

無条件安定な陽的差分法による翼型まわりの粘性流の解析

里 深 信 行* 西 田 雄 亮*

Numerical Solution of Viscous Compressible Flows Past an Airfoil Using Unconditionally Stable Explicit Method

Nobuyuki SATOFUKA and Yuusuke NISHIDA
Kyoto Institute of Technology

ABSTRACT

An unconditionally stable explicit method has been applied to compute compressible laminar flows past an NACA0012 airfoil. The method is based on a combination of central differencing for spatial derivatives with a rational Runge-Kutta time integration scheme. Both transonic ($M = 0.8$) and supersonic ($M = 2.0$) flow cases have been calculated for various Reynolds numbers. Physically plausible results are obtained for each case within practically feasible CPU time.

1. ま え が き

任意形状の物体まわりの粘性圧縮性流の数値計算に際しては、境界層や衝撃波のような、流れの物理量の急激に変化する領域における空間格子幅を分解能に対する要求から十分に小さくしなければならないが、計算機の記憶容量の制約により計算に使用する総格子点数に限界がある。そこで、必然的に不均衡間隔格子を用いることになり、格子硬直性を有することになる。このような問題を時間依存法で解く場合、陽的方法で許される最大時間格子幅が安定性の面で最小空間格子幅によって制限されるので、定常解を得るに必要な繰り返し数が長大となる。従って、経済的理由からこのような問題に対する数値計算法の主流は無条件安定な Beam と Warming¹⁾ の提案した陰的な近似的演算子分解法である。しかし、Beam-Warming 法は定常解への収束性の良い反面、プログ

ラムが複雑で、2次元問題では1時間段階当たり2回もブロック三重対角行列を解く必要があり、この部分の計算時間が全体の計算時間の大半を占めている。ブロック三重対角行列計算のベクトル化率の向上には限界があり、このため、最新のベクトル型計算機のハードウェア性能を最大限に活用することが困難である。

従って、陰的方法に匹敵する数値計算上の安定性とプログラムの簡単さを兼ね備え、ベクトル型計算機及び並列型計算機のハードウェア性能を有効に使いこなせるような数値計算法の開発が強く期待されている。このような要望に応えられる数値計算法の一例として、著者らは無条件安定な新しい陰的差分法を提案し、基礎的な検定問題に対してその有効性を示したが、本論文ではより実際的な問題への適用の一例として、2次元翼型まわりの粘性圧縮性流れの数値計算結果を報告する。

なお、使用した計算機は京都大学大型計算機センターのVP-100である。

* 京都工芸繊維大学工芸学部

2. 基礎方程式

基礎方程式としては、無次元化された一般座標系における保存形表示の2次元ナビエ・ストークス方程式(2.1)を用いる。

$$\frac{\partial \hat{U}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{G}}{\partial \eta} = \frac{1}{R_e} \left(\frac{\partial \hat{R}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{S}}{\partial \eta} \right) \quad (2.1)$$

ここで、

$$\hat{U} = U/J,$$

$$\hat{F} = (\xi_x F + \xi_y G)/J, \quad \hat{G} = (\eta_x F + \eta_y G)/J$$

$$\hat{R} = (\xi_x R + \xi_y S)/J, \quad \hat{S} = (\eta_x R + \eta_y S)/J$$

$$J = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x = 1 / (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi)$$

$$\xi_x = J y_\eta, \quad \xi_y = -J x_\eta$$

$$\eta_x = -J y_\xi, \quad \eta_y = J x_\xi$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (e+p)u \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (e+p)v \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ R_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \sigma_y \\ S_4 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_x = (\varepsilon + 2\mu)u_x + \varepsilon v_y, \quad \tau_{xy} = \mu(u_y + v_x)$$

$$\sigma_y = (\varepsilon + 2\mu)v_y + \varepsilon u_x$$

$$R_4 = u\sigma_x + v\tau_{xy} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{k}{P_r} T_x$$

$$S_4 = v\sigma_y + u\tau_{xy} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{k}{P_r} T_y$$

となる。また、基準レイノルズ数とプラントル数は

$$R_e = \frac{\bar{\rho}_\infty \bar{a}_\infty \bar{c}}{\sqrt{\gamma} \bar{\mu}_\infty} \quad (2.2)$$

$$P_r = \frac{\bar{\mu}_\infty \bar{C}_{p\infty}}{k_\infty} \quad (2.3)$$

である。無次元化の関係式は

$$\begin{cases} \bar{x} = \bar{c}x, \quad \bar{y} = \bar{c}y, \quad \bar{t} = \bar{c}\sqrt{\gamma}t/\bar{a}_\infty \\ \bar{u} = \bar{a}_\infty u/\sqrt{\gamma}, \quad \bar{v} = \bar{a}_\infty v/\sqrt{\gamma}, \quad \bar{\rho} = \bar{\rho}_\infty \rho \\ \bar{p} = \bar{p}_\infty p, \quad \bar{T} = \bar{T}_\infty T, \quad \bar{e} = \bar{p}_\infty e \\ \bar{\mu} = \bar{\mu}_\infty \mu, \quad \bar{k} = \bar{k}_\infty k \end{cases} \quad (2.4)$$

である。ただし、有次元量には「-」を付けて無次

元量と区別し、代表長さは \bar{c} 、基準の物理量は翼前方の無限遠の一様流の値とし、添字「 ∞ 」を付ける。なお、(2.2)、(2.3)式の \bar{a}_∞ は基準状態の音速、 $\bar{C}_{p\infty}$ は定圧比熱、 γ は比熱比である。

次に、粘性係数 μ と第2粘性係数 ε はストークスの仮定($2\varepsilon + 3\mu = 0$)を満たすものとし、粘性係数 μ はサザーランドの公式(2.5)を満足するものとする。

$$\mu = T^{3/2} \left(\frac{S+1}{T+S} \right) \quad (2.5)$$

ただし、サザーランドの定数 S の値は $S = 110.4/268.5$ とする。

また、単位体積当りの全エネルギー e 及び圧力 p は理想気体に対して、それぞれ

$$e = \frac{p}{\gamma-1} + \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2) \quad (2.6)$$

$$p = \rho T \quad (2.7)$$

と表わされる。

3. 数値計算法

(2.1)式のナビエ・ストークス方程式の空間微分項を中心差分法で離散化すると

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \mathbf{f}(\mathbf{U}) \quad (3.1)$$

のような時間に関する連立常微分方程式となる。本論文で提案する数値計算法では(3.1)式の時間積分法として有理ルンゲ・クッタ(RRK)法²⁾法を用いる。RRK法の計算過程を(3.1)式に適用した場合

