

三次元遷音速積分方程式の数値解法とその応用

高 梨 進*

A Numerical Solution of the Transonic Integral Equations and its Application to Three-Dimensional Transonic Wing Design

Susumu TAKANASHI
National Aerospace Laboratory

ABSTRACT

A numerical solution of the transonic integral equations is presented for three-dimensional transonic wing design.

The objective of the design problem is to determine the wing geometry which realizes a prescribed pressure distribution on the wing surface. This boundary value problem can be formulated by the transonic integral equations with artificial viscosity terms. The resulting integral equations are simplified by introducing an approximate function for the space velocity distribution which reduces the three-dimensional problem to a two-dimensional one. The uniqueness of solution is guaranteed by imposing an additional condition, i.e. the closure condition at the trailing edge. To facilitate numerical evaluation of the definite integrals the wing surface is divided into a number of small rectangular panels. As a result, the singular integral equations are converted to a system of linear equations which can easily be solved by standard numerical techniques.

An extension of the integral equation method to more general and versatile design procedure is described, and some of the design results for a transonic sweptback wing with an isobar pattern are also presented.

1. まえがき

遷音速積分方程式法は、周知のように1950年に Oswatitsch により創案され、衝撃波を含む遷音速流の解析を可能にした最初の手法であるが、以来多くの人達によって拡張され現在では差分法あるいは有限要素法と並んで二次元翼および三次元翼の解析・設計のための有力な手段の一つとなっている¹⁾。ここでは紙数の制約のため解析に関するものは一切省略

し、専ら三次元翼設計への応用に関する最近の発展について述べる。論文の前半(第1節~第3節)では設計問題の積分方程式による定式化とその数値解法を示し、後半(第4節~第6節)ではより一般的な三次元遷音速翼設計法への拡張について述べる。

2. 逆問題の積分方程式による定式化

遷音速微小擾乱方程式は

$$(1-M_\infty^2)\bar{\varphi}_{\bar{x}\bar{x}} + \bar{\varphi}_{\bar{y}\bar{y}} + \bar{\varphi}_{\bar{z}\bar{z}} = K \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left[\frac{1}{2} \bar{\varphi}_{\bar{x}}^2 \right] - \nu \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left[\bar{g}(\bar{\varphi}_{\bar{x}}) \bar{\varphi}_{\bar{x}\bar{x}} \right] \quad (1)$$

* 航空宇宙技術研究所

と書かれる²⁾ここで、 $\bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ は擾乱速度ポテンシャル、 M_∞ は一様流マッハ数、 $K(r, M_\infty)$ は遷音速相似パラメータ(例えば、 $K=(r+1)M_\infty^2$)、 r は気体の比熱比、 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ は直交座標系である。式(1)の右辺第二項は解の存在を保証するために導入された人工粘性項であり、 ν はその係数、 $\bar{g}(\bar{\varphi}_x)$ は速度 $\bar{\varphi}_x$ の関数で次のように表わされる。

$$\bar{g}(\bar{\varphi}_x) = \begin{cases} K\bar{\varphi}_x - (1-M_\infty^2) & \text{for } \bar{\varphi}_x > \frac{1-M_\infty^2}{K} \\ 0 & \text{for } \bar{\varphi}_x < \frac{1-M_\infty^2}{K} \end{cases} \quad (2)$$

流れが翼面に沿うという条件は

$$\bar{\varphi}_z(\bar{x}, \bar{y}, \pm 0) = \bar{f}'_\pm(\bar{x}, \bar{y}) \quad (3)$$

と表わされる。ここで、 $\bar{f}'_\pm(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \bar{f}_\pm(\bar{x}, \bar{y})$ 、 $\bar{f}_\pm(\bar{x}, \bar{y})$ は翼の上下面の形状関数である。

翼面上の圧力係数は

$$C_{p\pm}(\bar{x}, \bar{y}) = -2\bar{\varphi}_x(\bar{x}, \bar{y}, \pm 0) \quad (4)$$

と書かれる。

解析の簡単化のため新変数

$$x = \bar{x}, \quad y = \beta\bar{y}, \quad z = \beta\bar{z}, \quad \varphi(x, y, z) = \frac{K}{\beta^2} \bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}),$$

$$\beta = \sqrt{1-M_\infty^2} \quad (5)$$

を導入すれば、式(1)、(2)、(3)、(4)はそれぞれ

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2} \varphi_x^2 \right] - \nu \frac{\partial}{\partial x} [g(\varphi_x) \varphi_{xx}] \quad (6)$$

$$g(\varphi_x) = \begin{cases} \varphi_x - 1 & \text{for } \varphi_x > 1 \\ 0 & \text{for } \varphi_x < 1 \end{cases} \quad (7)$$

$$\varphi_z(x, y, \pm 0) = f'_\pm(x, y) \quad (8)$$

$$C_{p\pm}(x, \frac{y}{\beta}) = -2 \frac{\beta^2}{K} \varphi_x(x, y, \pm 0) \quad (9)$$

となる。ここで、

$$f'_\pm(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} f_\pm(x, y) \quad (10)$$

$$f_\pm(x, y) = \frac{K}{\beta^2} \bar{f}_\pm(\bar{x}, \bar{y}) \quad (11)$$

良く知られたGreenの定理により、微分方程式(6)は次の微積分方程式に変換される³⁾:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) = & -\frac{1}{4\pi} \iint_{S_{WV}} [\Psi(x, y, z; \xi, \eta, 0) \{ \varphi_\zeta(\xi, \eta, +0) \\ & - \varphi_\zeta(\xi, \eta, -0) \} - \Psi_\zeta(x, y, z; \xi, \eta, 0) \{ \varphi(\xi, \eta, +0) \\ & - \varphi(\xi, \eta, -0) \}] d\xi d\eta \\ & + \frac{1}{4\pi} \iiint_{-\infty}^{\infty} \Psi_\xi(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) \chi(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta \end{aligned} \quad (12)$$

ここで、

$$\chi(x, y, z) = \frac{1}{2} \varphi_x^2 - \nu g(\varphi_x) \varphi_{xx} \quad (13)$$

$$\Psi(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = \left[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (14)$$

但し上の三重積分は次のように定義するものとする。

$$\begin{aligned} \iiint_{-\infty}^{\infty} () d\xi d\eta d\zeta = & \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\iint_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{x-\epsilon} () d\xi \right. \right. \\ & \left. \left. + \int_{x+\epsilon}^{\infty} () d\xi \right\} d\eta d\zeta \right] \end{aligned} \quad (15)$$

二重積分記号下の S_{WV} は積分が翼面と渦面に亘ることを示す。

式(12)の両辺を x で微分し、 $z=+0$ における $\varphi_x(x, y, z)$ と $z=-0$ におけるそれとを足し合わせれば

$$\begin{aligned} u_s(x, y) = & -\frac{1}{2\pi} \iint_{S_W} \Psi_x(x, y, 0; \xi, \eta, 0) w_s(\xi, \eta) d\xi d\eta \\ & + \chi_s(x, y) \\ & + \frac{1}{4\pi} \iiint_{-\infty}^{\infty} \Psi_{\xi x}(x, y, 0; \xi, \eta, \zeta) [\chi(\xi, \eta, \zeta) \\ & + \chi(\xi, \eta, -\zeta)] d\xi d\eta d\zeta \end{aligned} \quad (16)$$

