$ 、迎角 0° の場合の収束過程図を示す。AF2法のパラメータは、 $\alpha_L = 0.6$ 、 $\alpha_H = 20.0$ 、 $\beta_L = 0.3$ 、 $\beta_H = 5.0$ である。放物状の軌跡を描きながら169サイクルで収束している。次に、同様の条件の下での翼面上の圧力係数の分布を図4(a)に示す。比較のために、各種方法で計算された結果⁹⁾を図4(b)に示す。両図は、ほぼ同一の結果となっていることが判る。この一樣流マッハ数 ($M_\infty = 0.72$) では衝撃波は発生せず、両図共な

だらかな曲線となっている。図4(b)中のTSPは微小擾乱ポテンシャル方程式を基礎方程式としているため少々挙動が異なる。

次に、一樣流マッハ数 $M_\infty = 0.80$ 、迎角 0° の場合の翼面上の圧力係数の分布を図5(a)に示す。AF2法のパラメータは前回と同一であり、図3と同様の収束過程を経て265サイクルで収束した。図5(b)には同様の条件の下でのJameson¹⁰⁾、Holst¹¹⁾、ChattotとCoulombeix¹²⁾、VeillotとViviand¹³⁾及びSchmidt⁹⁾の結果を示している。Jamesonは有限体積法と多重格子法とを組合せた方法で、Holst及びChattotとCoulombeixは演算子近似分割法で、VeillotとViviandは擬似時間依存法で、Schmidtは微小擾乱ポテンシャル方程式を緩和法で各々計算したものである。両図はよく一致しており、翼弦長の約1/2のところでは圧力分布が不連続となり衝撃波が発生していることがわかる。また、保存形の方程