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^n + \frac{2\mathbf{g}_1(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2) - \mathbf{g}_3(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_1)}{(\mathbf{g}_3, \mathbf{g}_3)} \quad (3.2)$$

$$\mathbf{g}_1 = \Delta t \mathbf{f}(\mathbf{U}^n), \quad \mathbf{g}_2 = \Delta t \mathbf{f}(\mathbf{U}^n + c_2 \mathbf{g}_1)$$

$$\mathbf{g}_3 = b_1 \mathbf{g}_1 + b_2 \mathbf{g}_2$$

となる。ただし、 b_1, b_2, c_2 はRRK法のパラメータで $b_1 + b_2 = 1$ を満たし、 (\mathbf{d}, \mathbf{e}) はベクトル \mathbf{d}, \mathbf{e} の内積を表わす。

RRK法は単一の方程式に対し無条件安定であり、一般に1次精度である。一般のベクトル型の方程式に対しては A 安定の意味で無条件安定ではないが、 $b_2 \cdot c_2$ の値により A_0 あるいは $A(\alpha)$ 安定となり、他の陽的差分法よりも安定条件は緩い。また、 $b_2 \cdot c_2$

$= -0.5$ のとき2次精度となる。

4. 格子形成法

複雑な形状をした2次元物体まわりの流れを数値的に解くには、まず物体形状をできるだけ正確に数値的に表現する必要がある。本論文では格子点系の数値的生成法として、Thompson³⁾らにならって、ポアソン方程式のディリクレ問題を数値的に解いて格子を形成する楕円型生成法を採用する。この方法では、図1のように物理面 (x, y) 、計算面 (ξ, η) とすると、複雑な形状をした物理面での境界 Γ_1, Γ_3 は計算面において ξ 軸に平行な直線 Γ_1^*, Γ_3^* に変換される。この変換に際してはポアソン方程式、

$$\begin{cases} \xi_{xx} + \xi_{yy} = P(\xi, \eta) \\ \eta_{xx} + \eta_{yy} = Q(\xi, \eta) \end{cases} \quad (4.1)$$

を用いる。数値計算上では独立変数を (x, y) から (ξ, η) に変換した方が境界条件が簡単となるので、独立変数を交換すると、方程式は

$$\begin{cases} \alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta} = -J^2(x_\xi P + x_\eta Q) \\ \alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta} = -J^2(y_\xi P + y_\eta Q) \end{cases} \quad (4.2)$$

となる。ただし、 $\alpha = x_\eta^2 + y_\eta^2$, $\beta = x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta$, $\gamma = x_\xi^2 + y_\xi^2$, $J = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi$ である。境界条件は Γ_1^* 上で $x = f_1(\xi, \eta_1)$, $y = g_1(\xi, \eta_1)$, Γ_3^* 上で $x = f_3(\xi, \eta_3)$, $y = g_3(\xi, \eta_3)$ と簡単化される。(4.2)式をこの境界条件に従ってSOR法で解くことにより、必要な格子点系を形成できる。ポアソン方程式(4.1)の強制項 P, Q は格子点分布の制御をするも

ので、ここではVisbolとKnight⁴⁾らの提案した形式を用いる。彼らは、格子点が境界近傍で直交に近い分布になるように制御する初期変換と、初期変換で得た格子点系をもとにして境界近傍に格子を集中させる最終変換との2段階の格子点分布制御法を提案しているが、著者らは初期変換のみを採用し、その変換で得た直交格子点系を ξ 一定の線に沿って3次補間することによって境界近傍に格子点を集中させる様変更した。初期変換における強制項 P, Q としては

$$P(\xi, \eta) = \frac{1}{h_\xi h_\eta} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{h_\eta}{h_\xi} \right), \quad Q = 0 \quad (4.3)$$

を用いた。ただし、 $h_\xi = \sqrt{x_\xi^2 + y_\xi^2}$, $h_\eta = \sqrt{x_\eta^2 + y_\eta^2}$ である。

上述の方法を用いて形成した格子点系の一例を図2に示す。NACA0012翼型近傍のC型格子の一部を示し、翼面上の格子点数は129である。

5. 2次元翼型まわりの流れへの応用

5.1 計算条件と境界条件

著者らの提案した新しい陽的差分法を一様流中に置かれた2次元翼型まわりの超音速及び遷音速粘性流問題へ応用した。翼型としてはNACA0012を対象とした。流体はプラントル数、 $P_r = 0.72$, 比熱比、 $\gamma = 1.4$ の理想気体とし、翼面は断熱壁と仮定する。一様レイノルズ数 R_{e_∞} と(2.3)式の基準レイノルズ数 R_e の関係は $R_{e_\infty} = \sqrt{\gamma} M_\infty R_e$ となり、計算に際しては R_{e_∞} の値を与える。なお、RRK法のパラメー