を得る。ここで、

$$\chi_s(x, y) = \chi(x, y, +0) + \chi(x, y, -0) \quad (17)$$

$$u_s(x, y) = \varphi_x(x, y, +0) + \varphi_x(x, y, -0) \quad (18)$$

$$w_s(x, y) = \varphi_z(x, y, +0) - \varphi_z(x, y, -0) \quad (19)$$

S_W は翼面を表わす。

同様に、式(12)の両辺を z で微分し、 $z=+0$ における $\varphi_z(x, y, z)$ と $z=-0$ におけるそれとを足し合わせ、部分積分を行えば、

$$\begin{aligned} w_a(x, y) = & \frac{1}{2\pi} \iint_{S_W} \frac{u_a(\xi, \eta)}{(y-\eta)^2} \left[1 \right. \\ & \left. + \frac{x-\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} \right] d\xi d\eta \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \iiint_{-\infty}^{\infty} \Psi_{\xi z}(x, y, 0; \xi, \eta, \zeta) [\chi(\xi, \eta, \zeta) - \chi(\xi, \eta, -\zeta)] d\xi d\eta d\zeta \quad (20)$$

を得る。こゝで、

$$u_a(x, y) = \varphi_x(x, y, +0) - \varphi_x(x, y, -0) \quad (21)$$

$$w_a(x, y) = \varphi_z(x, y, +0) + \varphi_z(x, y, -0) \quad (22)$$

式(16), (20)に現われる三重積分を評価するためには全空間における $\chi(x, y, z)$ の値を知る必要がある。このため、まず速度 $u(x, y, z) = \varphi_x(x, y, z)$ をOgana⁴⁾に倣って次のような減衰関数によって近似する。

$$u(x, y, z) = \frac{u(x, y, \pm 0)}{1 \pm a_{\pm}(x, y)z + b_{\pm}(x, y)z^2} \quad (23)$$

こゝで、

$$a_{\pm}(x, y) = \left| \frac{\partial^2 f_{\pm}(x, y)}{\partial x^2} \right| \frac{1}{u(x, y, \pm 0)} \quad (24)$$

$$b_{\pm}(x, y) = \left| a_{\pm}^2(x, y) - \frac{1}{2u(x, y, \pm 0)} \left[-u_{xx}(x, y, \pm 0) - u_{yy}(x, y, \pm 0) + \left[\frac{1}{2}u^2(x, y, \pm 0) \right]_{xx} - \nu \left[g(u) u_x(x, y, \pm 0) \right]_{xx} \right] \right| \quad (25)$$

上に定義した減衰関数は翼面上において、渦無し
の条件 $\varphi_{xz} = \varphi_{zx}$ 、基礎微分方程式(6)および条件式(8)を満足している。

式(23)を式(16), (20)に代入し、翼の上流と下流および翼端の外側領域では非線型項 $\chi(x, y, z)$ は小さいと仮定して、これを無視すれば

$$u_s(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \iint_{S_w} \Psi_x(x, y, 0; \xi, \eta, 0) u_s(\xi, \eta) d\xi d\eta + \chi_s(x, y) + \frac{1}{2\pi} \iint_{S_w} [I_s(x, y; \xi, \eta, +0)\chi(\xi, \eta, +0) + I_s(x, y; \xi, \eta, -0)\chi(\xi, \eta, -0)] d\xi d\eta \quad (26)$$

$$w_a(x, y) = \frac{1}{2\pi} \iint_{S_w} \frac{u_a(\xi, \eta)}{(y-\eta)^2} \left\{ 1 + \frac{x-\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} \right\} d\xi d\eta$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \iint_{S_w} [I_a(x, y; \xi, \eta, +0)\chi(\xi, \eta, +0) - I_a(x, y; \xi, \eta, -0)\chi(\xi, \eta, -0)] d\xi d\eta \quad (27)$$

を得る。こゝで、

$$I_s(x, y; \xi, \eta, \pm 0) = \int_0^{\infty} \Psi_{\xi x}(x, y, 0; \xi, \eta, \zeta) \frac{1}{[1 \pm a_{\pm}z + b_{\pm}z^2]^2} d\zeta \quad (28)$$

$$I_a(x, y; \xi, \eta, \pm 0) = \int_0^{\infty} \Psi_{\xi z}(x, y, 0; \xi, \eta, \zeta) \frac{1}{[1 \pm a_{\pm}z + b_{\pm}z^2]^2} d\zeta \quad (29)$$

但し、解析の簡単化のため

$$\begin{aligned} \chi(x, y, z) &= \frac{1}{2} u^2 - \nu g(u) u_x \\ &= \frac{1}{2} \frac{u^2(x, y, \pm 0)}{[1 \pm a_{\pm}z + b_{\pm}z^2]^2} - \nu g\left(\frac{u(x, y, \pm 0)}{1 \pm a_{\pm}z + b_{\pm}z^2}\right) \times \left\{ \frac{u(x, y, \pm 0)}{1 \pm a_{\pm}z + b_{\pm}z^2} \right\}_x \\ &\approx \left[\frac{1}{2} u^2(x, y, \pm 0) - \nu g(u(x, y, \pm 0)) u_x(x, y, \pm 0) \right] \\ &\quad \times \frac{1}{[1 \pm a_{\pm}z + b_{\pm}z^2]^2} \\ &= \chi(x, y, \pm 0) \frac{1}{[1 \pm a_{\pm}z + b_{\pm}z^2]^2} \end{aligned} \quad (30)$$

と近似した。

以上により、複雑な三次元の積分方程式は簡単な二次元の積分方程式に帰着することが示された。

設計問題あるいは逆問題では、指定圧力分布 $C_p \pm(x, y)$ を境界条件として、上に導いた積分方程式を解いて翼面形状関数 $f_{\pm}(x, y)$ を求めるのが主題である。このため、便宜上形状関数 $f_{\pm}(x, y)$ を翼座標の対称な部分(厚み分布) $f_s(x, y)$ と非対称な部分(迎角および反り分布) $f_a(x, y)$ に分離する:

$$f_s(x, y) = f_+(x, y) - f_-(x, y) \quad (31)$$

$$f_a(x, y) = f_+(x, y) + f_-(x, y) \quad (32)$$

式(8), (22)より $f'_a(x, y) = w_a(x, y)$ が成立するから, 非対称な部分は式(20)の右辺の積分を直接評価することによって一意に決定される。一方, 対称な部分 $f'_s(x, y)$, 即ち $w_s(x, y)$ は式(16)の右辺第一項の積分の被積分関数の中に現われているから逆変換によって求めなければならない。更にやっかいなことに逆変換は一通りでなく無数に存在するから, 解が一意に決定されるためには境界条件とは別の付加的な条件が必要である。こゝでは, この条件として翼の後縁における閉結条件を採用した:

$$\int_{x_{LE}(y)}^{x_{TE}(y)} f'_s(x, y) dx = 0, \text{ 即ち } \int_{x_{LE}(y)}^{x_{TE}(y)} w_s(x, y) dx = 0 \quad (33)$$

