

ベクトル計算機に適したオイラー方程式の 数値計算法

森西晃嗣* 里深信行* 西田秀利*

An Easily Vectorizable Numerical Solution of the Euler Equations

by

Koji MORINISHI, Nobuyuki SATOFUKA, and Hidetoshi NISHIDA

ABSTRACT

An efficient numerical method has been devised for solving the Euler equations. The method is based on a combination of the central finite difference approximation to the space variables with the rational Runge-Kutta time integration scheme. To improve the rate of convergence to the steady state solution, residual averaging and a multi-grid technique are incorporated into the basic scheme. The algorithm is very simple to program, easily vectorizable without any additional requirement such as extra memory, and easy to extend to multi-dimensional problems. A series of numerical experiments using the present method has been carried out on the quasi-one-dimensional nozzle flow problem with shock and two dimensional transonic flows over an airfoil. With the implicit residual averaging, the present method is stable until the Courant number reaches about 50. The convergence rate does not monotonously improve as the Courant number is increased. The maximum efficiency for a steady state solution is achieved with a local Courant number of approximately 5. Numerical results for two dimensional transonic flow past airfoils indicate that the efficiency of the present method is just as good as that of the Beam Warming scheme.

1. まえがき

翼や翼列まわりの遷音速流に対する信頼性が高く効率の良い数値解析法を確立することは、数値流体力学の分野における重要な課題の一つである¹⁾。従来、設計段階における流れ場の予測等、実用的な手段として数値解析法を用いる場合、その能率や経済性の要求から、主にポテンシャルの仮定が用いられてきた。しかしながらポテンシャルの仮定は、衝撃波を伴う遷音速流の記述には限界があり、より現実的な

オイラー方程式を取り扱う必要性が以前より認識されていた。

1970年代の後半より、Cray-1等の超大型計算機が実用可能となるにつれて、オイラー方程式の数値解を実用的な予測の手段として用いることに関心が持たれ、それに対する効率が良く、しかも信頼性の高い数値計算法の研究が熱心に行なわれてきた。巡航状態における航空機のように、工学上興味ある流れ場の多くは、およそ定常問題と仮定することが可能であり、効率の面では、定常解への収束の速い数値解析法を確立することが重要である。その代表的なものとして、Beam-Warming法等で代表される

* 京都工芸繊維大学工芸学部

陰的法があげられる。²⁾⁻⁶⁾これらの方法は、従来の陰的法の欠点であった安定条件による時間刻み幅(Δt)の制限を緩和し、定常解への収束を加速しようとするものである。これに対してRizzi,⁷⁾ JamesonとBaker⁸⁾は、空間の離散化に有限体積法を、時間積分に多段階ルンゲ・クッタ法を用いた陽的法に、収束加速法を組み合わせる方法を提案している。

よく知られているように、古典的な陽的差分法は、1段階当りの演算回数は少ないが、定常条件による時間刻み幅の制限から定常解への収束が遅い。これに対して陰解法は、収束率は速いが、1段階当りの演算回数も多い。したがって、より演算回数の少ない陰的法、あるいは、より収束率の速い陽的法を確立することは、非常に魅力的である。一般に、陽的法は、プログラムが簡単でベクトル型やパラレル型の計算機への適合も容易である。そこでここでは、オイラー方程式の空間微分項を中心差分法で評価し、結果として得られる常微分方程式の積分には2段階有理ルンゲ・クッタ法⁹⁾を用い、種々の収束加速法を組み合わせた効率の良い陽的法を提案し、2次元の翼まわりの遷音速流への適用例を示す。

2. オイラー方程式

非粘性の流体の運動を記述するオイラー方程式は、2次元一般座標系において次のように無次元表示される。

$$\frac{\partial \hat{q}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{G}}{\partial \eta} = 0 \quad (1)$$

$$\hat{q} = J \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{bmatrix}, \quad \hat{F} = \begin{bmatrix} \rho U \\ \rho u U + y_\eta p \\ \rho v U - x_\eta p \\ (e+p)U \end{bmatrix}, \quad \hat{G} = \begin{bmatrix} \rho V \\ \rho u V - y_\xi p \\ \rho v V + x_\xi p \\ (e+p)V \end{bmatrix}$$

ここに、 p , ρ , u および v は、それぞれ流体の圧力、密度、 x および y 方向の速度成分で、 e は単位体積当りの全エネルギーを示し、完全気体と仮定すると、

$$e = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2)$$

である。また、 U , V は、それぞれ

$$U = y_\eta u - x_\eta v, \quad V = -y_\xi u + x_\xi v$$

である。ただし

$$x = x(\xi, \eta), \quad y = y(\xi, \eta)$$

で、添字は、偏微分、

$$x_\xi = \frac{\partial x}{\partial \xi}, \quad x_\eta = \frac{\partial x}{\partial \eta}, \quad \dots,$$