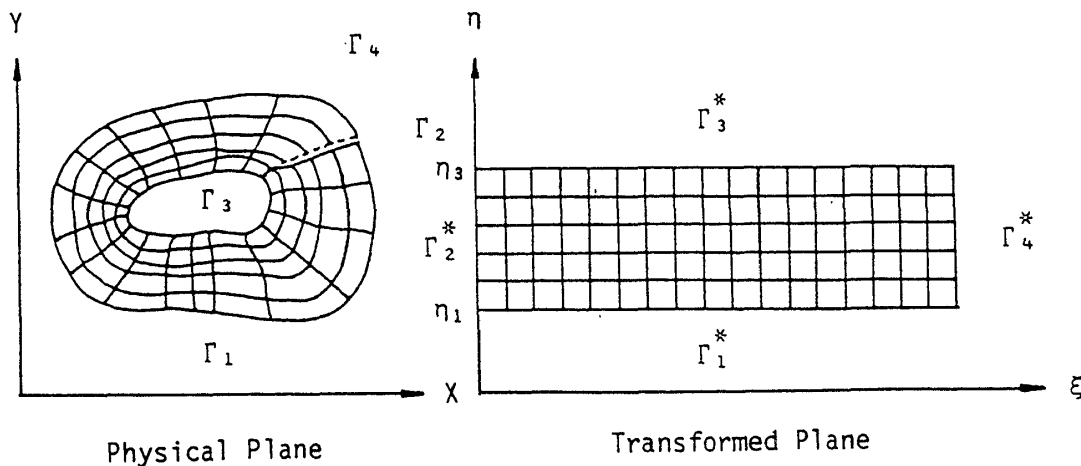


図1 格子形成法の概略図

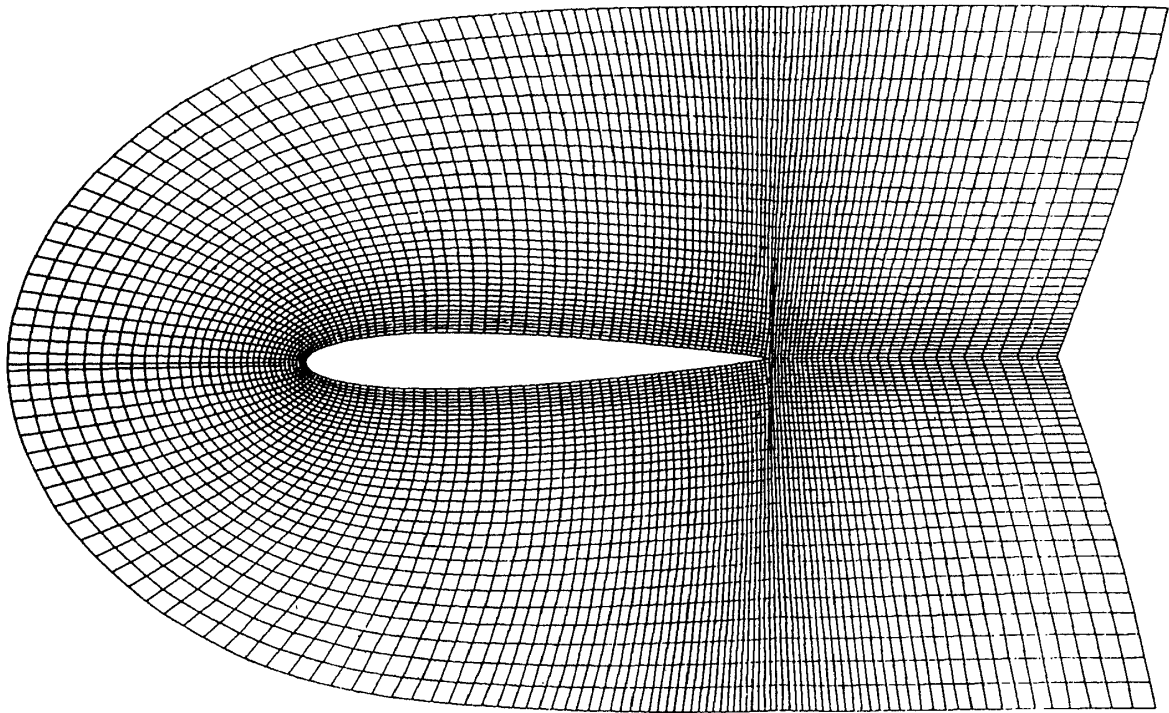


図2 NACA0012翼型近傍のC型格子

タ b_1, b_2, c_2 については $b_2 c_2 = -0.5, c_2 = 0.5$ とする。

初期条件としては、物体が瞬間的に運動を始めるものとして、全計算領域にわたって一様の値を設定して計算を始める Impulsive start を用いる。

5.2 境界条件

5.2.1 外側境界 ($\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_7, \Gamma_8$)

数値計算に用いた計算領域及び境界を図3に示す。超音速の流れ場においては、擾乱は衝撃波を越えて上流側へは伝播しない。そこで、境界 Γ_1 では衝撃波離脱距離よりもその位置を物体から遠方にとり、一様流の値で固定する。境界 Γ_2, Γ_3 については、 Γ_1 との境界点を離脱衝撃波の前方にとり、密度、速度、圧力を対角方向に外挿する。境界 Γ_7, Γ_8 では、各物理量は連続的に流出すると考えられるので、密度、速度及び圧力を外挿する。

遷音速の流れ場においては、擾乱が上流側へ伝播する可能性があるので、境界 $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ を物体より十分遠方の位置にとり、流体の粘性によって擾乱を減衰させるようにする。このようにして決定した境界上では、密度、速度及び圧力を一様流の値で固定

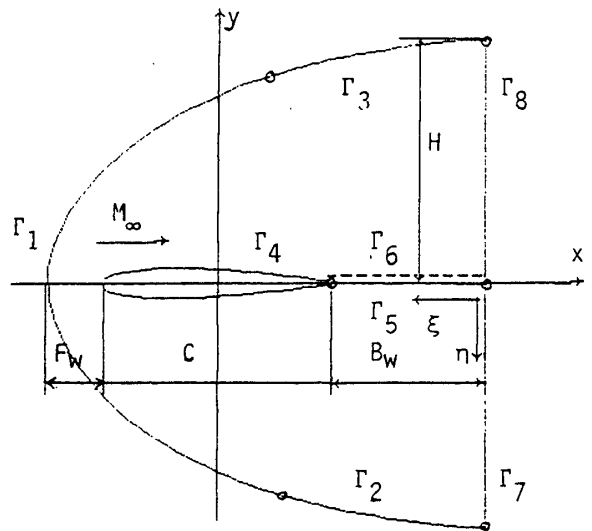


図3 翼まわりの境界条件の概略図

する。境界 Γ_7, Γ_8 で超音速流の場合と同様に、密度、速度及び圧力を外挿する。

5.2.2 物体表面 (Γ_4)

速度は粘着条件より $u = v = 0$ である。物体面上の温度 T_w は断熱壁の仮定より $\partial T / \partial \eta|_w = 0$ を片側差分で陽的に求める。同じく圧力 P_w は物体面上でナビエ・ストークス方程式の非定常項が $\partial \rho u / \partial t|_w$

$=\partial\rho v/\partial t|_w=0$ であるので、運動方程式が

$$\frac{\partial \hat{F}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{G}}{\partial \eta} = \frac{1}{R_e} \left(\frac{\partial \hat{R}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{S}}{\partial \eta} \right) \quad (5.1)$$

のような圧力勾配 P_ξ, P_η についての連立方程式となり、これより P_η を求め、片側差分で陽的に求める。

5.2.3 後流境界 (Γ_5, Γ_6)

物理面において、境界 Γ_5, Γ_6 は同一部分に重ねられていないので、内点は境界をはさんで連続的に変化すると考えられる。よって、境界上の密度、速度、圧力は内点より平均して求める。

5.3 計算結果と検討

5.3.1 遷音速流の結果

遷音速の計算はマッハ数 0.8、一様レイノルズ数 500 について行なった。また、C型格子の領域は図3における F_w, B_w, H を翼弦長との比でそれぞれ $F_w=5.5, B_w=5.5, H=8$ とする。総格子点数は 257×65 である。

非粘性または高レイノルズ数の流れでは、流体は翼前縁部で一度圧縮されたあと、翼面に沿ってしだ

いに膨張するが、後縁では流体が翼面に沿って2方向から合流するので再び圧縮される。従って、 $M_\infty=0.8$ の場合 NACA0012 翼型では超臨界となるので流体は超音速にまで加速され、下流で亜音速となる条件を満足するために翼面上に衝撃波が形成される。しかしながら本計算の場合のような比較的低いレイノルズ数の場合には翼面近傍での粘性層が厚くなり、流れの様子は高レイノルズ数の場合とは若干異なると予想される。

図4は迎角 10° のときの等マッハ数線図を示すが、翼前縁から後方に x 軸に平行に等マッハ線が密集している領域が認められ厚い粘性層の存在を示している。また迎角のある翼によって後流が波打っている様子と翼上面後方部の空間に死水域が存在することが認められる。前縁の直後にごくわずかに超音速領域が存在するが衝撃波は強い粘性拡散により粘性層と融合し存在が認められない。