こゝで, $x_{LE}(y), x_{TE}(y)$ はそれぞれスパン位置 y における翼の前縁および後縁の x 座標を表わす。

3. 積分の数値的評価

式(28), (29)の積分を数値的に計算するために, 積分区間 $0 < \zeta < \infty$ を有限個の部分区間に分割する。各部分区間で $a_{\pm}(\xi, \eta), b_{\pm}(\xi, \eta)$ は ζ に無関係であることに注意すれば式(28), (29)はそれぞれ

$$I_s(x, y; \xi, \eta, \pm 0) = \sum_{n=0}^K \frac{1}{[1 \pm a_{\pm}(\xi, \eta)\zeta_n + b_{\pm}(\xi, \eta)\zeta_n^2]^2} \times \int_{\zeta_n - \frac{1}{2} \Delta \zeta_{n-1}}^{\zeta_n + \frac{1}{2} \Delta \zeta_n} \Psi_{\xi x}(x, y, 0; \xi, \eta, \zeta) d\zeta \quad (34)$$

$$I_a(x, y; \xi, \eta, \pm 0) = \sum_{n=0}^K \frac{1}{[1 \pm a_{\pm}(\xi, \eta)\zeta_n + b_{\pm}(\xi, \eta)\zeta_n^2]^2} \times \int_{\zeta_n - \frac{1}{2} \Delta \zeta_{n-1}}^{\zeta_n + \frac{1}{2} \Delta \zeta_n} \Psi_{\xi z}(x, y, 0; \xi, \eta, \zeta) d\zeta \quad (35)$$

と近似される。こゝで,

$$\zeta_n = \frac{\alpha \left(\frac{n}{K+1} \right)}{\left[1 - \left(\frac{n}{K+1} \right)^2 \right]}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, K \quad (36)$$

$$\Delta \zeta_n = \zeta_{n+1} - \zeta_n, \quad \Delta \zeta_{-1} \equiv 0 \quad (37)$$

α は正の定数パラメータであり, また部分区間の個数は $K+1$ である。

次に図1に示すように翼面を $I \times (2J+1)$ 個の微小矩形パネルに分割し, 各パネル上で $u_s(x, y), u_a(x, y), \chi(x, y, \pm 0), a_{\pm}(x, y), b_{\pm}(x, y), w_a(x, y)$ は一定値をとるものと仮定する。一方, $w_s(x, y)$ は各パネル上で x 方向には直線的に変化するが, y 方向にはやはり一定値をとるものと仮定する(図2)。この結果各スパン位置 y_j において既知変数 $u_s(x_i^j, y_j)$ の個数は I となるのに対し, 未知変数 $w_s(x_{i-\frac{1}{2}}^j, y_j)$ の個数は $I+1$ となり, 閉結の条件(33)を課すことによって解は一意に決定される。式(33)を離散化した形で書けば

$$\sum_{i=1}^I \frac{1}{2} [w_s(x_{i-\frac{1}{2}}^j, y_j) + w_s(x_{i+\frac{1}{2}}^j, y_j)] (x_{i+\frac{1}{2}}^j - x_{i-\frac{1}{2}}^j) = 0 \quad (38)$$

となる。こゝで,

$$\left. \begin{aligned} x_{i-\frac{1}{2}}^j &= \frac{1}{2} (x_i^j + x_{i-1}^j), \quad i = 2, 3, \dots, I \\ x_{\frac{1}{2}}^j &= x_{LE}(y_j) \\ x_{I+\frac{1}{2}}^j &= x_{TE}(y_j) \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

x_i^j, y_j はそれぞれ各パネル (i, j) の中心における x, y 座標である(図1)。 $y=0$ の面は対称面であることに注意すれば, 式(26), (27)の離散化形はそれぞれ

$$u_s(x_i^j, y_j) = \sum_{l=1}^{I+1} \sum_{m=0}^J \mu_{ijlm}^s w_s(x_{l-\frac{1}{2}}^m, y_m) + \chi_s(x_i^j, y_j) + \sum_{l=1}^I \sum_{m=0}^J [\nu_{ijlm}^s \chi(x_l^m, y_m, +0) + \hat{\nu}_{ijlm}^s \chi(x_l^m, y_m, -0)] \quad (40)$$

$$w_a(x_i^j, y_j) = \sum_{l=1}^I \sum_{m=0}^J \mu_{ijlm}^a u_a(x_l^m, y_m) + \sum_{l=1}^I \sum_{m=0}^J [\nu_{ijlm}^a \chi(x_l^m, y_m, +0) - \hat{\nu}_{ijlm}^a \chi(x_l^m, y_m, -0)] \quad (41)$$

となる。係数 $\mu_{ijlm}^s, \mu_{ijlm}^a, \nu_{ijlm}^s, \nu_{ijlm}^a, \hat{\nu}_{ijlm}^s, \hat{\nu}_{ijlm}^a$ の表現式は紙数の制約のためこゝでは省略す

る。

非対称部分 w_a は式(41)の右辺を計算すれば直ちに得られる。一方、式(38)と式(40)とを結合すると、対称部分 w_s に関する $(I+1) \times (J+1)$ 個の代数方程式系が得られるが、これはごく標準的な連立一次方程式の数値解法、例えば、Gauss 消去法を利用すれば容易に解くことができる。

減衰関数の係数 a_{\pm} , b_{\pm} の中には未知の形状関数 f_{\pm} が含まれている。したがって適当な初期翼形状から出発して、逐次 f_{\pm} を修正する必要がある。通常3～4回の反復で収束解が得られる。

図4に最初の例題として用いた目標圧力分布およびそれに対応する翼断面形を示す。各スパンにおいて同一の圧力分布を指定しているため、等圧線はスパン方向に直線的に通っている。遷音速微小擾乱方程式に基づく逆解法がどの程度の精度をもつかを吟味することは重要であるが、次節以降に示すように、より精密で一般的手法が確立されているので、こゝではこれ以上立入らないことにする。

4. 一般的翼設計法への拡張

三次元完全ポテンシャル流の方程式は

$$(1-M_{\infty}^2)\bar{\varphi}_{\bar{x}\bar{x}}+\bar{\varphi}_{\bar{y}\bar{y}}+\bar{\varphi}_{\bar{z}\bar{z}}=K\frac{\partial}{\partial\bar{x}}\left[\frac{1}{2}\bar{\varphi}_{\bar{x}}^2\right]-\nu\frac{\partial}{\partial\bar{x}}\left[\bar{g}(\bar{\varphi}_{\bar{x}})\bar{\varphi}_{\bar{x}\bar{x}}\right]+\bar{H} \quad (42)$$

と書かれる。こゝで、 $\bar{H}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ は遷音速微小擾乱級数展開における高次の項を表わす。

流れが翼面に沿うという条件および翼面上の圧力係数はそれぞれ

$$\bar{\varphi}_{\bar{z}}(\bar{x}, \bar{y}, \pm 0)=\bar{f}'_{\pm}(\bar{x}, \bar{y})+\bar{Q} \quad (43)$$

$$C_{p\pm}(\bar{x}, \bar{y})=-2\bar{\varphi}_{\bar{x}}(\bar{x}, \bar{y}, \pm 0)+\bar{S} \quad (44)$$