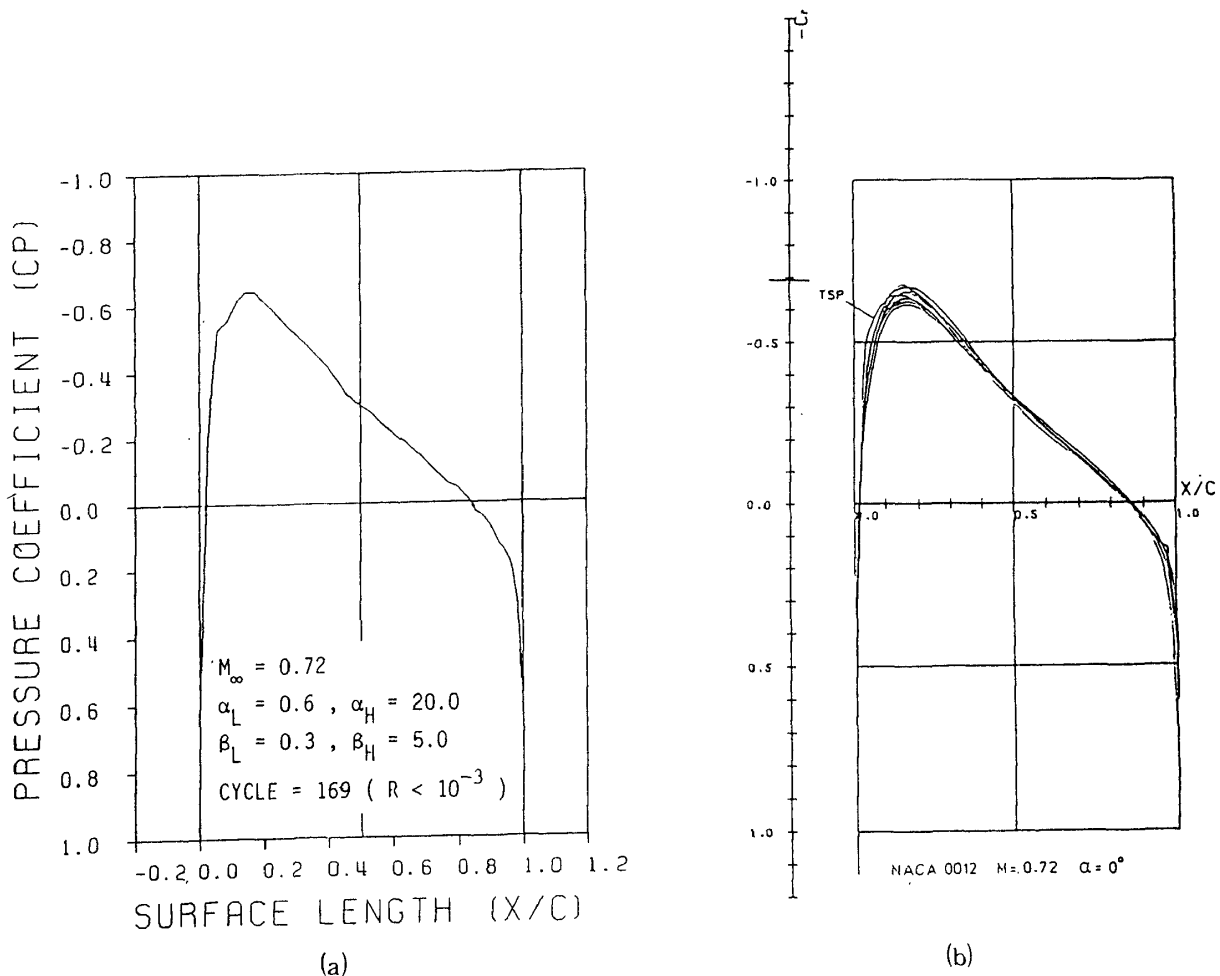
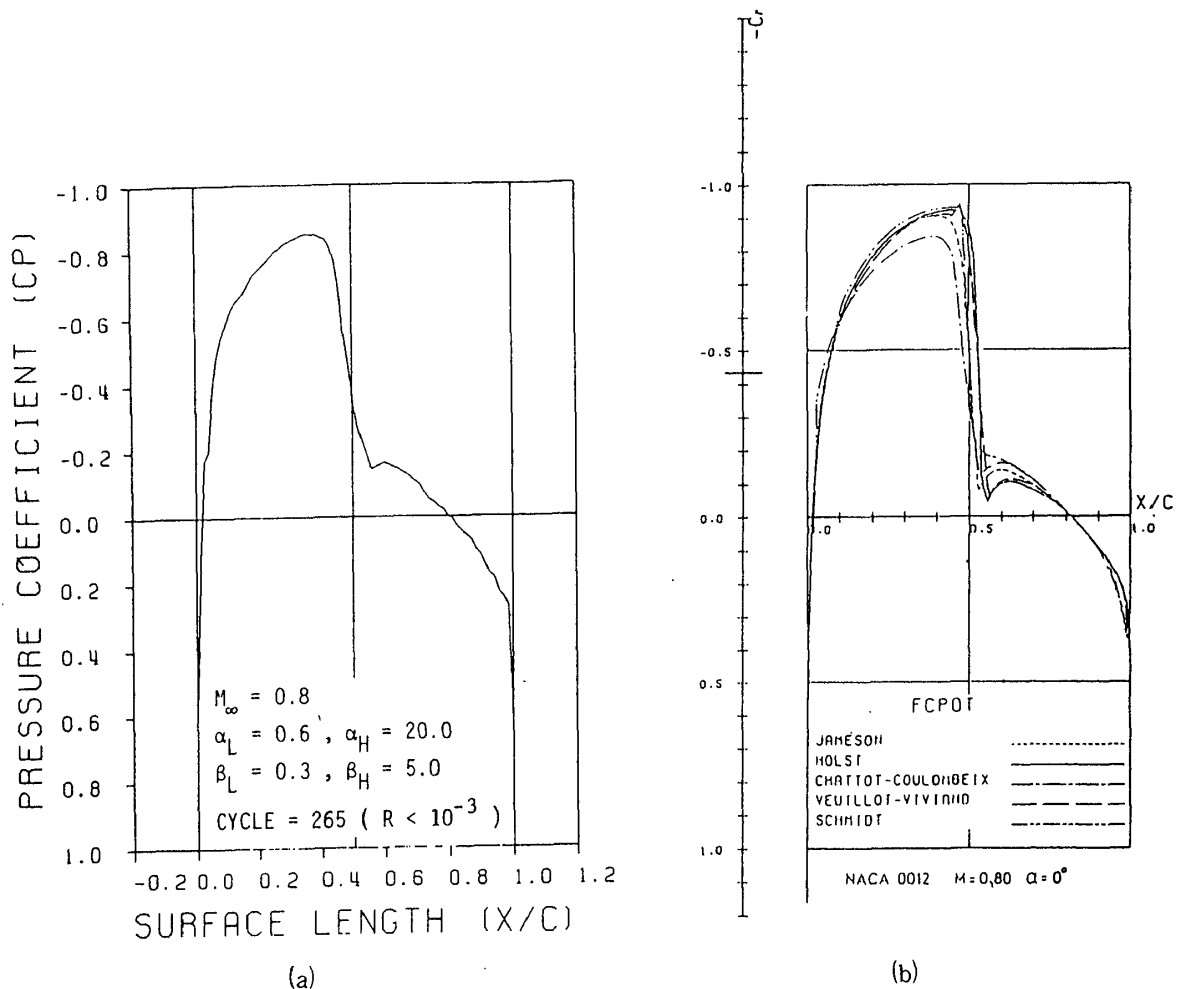