図5には図4と同一の場合に対する等密度線図を示す。この図からも等マッハ線図と同様の現象が確認できるが、後流領域でのカルマン渦類似の流れ模様がより明白に示されている。

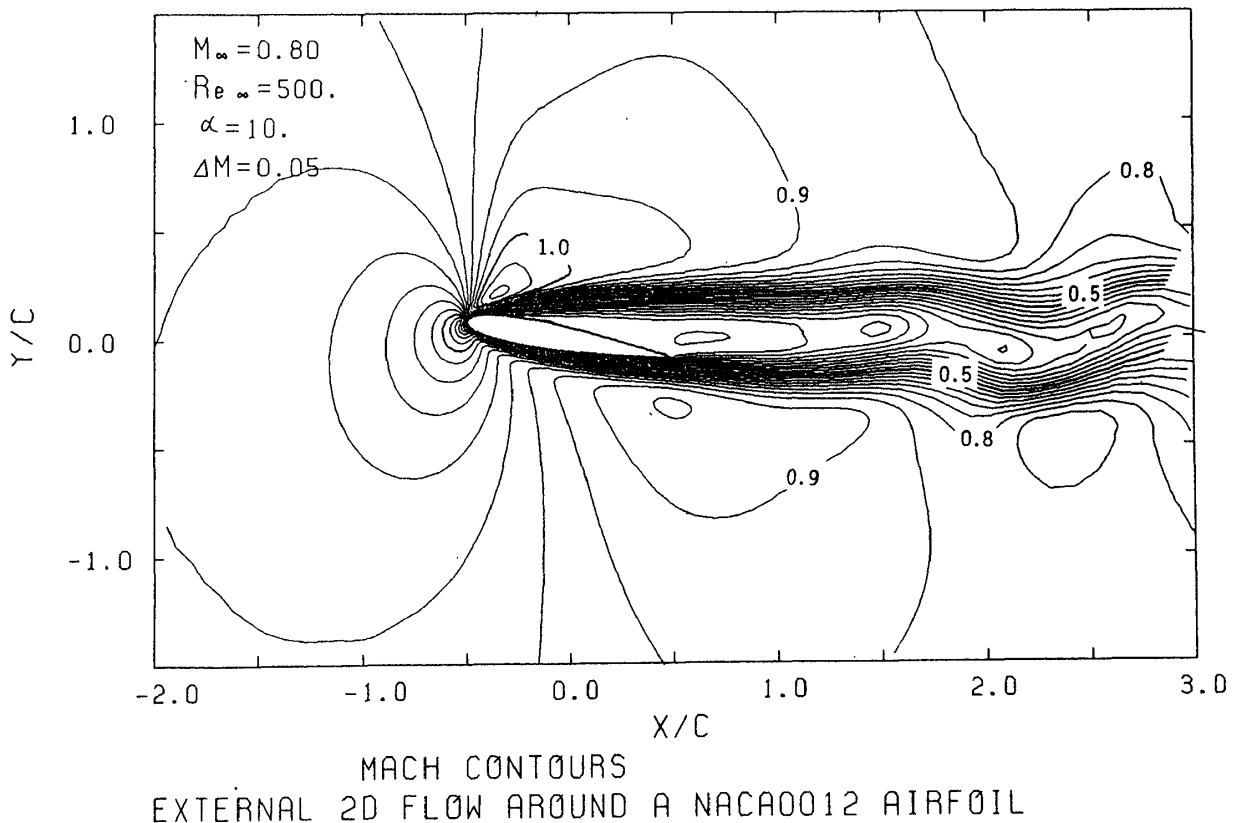
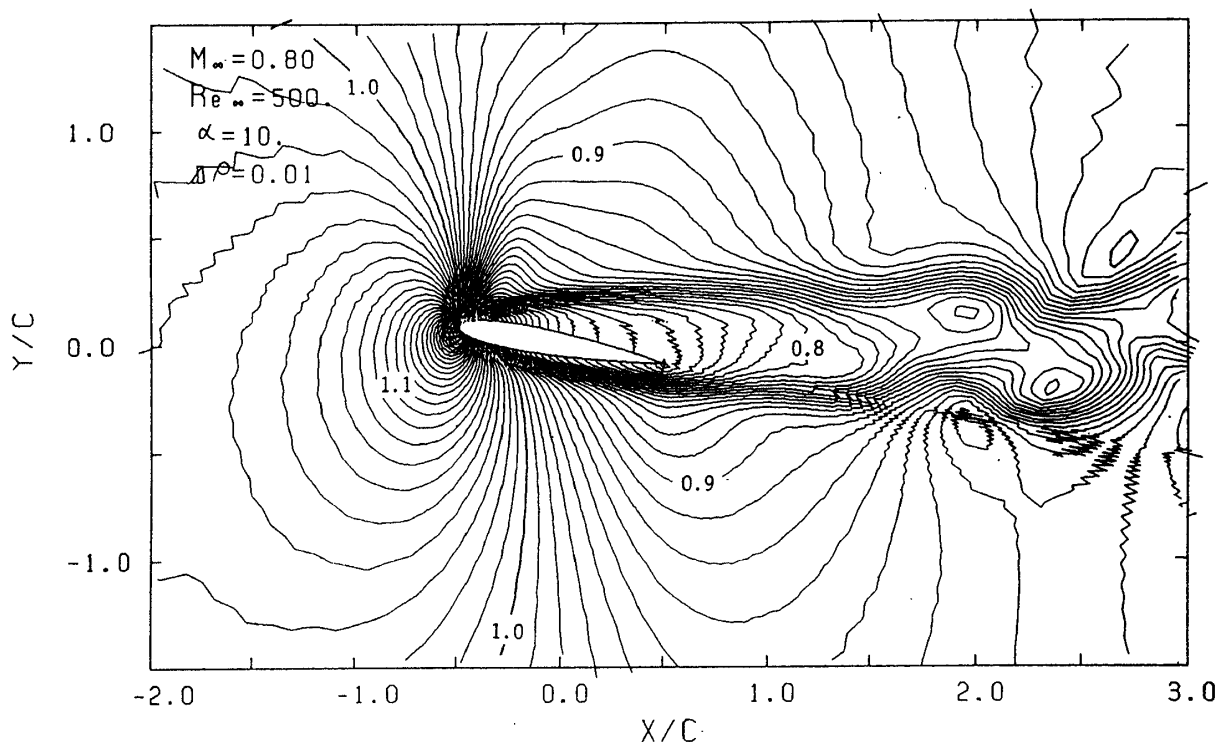


図4 等マッハ数線図

図6には速度ベクトル線図を示す。図より翼面上の厚い粘性層の存在、粘性層の剝離、後流の流速分布や渦の存在など翼型まわりの低レイノルズ数流れの特徴的な流れ模様が明白に認められる。