と表わされる。こゝで、 $\bar{Q}(\bar{x}, \bar{y}, \pm 0)$, $\bar{S}(\bar{x}, \bar{y}, \pm 0)$ は高次の項である。変換(5)を施せば、式(42), (43), (44)はそれぞれ

$$\varphi_{xx}+\varphi_{yy}+\varphi_{zz}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}\varphi_x^2\right)-\nu\frac{\partial}{\partial x}\left[g(\varphi_x)\varphi_{xx}\right]+H \quad (45)$$

$$\varphi_z(x, y, \pm 0)=f'_{\pm}(x, y)+Q \quad (46)$$

$$C_{p\pm}(x, \frac{y}{\beta})=-2\frac{\beta^2}{K}\varphi_x(x, y, \pm 0)+S \quad (47)$$

となる。こゝで、 H , Q , S はそれぞれ \bar{H} , \bar{Q} , \bar{S} に対応する高次の項である。

逆問題では、圧力分布 $C_{p\pm}(x, y)$ が予め指定されているから、これを境界条件として微分方程式(45)を差分法により直接解くやり方が最も普通である。しかし、こゝではより一般的で汎用性の高い設計法の開発を念頭において全く別のアプローチを試みる。

今、初期翼 $f_{\pm}(x, y)$ に対して方程式(45)の解 $\varphi(x, y, z)$ が既存の解析コードを用いて既に得られているものと仮定し、この既知の解からの摂動を考える。ポテンシャルの摂動量を $\Delta\varphi(x, y, z)$ で表わせば、支配方程式は

$$\begin{aligned} &(\varphi_{xx}+\Delta\varphi_{xx})+(\varphi_{yy}+\Delta\varphi_{yy})+(\varphi_{zz}+\Delta\varphi_{zz}) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{2}(\varphi_x+\Delta\varphi_x)^2\right] \\ &\quad -\nu\frac{\partial}{\partial x}\left[g(\varphi_x+\Delta\varphi_x)(\varphi_{xx}+\Delta\varphi_{xx})\right] \\ &\quad +H+\Delta H \end{aligned} \quad (48)$$

となる。また、形状関数および圧力係数に対する摂動量 $\Delta f_{\pm}(x, y)$, $\Delta C_{p\pm}(x, \frac{y}{\beta^2})$ の満たすべき式はそれぞれ

$$\begin{aligned} \varphi_z(x, y, \pm 0)+\Delta\varphi_z(x, y, \pm 0) &= f'_{\pm}(x, y) \\ &\quad +\Delta f'_{\pm}(x, y)+Q+\Delta Q \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} C_{p\pm}(x, \frac{y}{\beta})+\Delta C_{p\pm}(x, \frac{y}{\beta}) \\ = -2\frac{\beta^2}{K}[\varphi_x(x, y, \pm 0)+\Delta\varphi_x(x, y, \pm 0)] \\ +S+\Delta S \end{aligned} \quad (50)$$

となる。

遷音速相似パラメータ $K(r, M_{\infty})$ を適切に選べば、遷音速微小擾乱方程式は翼断面形状、翼平面形および一様流マッハ数がかかなり広い範囲に亘って変わっても完全ポテンシャル流の非常に良い近似を与えることが、多くの研究者によって実証されている。したがって摂動量 $\Delta\varphi(x, y, z)$ が小さいと仮定すれば高次項はすべて無視することができるから、摂動量に対する方程式は次のように簡単化される。

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_{xx}+\Delta\varphi_{yy}+\Delta\varphi_{zz} &= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{2}(\varphi_x+\Delta\varphi_x)^2-\frac{1}{2}\varphi_x^2\right] \\ &\quad -\nu\frac{\partial}{\partial x}\left[g(\varphi_x+\Delta\varphi_x)(\varphi_{xx}+\Delta\varphi_{xx})-g(\varphi_x)\varphi_{xx}\right] \end{aligned} \quad (51)$$

$$\Delta\varphi_z(x, y, \pm 0) = \Delta f'_\pm(x, y) \quad (52)$$

$$\Delta C_{p\pm}(x, \frac{y}{\beta}) = -2\frac{\beta^2}{K} \Delta\varphi_x(x, y, \pm 0) \quad (53)$$

再び Green の定理を適用すれば、式(51)は次の微積分方程式に変換される。

$$\begin{aligned} \Delta\varphi(x, y, z) = & -\frac{1}{4\pi} \iint_{S_{WV}} [\Psi(x, y, z; \xi, \eta, 0) \\ & \{ \Delta\varphi_\zeta(\xi, \eta, +0) - \Delta\varphi_\zeta(\xi, \eta, -0) \\ & - \Psi_\zeta(x, y, z; \xi, \eta, 0) \{ \Delta\varphi(\xi, \eta, +0) \\ & - \Delta\varphi(\xi, \eta, -0) \}] d\xi d\eta \\ & + \frac{1}{4\pi} \iiint_{-\infty}^{\infty} \Psi_\xi(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) \\ & \times \Delta\chi(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta \end{aligned} \quad (54)$$

$$\begin{aligned} \text{ここで, } \Delta\chi(x, y, z) = & \frac{1}{2} [(\varphi_x + \Delta\varphi_x)^2 - \varphi_x^2] \\ & - \nu [g(\varphi_x + \Delta\varphi_x)(\varphi_{xx} + \Delta\varphi_{xx}) \\ & - g(\varphi_x)\varphi_{xx}] \end{aligned} \quad (55)$$

胴体が存在する場合であっても、胴体の形は変わらないものと仮定し、更に、翼と胴体の付根を $y=0$ に選んでおけば式(54)はそのまゝ成り立つ。何故なら、 $y=0$ の面上ではスパン方向の速度成分の摂動 $\Delta\varphi_y(x, y, z)$ は小さく、 $\Delta\varphi(x, y, z)$ に対して $y=0$ の面は近似的に対称面と見做せるからである。

前と全く同様の手順を踏めば目標圧力分布と初期翼に対する圧力分布との差 $\Delta C_{p\pm}(x, \frac{y}{\beta^2})$ を補正すべき翼形状修正量 $\Delta f_\pm(x, y)$ を数値的に求めることができる。但し速度の減衰関数としては式(23)に比べ精度は劣るが、反復過程の安定性に優る次の $N\phi r s\text{-}t r a d^5$ の関数を用いた。即ち

$$u(x, y, z) = u(x, y, \pm 0) \exp\{\mp R_\pm(x, y) z\} \quad (56)$$

こゝで、

$$R_\pm(x, y) = \text{abs} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} f_\pm(x, y) / u(x, y, \pm 0) \right] \quad (57)$$

5. 反復解法の手順

反復修正法に基づく翼設計のための具体的手順を図3に示す。まず初期翼 f のまわりの流れを解析コード ANALYSIS により解き、その圧力分布を C_p とする。指定圧力分布を C_{ps} とすれば、圧力の残差は