を示し、また J は、変換のヤコビアン、

$$J = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi$$

である。以下の説明においては、簡単のため(1)式の記号「 $\hat{\quad}$ 」は省略する。

3. 数値計算法

3.1 有限差分法

数値計算法の構成に際しては、オイラー方程式の時間微分項と空間微分項とは分離して別々に取り扱うことを前提とする。そうすることにより、得られる定常解が、時間刻み幅 Δt に依存しなくなり、後で述べる収束加速法と組み合わせ、定常解への収束を加速することが可能となる。

最初に、計算領域に有限個の格子点からなる座標系を構成し、空間微分項を単純に中心差分法で評価することにより、オイラー方程式を次のように離散化する。

$$\frac{t}{\Delta t} q_{i,j} = -(F_{i+1,j} - F_{i-1,j}) / (2 \Delta \xi) \\ - (G_{i,j+1} - G_{i,j-1}) / (2 \Delta \eta)$$

ここに添字 i , j は、それぞれ、

$$(\xi, \eta) = (i \Delta \xi, j \Delta \eta)$$

に対応するものとする。

よく知られているように上記の中心差分法による近似は、衝撃波などの解が不連続となる部分で振動を起こし、定常解への収束を妨げる原因となる。そこで、衝撃波を与えられた格子間隔で捕獲し、数値計算上生じる不自然な振動を取り除くため、適当な人工粘性項を付加する。すなわち、(1)式に代って、次のような方程式を解く。

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{\partial G}{\partial \eta} - D_\xi - D_\eta^n = 0 \quad (2)$$

ここでは、JamesonとBaker⁸⁾に習い、 D_ξ は、

$$D_\xi = d_{i+\frac{1}{2},j} - d_{i-\frac{1}{2},j}$$

とする。ただし、

$$d_{i+\frac{1}{2},j} = J_{i+\frac{1}{2},j} \left\{ \epsilon_{i+\frac{1}{2},j}^{(2)} \Delta \xi (q/J)_{i,j} \right\}$$

$$-\varepsilon_{i+\frac{1}{2},j}^{(4)} \Delta_\xi^3 (q/J)_{i-1,j} \} / \Delta t_{i+\frac{1}{2},j}^*$$

で、 Δ_ξ は、前進差分演算子、

$$\Delta_\xi q_{i,j} = q_{i+1,j} - q_{i,j}$$

を示し、また Δt^* は局所クーラン数を1とする値である。係数 $\varepsilon^{(2)}$ 、 $\varepsilon^{(4)}$ は、それぞれ、

$$\varepsilon_{i+\frac{1}{2},j}^{(2)} = \omega^{(2)} \max(\nu_{i+1,j}, \nu_{i,j}),$$

$$\varepsilon_{i+\frac{1}{2},j}^{(4)} = \max(0, \omega^{(4)} - \varepsilon_{i+\frac{1}{2},j}^{(2)}),$$

で与えられる。ここに $\omega^{(2)}$ 、 $\omega^{(4)}$ は適当な定数で、 $\nu_{i,j}$ は、

$$\nu_{i,j} = |p_{i+1,j} - 2p_{i,j} + p_{i-1,j}| / (p_{i+1,j} + 2p_{i,j} + p_{i-1,j})$$

である。

3.2 時間積分法

前節で記述したような空間微分項の離散化により、(2)式は形式的に次のような連立常微分方程式に帰着する。

$$\frac{dq}{dt} = W(q) \quad (3)$$

この常微分方程式の積分に対しては、Rizzi⁷⁾が用いている3段階の方法、

$$q^{(1)} = q^n + \Delta t W(q^n),$$

$$q^{(2)} = q^n + \frac{1}{2} \Delta t \{ W(q^n) + W(q^{(1)}) \},$$

$$q^{n+1} = q^n + \Delta t \{ (1-\theta)W(q^n) + \theta W(q^{(2)}) \},$$

や4段階のルンゲ・クッタ法、

$$q^{(1)} = q^n + \alpha_1 W(q^n),$$

$$q^{(2)} = q^n + \alpha_2 W(q^{(1)}),$$

$$q^{(3)} = q^n + \alpha_3 W(q^{(2)}),$$

$$q^{n+1} = q^n + \alpha_4 W(q^{(3)}),$$

$$\alpha_1 = \frac{\Delta t}{4}, \alpha_2 = \frac{\Delta t}{3}, \alpha_3 = \frac{\Delta t}{2}, \alpha_4 = \Delta t,$$