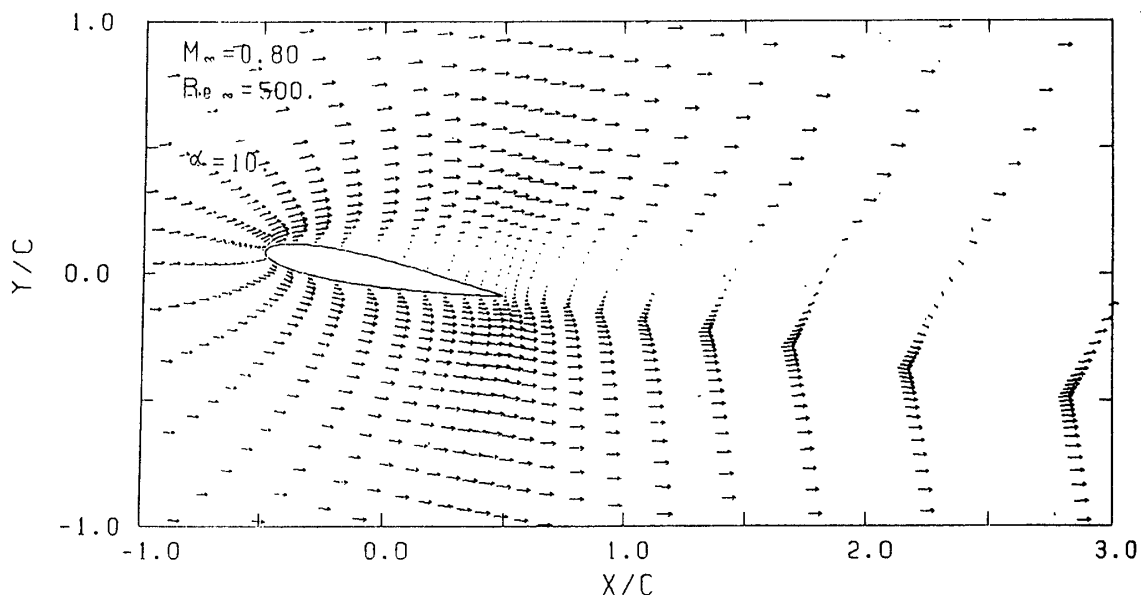
翼面上の圧力係数の分布を図7に示す。図中、(a)

は迎角 0° 、(b)は迎角 10° の場合に対するものである。迎角 0° では、非粘性の場合、翼弦長の50%程度の場所に衝撃波が存在し、圧力係数の値が不連続的に変化するが、本計算の場合には、圧力係数は滑らかな分布を示している。また、非粘性の場合には翼後



DENSITY CONTOURS
EXTERNAL 2D FLOW AROUND A NACA0012 AIRFOIL

図5 等密度線図



EXTERNAL 2D FLOW AROUND A NACA0012 AIRFOIL

図6 速度ベクトル線図

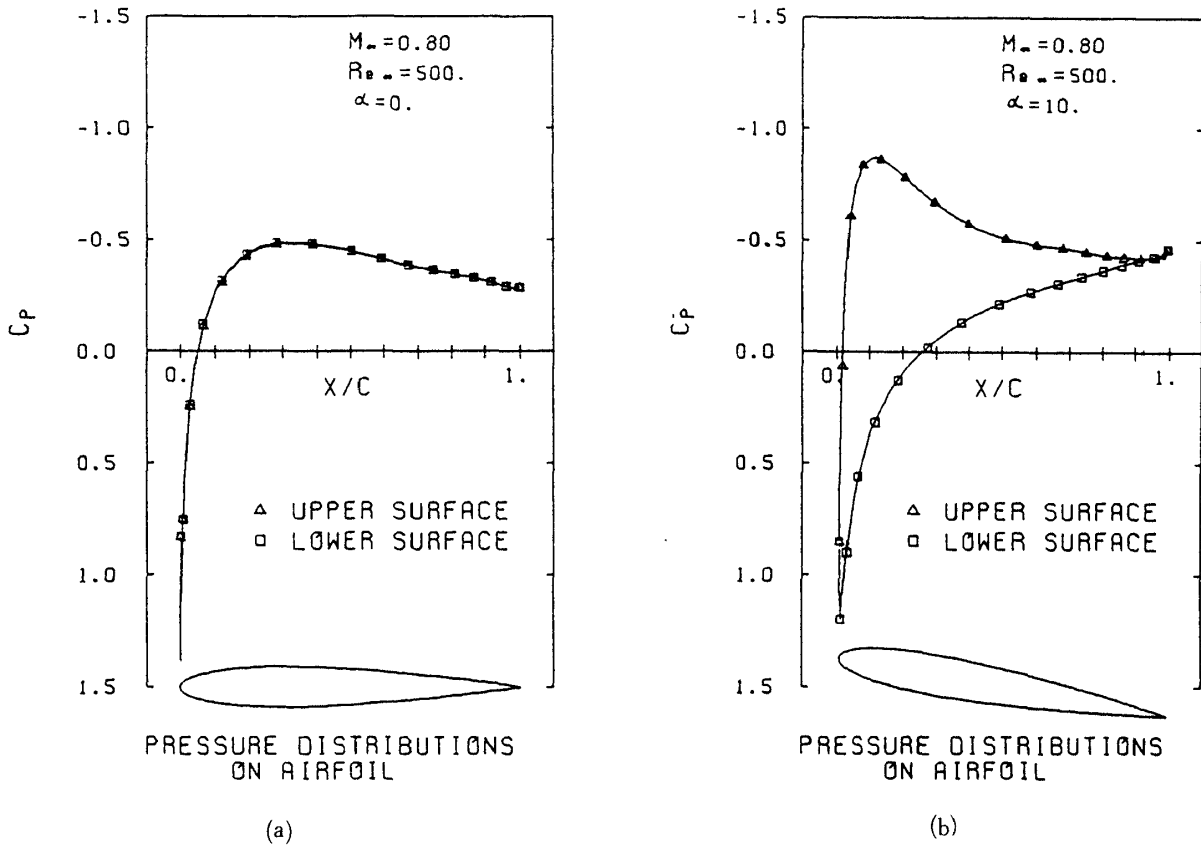


図7 圧力係数の分布図

縁での圧力がよどみ圧力付近まで回復するが、低レイノルズ数流れでは強い粘性散逸効果により圧力が大気圧より低いままである。迎角 10° の場合には、翼上面で流れが剥離し、剥離点より後方では圧力はほぼ一定となっているのが認められる。下面では厚い粘性層による排除効果により流れは単調な膨張流となっている。

5.3.2 超音速流の結果

超音速の計算はマッハ数 2.0，一様レイノルズ数 106 と 1000 について行なった。C型格子の領域は遷音速流のときと同様に、 $R_{e\infty} = 106$ のとき $P_w = 1.0$ ， $B_w = 2.0$ ， $H = 2$ 。また、 $R_{e\infty} = 1000$ のとき $F_w = 0.3$ ， $B_w = 2.0$ ， $H = 2$ とし、総格子点数は $R_{e\infty} = 106$ のとき 257×65 ， $R_{e\infty} = 1000$ のとき 257×257 とした。