$\Delta C_p = C_{ps} - C_p$ と表わされる。次に、設計コード DESIGN により、残差 ΔC_p を補正すべき翼面修正量 Δf を求める。若し高次項 ΔH , ΔQ , ΔS が小さければ、 Δf は真の修正量の非常に良い近似を与えるであろう。したがって、与えられた C_{ps} に対する第一近似解として $f + \Delta f$ を得る。この新しく得られた翼を再び解析コードに入力させて同様の手順を踏めば第二近似解を得る。以下同様の操作を ΔC_p が許容値以下になるまで繰り返す。

本解法の最大の利点は解析コードとして何を選んでもよいということである。解析コードの役割は繰り返しの各段階で修正された翼のまわりの流れを解き、その圧力分布を出力することだけであり、コード自体の中味の変更は一切必要としない。

6. 一般的方法による設計例

この節では実際の設計例を示しながら、本方法の精度、収束性等を論じる。解析コードとしては Jameson & Cauchy⁶⁾ により開発された FLO-22 を選んだ。これは三次元翼のまわりの遷音速完全ポテンシャル流を非保存型差分法で解析するコードで、世界的に広く用いられ実績のあるコードである。

図5に初期翼の断面形とその圧力分布および指定圧力分布を示す。設計マッハ数は $M_\infty = 0.74$ である。指定圧力分布は一つの試みとして等圧線がスパン方向に直線的に通るように選んだ。

さて、この指定圧力分布に対して前節で述べた手順に従って FLO-22 と DESIGN の両コードを交互に走らせたところ、反復回数の増加と共に翼根部における翼型の厚み比と迎角は次第に増大し遂には FLO-22 の解が発散するという事態に遭遇した。それは、翼根部においてあまり大きな揚力係数をもつ翼に対して FLO-22 はしばしば計算不能になるからである*。

そこで、翼根部の翼断面を適当な形状に固定し、その他のすべてのスパン位置で指定圧力分布が実現されるように設計目標を変更した。この結果、実用上十分な精度の収束解が10回の反復で得られた。図

* 別の解析コード、例えば Boppe コード⁷⁾ ではこのような現象は起らなかった。

6に収束解についてのFLO-22による計算圧力分布とそれに対応する各スパン位置での翼断面形状を示す。収束の状況を明らかにするため、10%スパン位置を例にとり反復回数(MODE)と共に圧力分布がどのように目標値に漸近していくかの様子を図7に示す。図8に設計翼の翼断面形と圧力分布の鳥瞰図および等圧線を示す。等圧線は翼根部を除けばスパン方向に真っ直ぐに通っていることがはっきり認められる。

7. むすび

三次元遷音速積分方程式の数値解法を示し、その応用として微小擾乱理論に基づく逆問題に対する数値解を与えた。更に、この積分方程式法を発展拡張し、より一般的な翼設計法を確立した。この一般的な翼設計法の特徴は以下の通りである。

1) 既存の任意の解析コードと積分方程式に基づく逆解法コードを交互に使用し乍ら逐次修正法により目的とする解に収束させる。

2) 解析コードはblack boxとして扱われ、したがって新しい解析コードが開発された時点でそれを直ちに設計ルーチンに組み込むことが可能である。

3) 後縁閉結条件は反復の各段階で自動的に満たされる。

4) 収束性は実用的見地から満足すべきものである。

5) 胴体の影響を取り入れた主翼設計が可能である。

6) ポテンシャル流のみならずオイラー流、あるいは剥離が小さければナビエ・ストークス流に対する逆問題への適用も可能であろう。

参考文献

- 1) Niyogi, P., "Integral Equation Method in Transonic Flow", Lecture Notes in Physics No. 157, Springer-Verlag, 1982.
- 2) Piers, W.J. and Sloof, J.W., "Calculation of Transonic Flow by means of a Shock-Captured Field Panel Method", AIAA Paper No. 9-1459, 1979.
- 3) Heaslet, M.A. and Spreiter, J.R., "Three-Dimensional Transonic Flow Theory Applied to Slender Wings and Bodies", NACA Report 1318, 1957.
- 4) Ogana, W., "Choosing the Decay Function in the Transonic Integral Equation", ICTP, Trieste, Internal Report IC/83/21, 1983.
- 5) Nørstrud, H., "High Speed Flow Past Wings", NASA CR-2246, 1973.
- 6) Jameson, A. and Cauchey, D.A., "Numerical Calculation of Transonic Flow Past a Swept Wing", New York University ERDA Report C003077-140, 1977.
- 7) Boppe, C.W., "Calculation of Transonic Wing Flow by Grid Embedding", AIAA Report No. 77-207, 1977.