図4 圧力係数の分布 ($M_\infty = 0.72$)

図5 圧力係数の分布 ($M_\infty = 0.80$)

式を基礎式とする際の特長である $X/C = 0.55$ 付近の圧力係数の落ち込みも確認される。

さらに、両場合共、最大残差は前縁及び後縁付近で起きていることも今回の数値実験で確認された。

8. あとがき

以上述べてきた様に、演算子近似分割法は翼まわりの遷音速流れを解析する際に有力な方法であり、解適応格子法と組合せることにより、より少ない格子点数で精度の良い結果を得ることができると期待できる。さらに、タービン翼間の流れ等の内部流れの問題に対しても容易に応用できることを考え合わせると、本方法の有効範囲は極めて広範に渡ると予想される。

ただ、この方法は完全に陰的であるために、現在科学技術計算用に使用されているベクトル・プロセ

ッサや将来稼動することが予想されるパラレル・プロセッサに対する効率が陽的方法に比べて低くなることは否定できない。そこで、今後はその方面に於ける研究が期待される。

参考文献

- 1) Murman, E.M. and Cole, J.D., Calculation of Plane Steady Transonic Flow, AIAA J., 9, 114, 1971.
- 2) Ballhaus, W.F., Jameson, A., and Albert, J., Implicit Approximate-Factorization Schemes for Steady Transonic Flow Problems, AIAA J., 16, 573, 1978.
- 3) Brandt, A., Multi-Level Adaptive Computations in Fluid Dynamics, Proc. AIAA 4th CFD Conf., 100, 1979.

- 4) Jameson, A., Acceleration of Transonic Flow Calculations on Arbitrary Meshes by the Multiple Grid Method, Proc. AIAA 4th CFD Conf., 122, 1979.
- 5) Thompson, J.F., Thames, E.C., and Mastin, C.W., Automatic Numerical Generation of Body-Fitted Curvilinear Coordinate Systems for Fields Containing Any Number of Arbitrary Two-Dimensional Bodies, J. Comp. Phys., 15, 299, 1974.
- 6) Holst, T.L., An Implicit Algorithm for the Conservative, Transonic Full-Potential Equation with Effective Rotated Differencing, NASA TM-78570, 1978.
- 7) Holst, T.L., Implicit Algorithm for the Conservative Transonic Full-Potential Equation using an Arbitrary Mesh, AIAA J., 17, 1038, 1978.
- 8) Holst, T.L. and Brown, D., Transonic Airfoil Calculations using Solution-Adaptive Grids, Proc. AIAA 5th CFD Conf., 136, 1981.
- 9) Rizzi, A. and Viviand, H., Collective Comparison of the Solutions to the Workshop Problems, Notes on Numerical Fluid Mechnocs Vol. 3, 167, 1981.
- 10) Jameson, A., Caughey, D., Jon, W., Steinhoff, J., and Pelz, R., Accelerated Finite-Volume Calculation of Transonic Potential Flows, Notes on Numerical Fluid Mechanics, Vol. 3, 11, 1981.
- 11) Holst, T.L., Solution of the Transonic Full Potential Equation in Conservative Form using an Implicit Algorithm, Notes on Numerical Fluid Mechanics, Vol. 3, 28, 1981.
- 12) Chattot, J.J. and Coulombeix, C., Relaxation Method for the Full-Potential Equation, Notes on Numerical Fluid Mechanics, Vol. 3, 37, 1981.
- 13) Veuillot, J.P. and Viviand, H., Computation of Steady Inviscid Transonic Flows using Pseudo-Unsteady Methods, Notes on Numerical Fluid Mechanics, Vol. 3, 45, 1981.