図8に一様レイノルズ数 1000，迎角 10° の等マッハ線図を示す。超音速の非粘性または高レイノルズ数の流れでは翼の前方で流体が圧縮され離脱衝撃波が発生する。離脱衝撃波背後の流れは丸い翼前縁近

傍では亜音速となり、後流に向かって超音速にまで膨脹するが、後縁で再圧縮されるため再圧縮衝撃波を生ずる。翼前方の離脱衝撃波は等マッハ線の密集する層として明瞭に認められるが、低レイノルズ数なので遷音速のときと同様に翼面近傍の粘性層が厚く、その排除効果により、実質的な翼面形状は変化し後縁での十分な再圧縮が行なわれるため、再圧縮衝撃波が明白には観察されない。このことは図9に示す等密度線図からもわかる。一様流が亜音速の場合に比較して翼上面での剥離はそれ程顕著ではなく、翼後縁の直前にわづかに認められる。主流が超音速の場合に対する速度ベクトル線図10に示す。(a)は $R_{e\infty} = 106$ ，(b)は $R_{e\infty} = 1000$ の場合をそれぞれ示している。(a)と(b)を比較すると、レイノルズ数が高くなると離脱衝撃波で流れ方向が明白に不連続的に変化していないことがわかる。また、流速自身さえも減速していることが認められる。これに対し、 $R_{e\infty} = 106$ の場合は衝撃波層が厚くなるため、波面での速度ベクトルの変化が判定し難い。