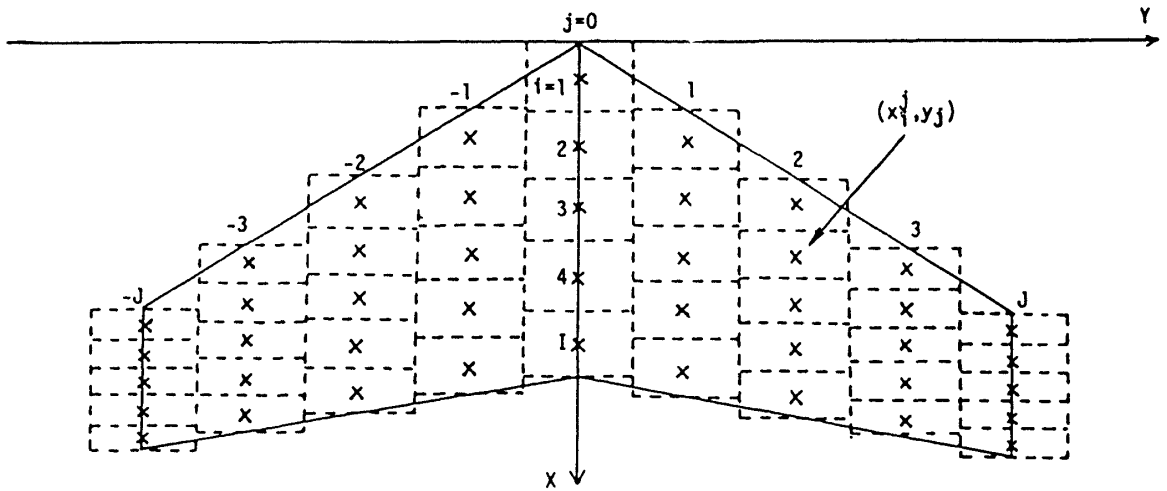


図1 積分方程式を数値的に解くための翼面上微小パネル

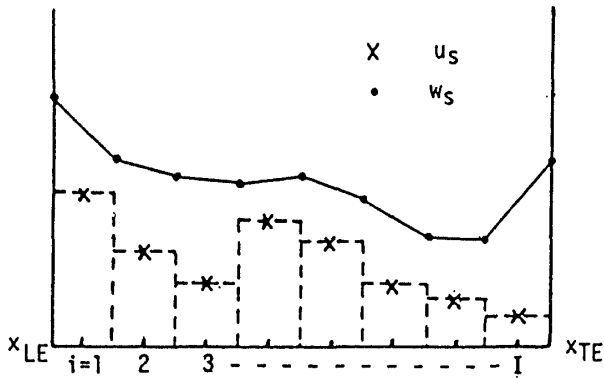


図2 微小パネル上の既知関数と未知関数の近似の図式表現

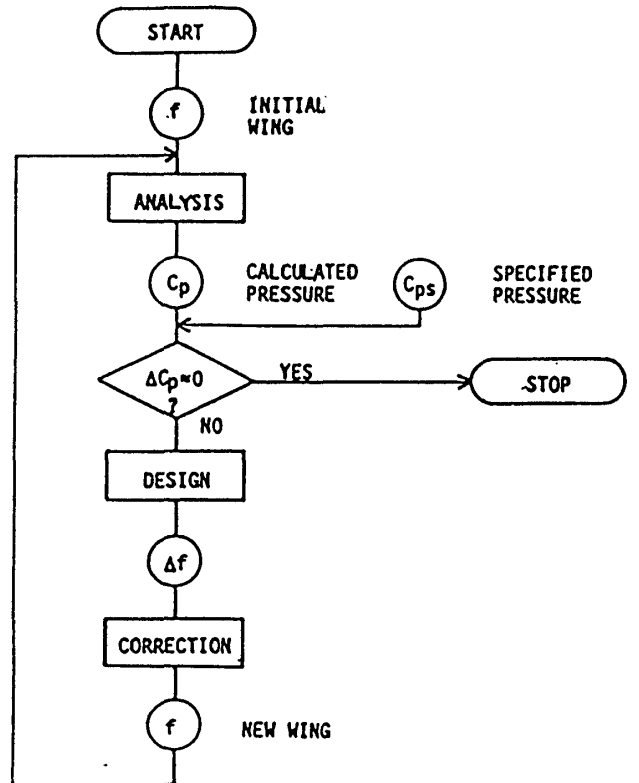


図3 反復法に基づく翼設計手順