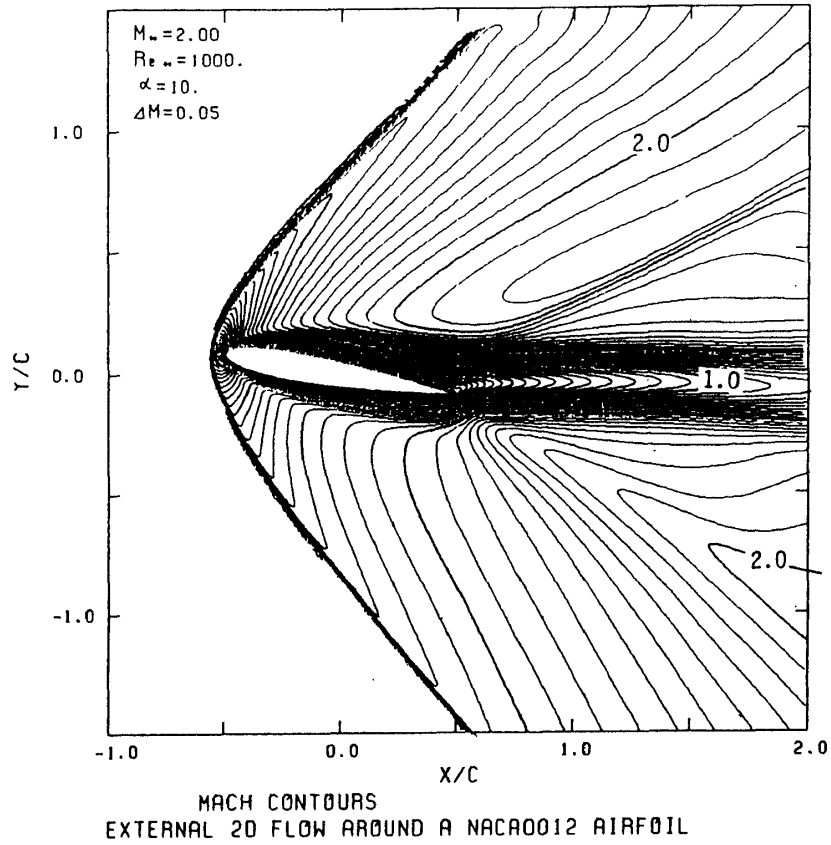


図8 等マッハ数線図

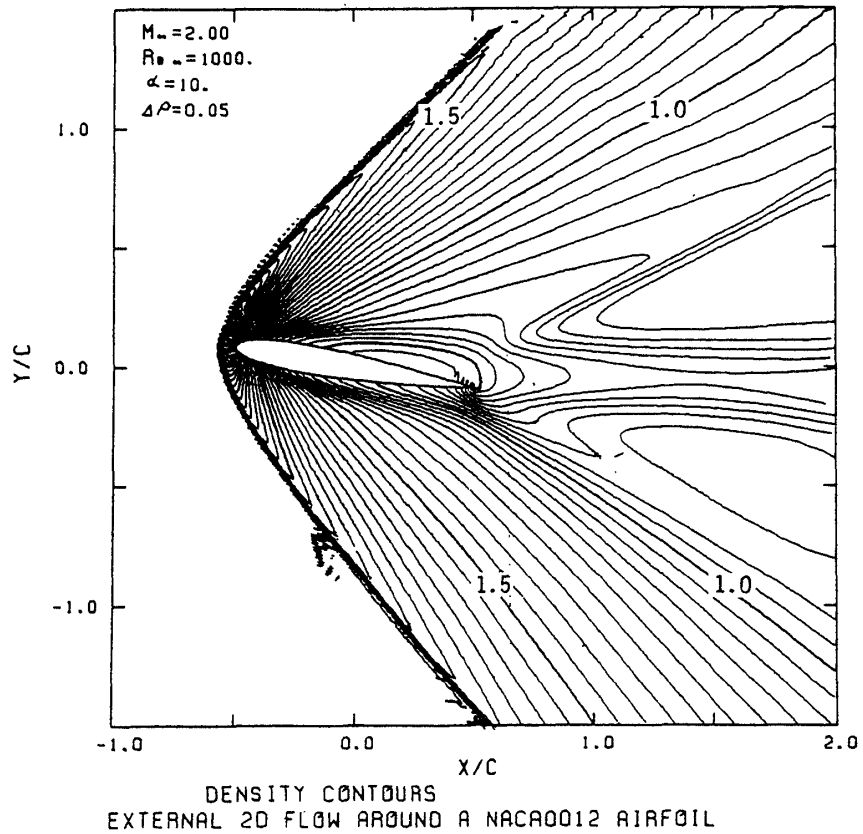
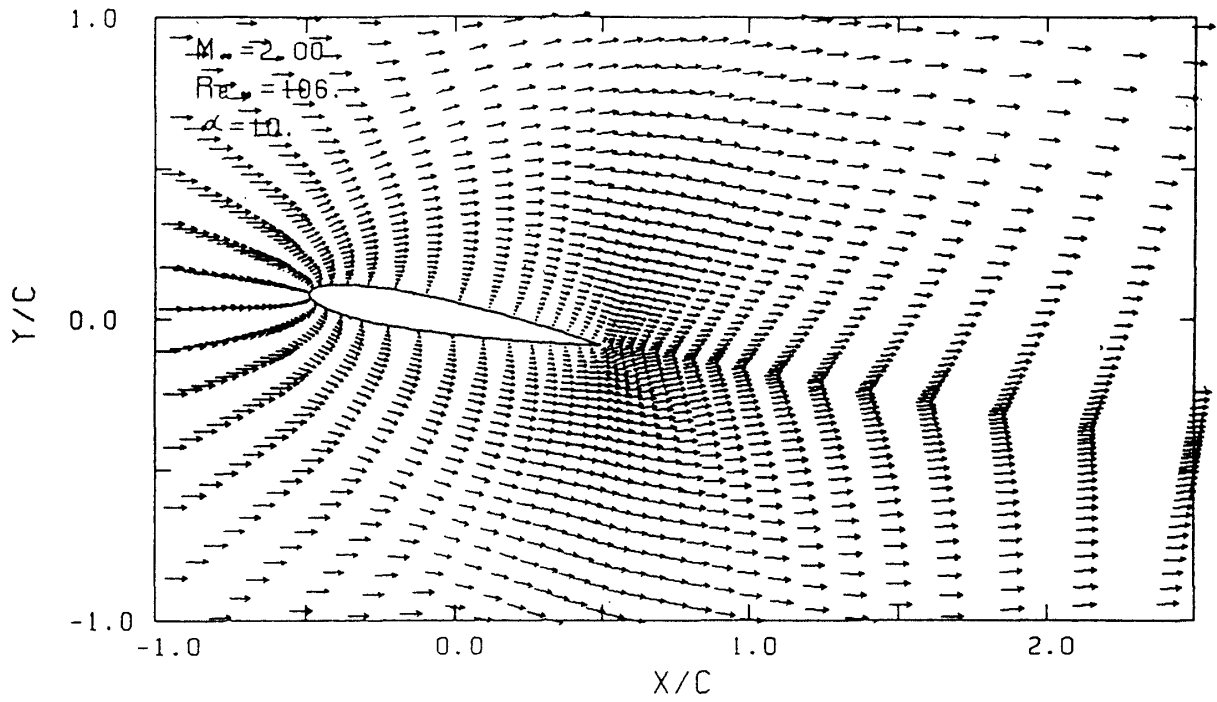
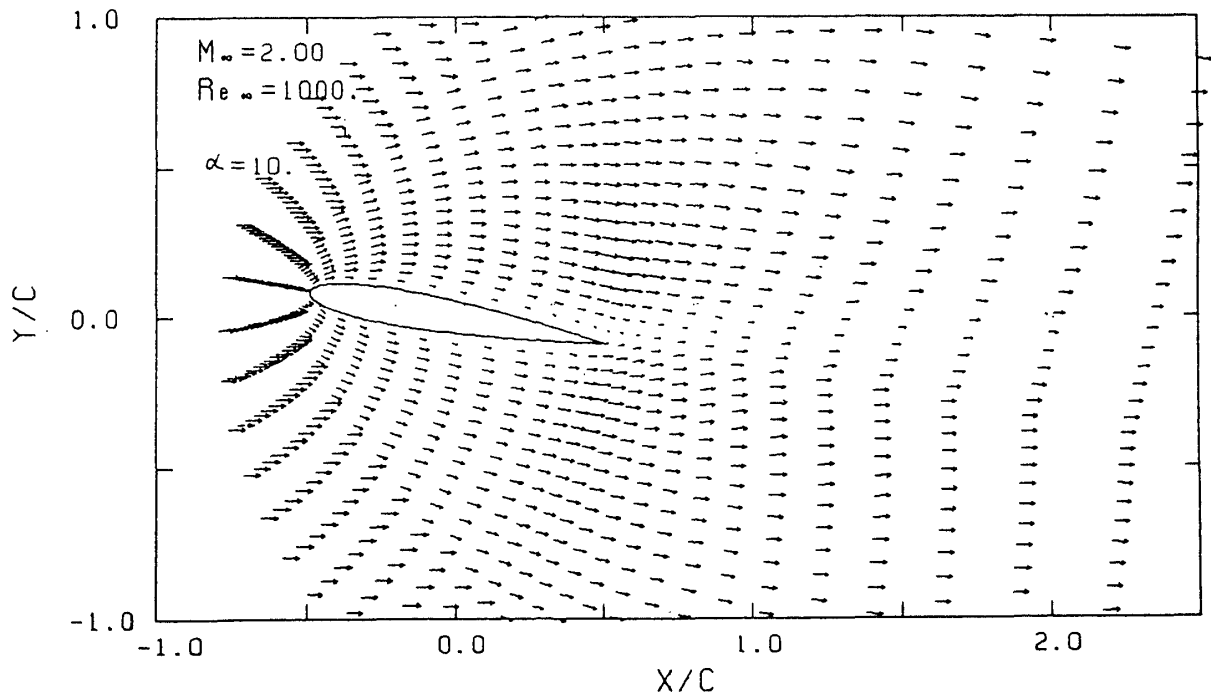


図9 等密度線図



EXTERNAL 2D FLOW AROUND A NACA0012 AIRFOIL

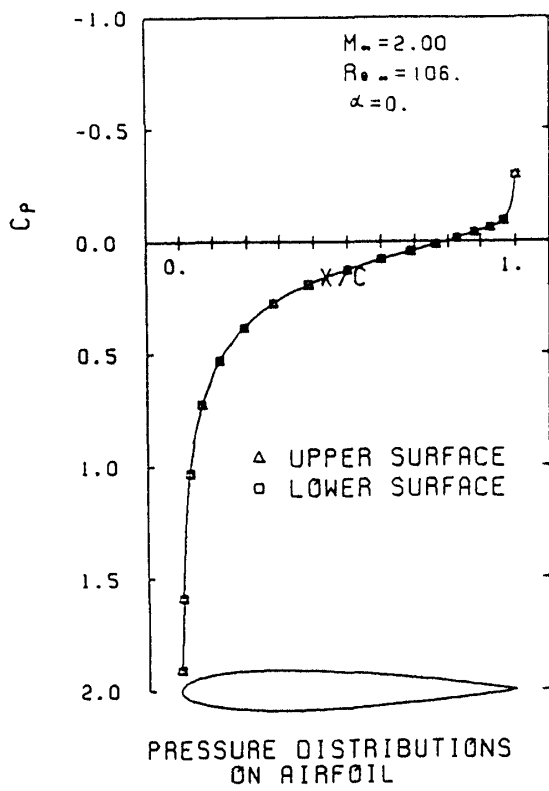
(a)