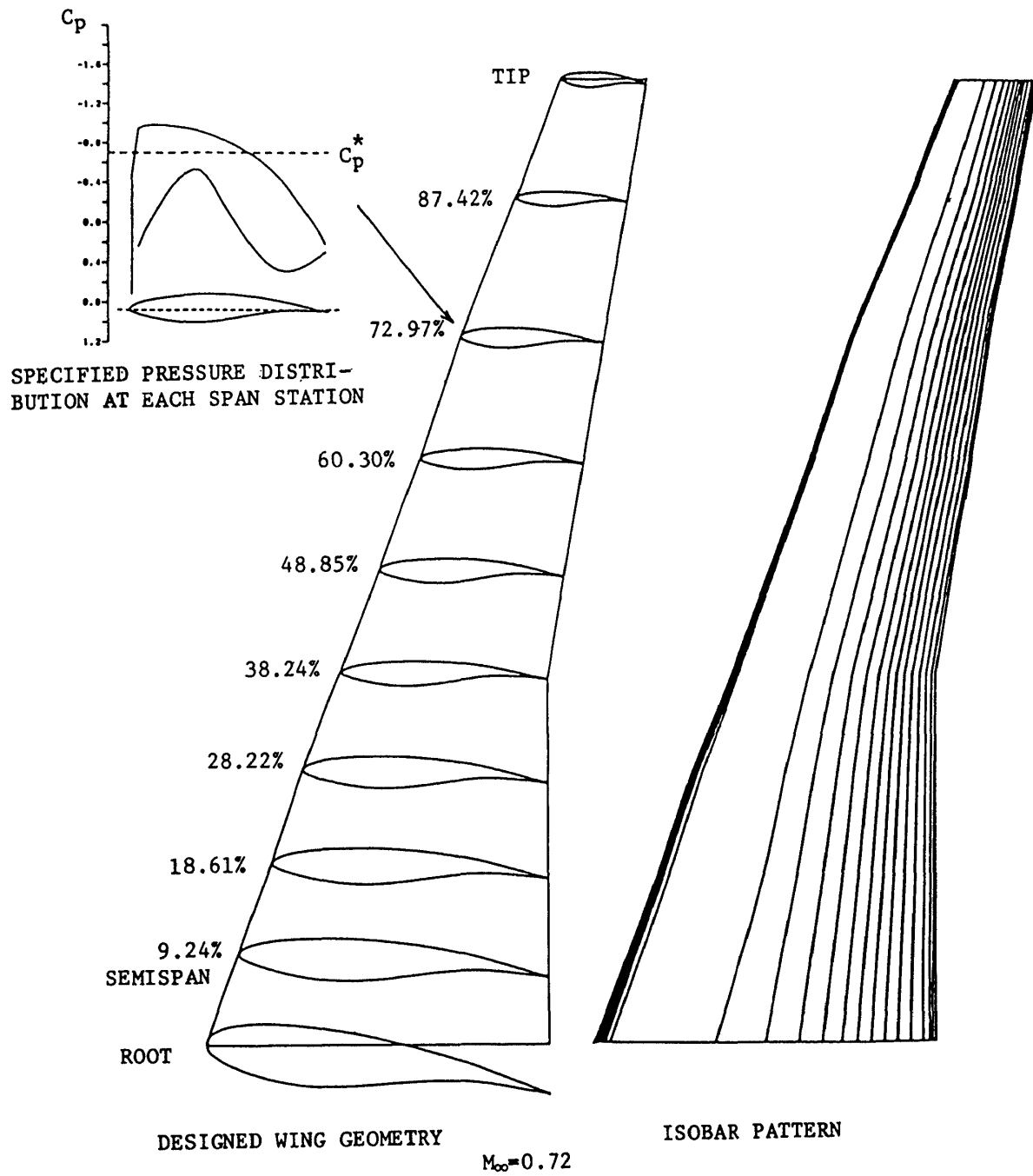


図4 遷音速微小擾乱方程式を用いた翼設計の一例

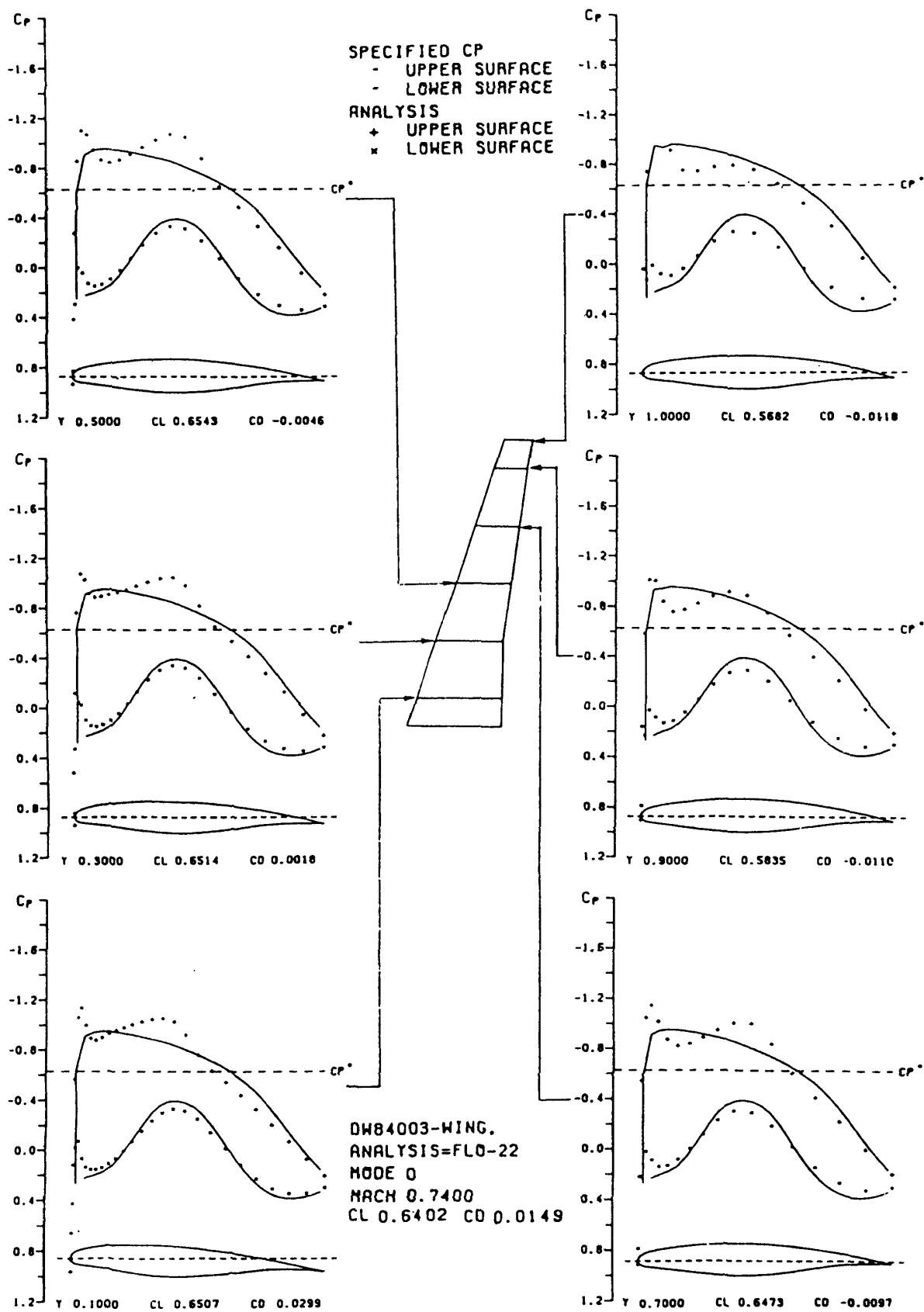


図5 初期翼の断面形とFLO-22による計算圧力分布および指定圧力分布

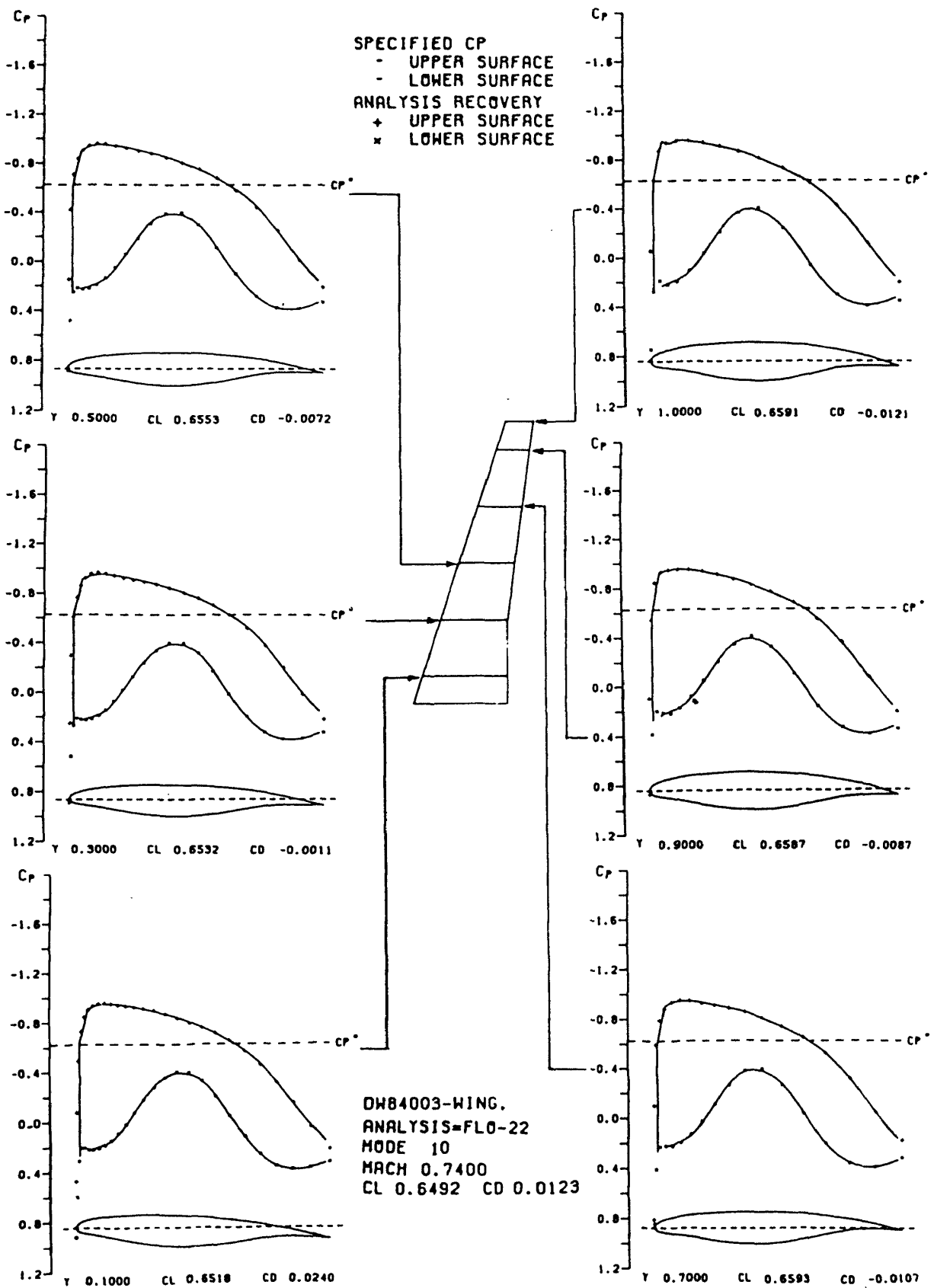


図6 収束した翼の断面形とその圧力分布
 (使用解析コードFLO-22, 反復回数10)

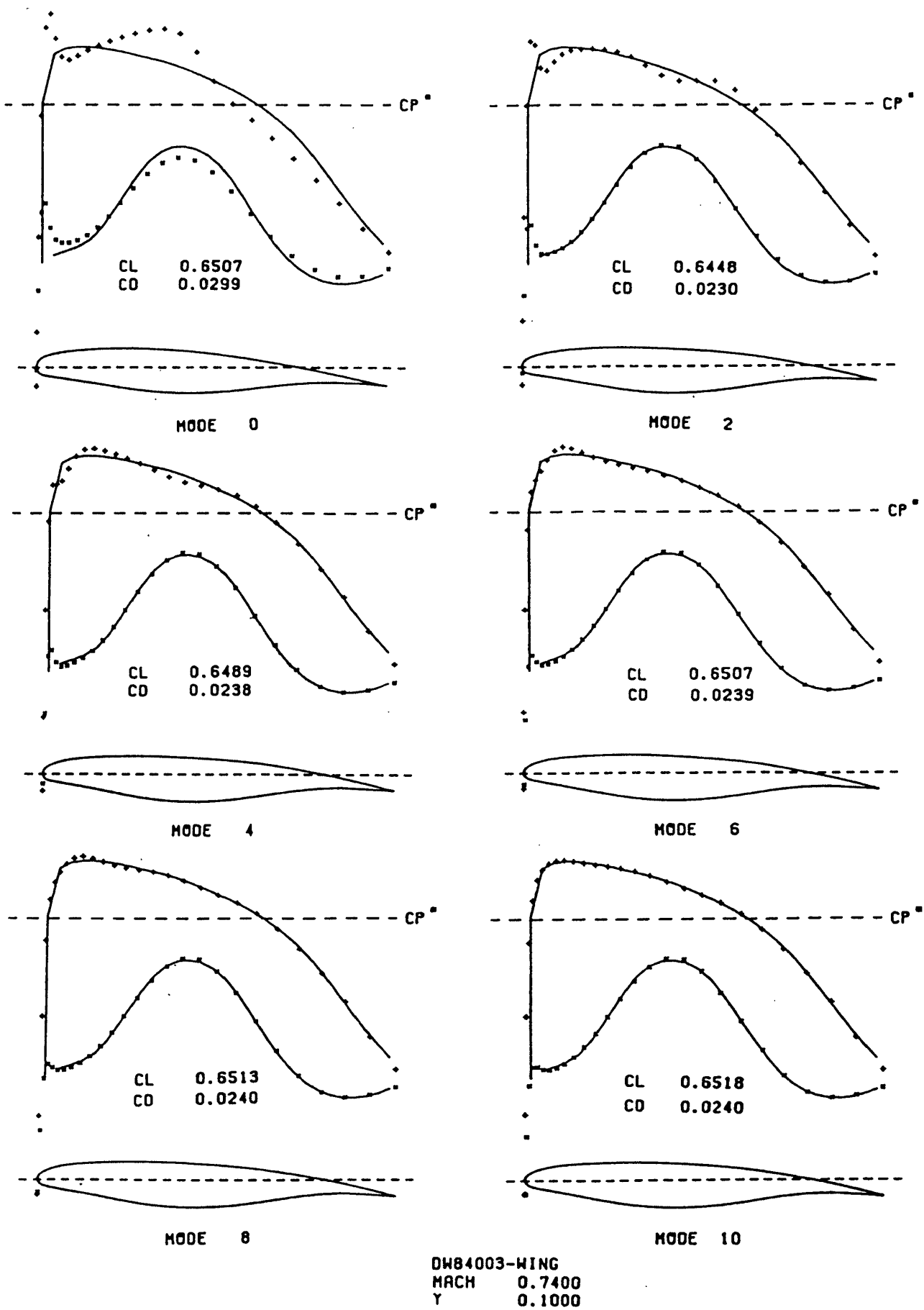


図7 10%スパン位置における収束状況

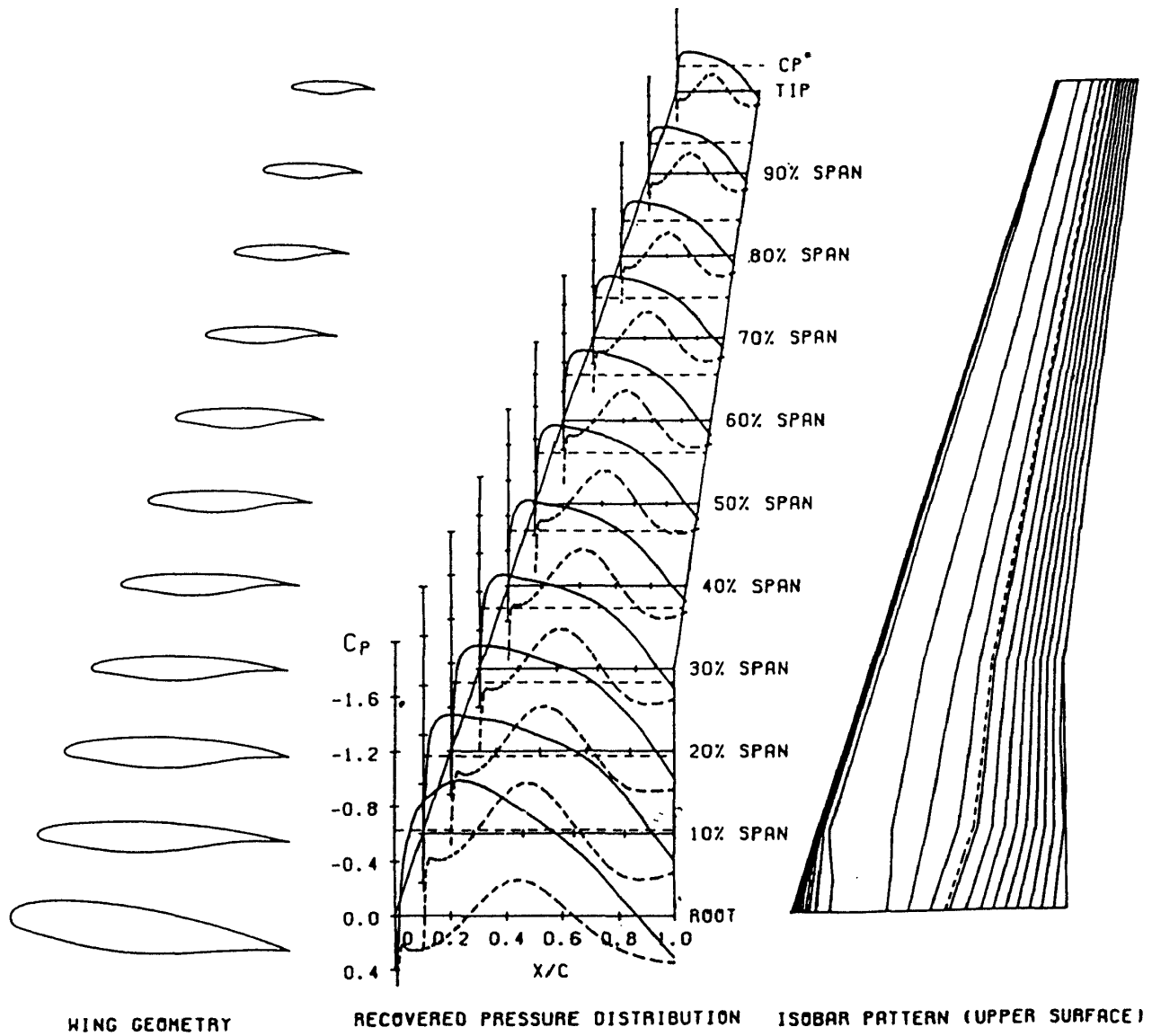


図8 設計翼の形状と圧力分布の鳥瞰図および等圧線