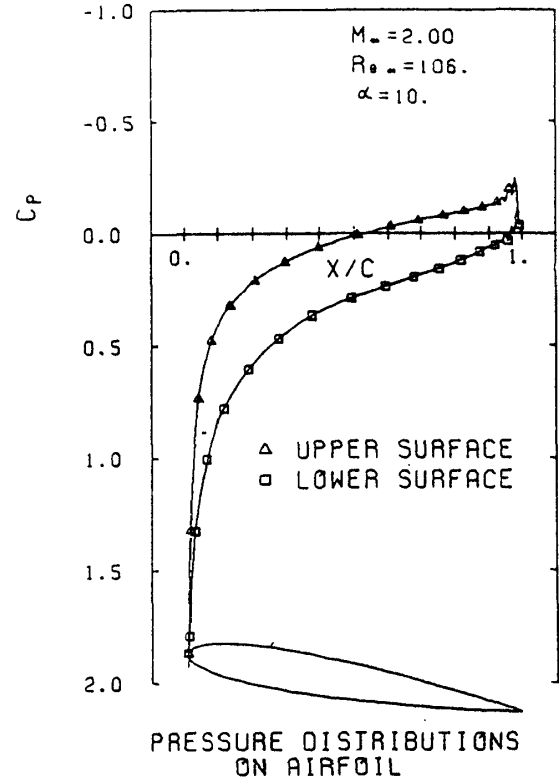
EXTERNAL 2D FLOW AROUND A NACA0012 AIRFOIL

(b)

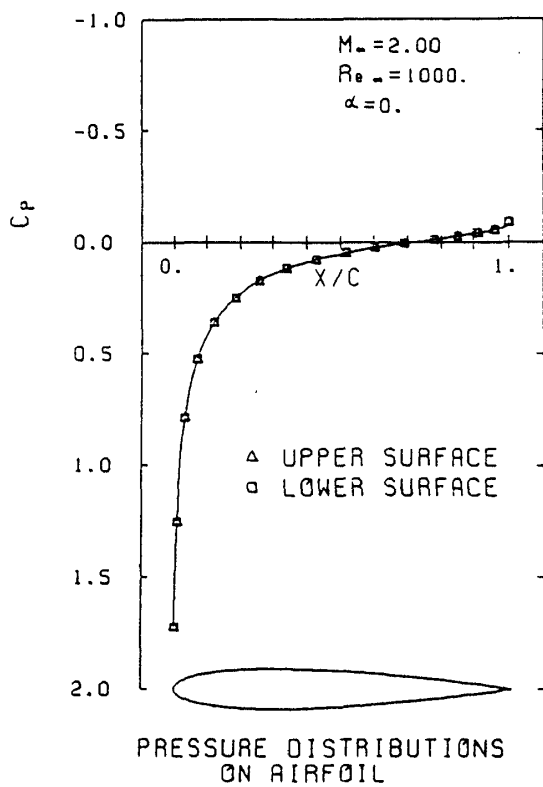
図10 速度ベクトル線図



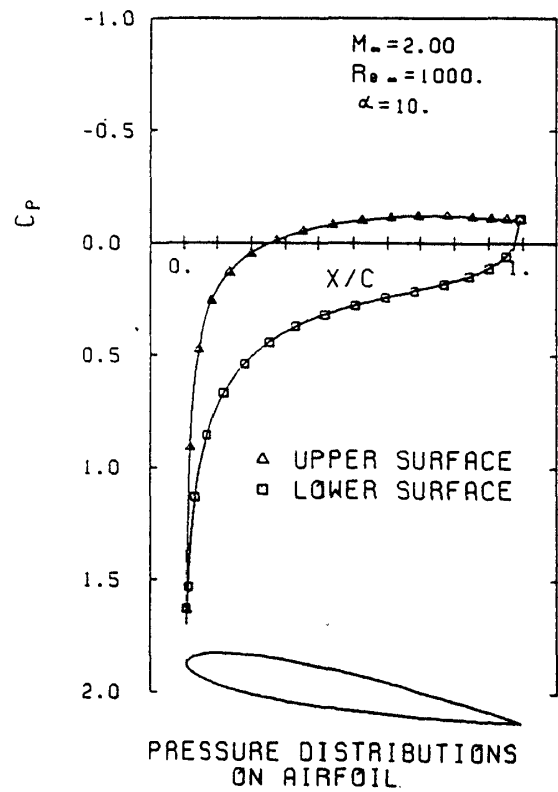
(a)



(b)



(c)



(d)

図 11 圧力係数の分布図

図 11 は翼面での圧力係数の分布を示し、(a)及び(b)は $R_{e\infty} = 106$ について迎角 0° 及び 10° 、(c)及び(d)は $R_{e\infty} = 1000$ について迎角 0° 及び 10° の場合に対する結果をそれぞれ示す。(a)と(c)、(b)と(d)を比較すると一様レイノルズ数が高い方が流体は膨張しやすいことがわかる。従って、翼に働く揚力は $R_{e\infty} = 1000$ の場合の方が大きく、また抵抗も小さい。 $R_{e\infty} = 106$ の場合には、連続体の仮定が成立するかどうか問題となる領域であり、従って翼表面での粘着条件の設定の妥当性には検討の余地がある。実験結果などの比較に際しては適当な滑り条件の採用が考慮されるべきであろう。

6. 結 論

新しい陽的差分法を2次元翼型 NACA0012 まわりの粘性圧縮性流体の流れの計算に応用した結果、物理的に妥当な流れ場が遷音速の場合で約 990 秒という工学上実用的な時間内に計算できることが確認された。本方法のベクトル型計算機における有効性を検討するために、京都大学大型計算機センターの FACOM M-382 と VP-100 の両方を使用して、 257×65 の格子に対する、同一の条件での1時間ステップ当りに要する CPU 時間を比較すると表 1 の結果が得られた。これより VP-100 での所要時間が M-382 の 1/30 以下となることが確認でき、本方法がベクトル型計算機に極めて適しているとの結論が得られた。

境界条件の改善、残差平均法の導入により、本方

表 1 ベクトル化による計算能率の向上

number of points	cpu ; usec/cycle	
	VP-100	M-382
256 x 64	122	4141

法の収束率を良くすることが今後の課題として考えられる。

参 考 文 献

- 1) Beam, R.M. and Warming, R.F., An Implicit Factored Scheme for the Compressible Navier-Stokes Equations, AIAA Paper 77-645.
- 2) Satofuka, N. and Tsujita, M., A New Explicit Method for the Numerical Solution of the Compressible Navier-Stokes Equations, Proc. BAIL II Conf., 364, 1982.
- 3) Thompson, J.F., Thames, F.C., and Mastin, C.W., Automatic Numerical Generation of Body-Fitted Curvilinear Coordinate Systems for Fields containing Any Number of Arbitrary Two-Dimensional Bodies, J. Comp. Phys., 15, 299, 1974.
- 4) Visbal, M. and Knight, D., Generation of Orthogonal and Nearly Orthogonal Coordinates with Grid Control near Boundaries, AIAA J., Vol. 20, March 1982, 305-306.