などがあるが、ここでは2段階有理ルンゲ・クッタ法⁹⁾を用いる。この方法は、(3)式に対して、次のように表される。

$$g_1 = \Delta t W(q^n), \quad g_2 = \Delta t W(q^n + c_2 g_1),$$

$$q^{n+1} = q^n + [2g_1(g_1, g_3) - g_3(g_1, g_1)] / (g_3, g_4)$$

(4)

$$g_3 = b_1 g_1 + b_2 g_2, \quad b_1 + b_2 = 1$$

ここで、 n は時間段階($t = n \Delta t$)を示し、また記号(a, b)で示される演算は、ベクトル a と b の内積を表す。

時間刻み幅 Δt は、各格子点上でのクーラン数 C_N を一定とする局所時間刻み幅法により、次のように定める。

$$\Delta t_{i,j} = C_N \min(\Delta t_\xi, \Delta t_\eta)_{i,j}$$

ここに、

$$(\Delta t_\xi)_{i,j} = [J / (U + a S_\eta)]_{i,j}$$

$$(\Delta t_\eta)_{i,j} = [J / (V + a S_\xi)]_{i,j}$$

で、 a は局所音速、 S_ξ 、 S_η はそれぞれ、

$$S_\xi = (x_\xi^2 + y_\xi^2)^{\frac{1}{2}}, \quad S_\eta = (x_\eta^2 + y_\eta^2)^{\frac{1}{2}}$$

である。

3.3 収束加速法

有理ルンゲ・クッタ法は、従来の陽的法と比べて安定条件による時間刻み幅の制限は緩やかであるが、定常解への収束率は依然として陰的法ほど速くはない。そこで、残差平均法⁸⁾や多重格子法^{10)~12)}を組み合わせて定常解への収束を加速する。

最初に、残差平均法は、(4)式において

$$q^{n+1} = q^n + r$$

とおくとき、この残差 r を、陽的平均 \bar{r} 、

$$\bar{r} = (1 + \varepsilon \delta_\xi + \varepsilon \delta_\eta) r,$$

あるいは、陰的平均 F 、

$$(1 - \varepsilon \delta_\xi^2)(1 - \varepsilon \delta_\eta^2) F = r,$$

でおきかえる。ただし、 ε は適当な定数で、

$$\delta_\xi^2 r_{i,j} = r_{i-1,j} = 2r_{i,j} + r_{i+1,j}$$

である。

次に、多重格子法は、従来楕円型方程式の解を緩和法により求める際の収束を加速する手段として用いられてきたが、最近ではより一般的に、数値計算における解の収束を加速する方法として注目されている。

オイラー方程式に対する多重格子法の適用としては、まずNiの方法が考えられる^{10),11)}この方法は、粗い格子における残差 r^{2h} を、

$$r_{i,j}^{2h} = \frac{1}{4} (r^h + \frac{\Delta t}{\Delta \xi} \Delta F^h + \frac{\Delta t}{\Delta \eta} \Delta G^h)_{i-1,j-1}$$

$$+ \frac{1}{4} (r^h + \frac{\Delta t}{\Delta \xi} \Delta F^h - \frac{\Delta t}{\Delta \eta} \Delta G^h)_{i-1,j+1}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{4} \left(r^h - \frac{\Delta t}{\Delta \xi} \Delta F^h - \frac{\Delta t}{\Delta \eta} \Delta G^h \right)_{i+1, j+1} \\
 & + \frac{1}{4} \left(r^h - \frac{\Delta t}{\Delta \xi} \Delta F^h + \frac{\Delta t}{\Delta \eta} \Delta G^h \right)_{i+1, j-1}
 \end{aligned}$$

ただし

$$\Delta F_{i,j} = A_{i,j} \Delta q_{i,j}, \quad \Delta G_{i,j} = B_{i,j} \Delta q_{i,j}$$

で求めるが、この過程は、従来の陽的法と同様な安定条件による時間刻み巾 Δt の制限を受ける欠点がある。

一方 Jameson¹²⁾ は、楕円型方程式に対する多重格子法の概念をオイラー方程式に拡張している。すなわち、細かい格子において(2)式を、

$$L^h q = f$$

とするとき、1 段粗い格子では、

$$L^{2h} \bar{q} = \bar{f},$$

$$\bar{f} = I_h^{2h} (f - L^h q) + L^{2h} q$$

を考える。ただし I_h^{2h} は、細かい格子から粗い格子への平均操作(逆の場合は内挿)を示す。この過程を順次粗い格子へ繰り返す。最後に細かい格子への修正は、

$$q^{\text{New}} = q + I_{2h}^h (\bar{q} - q)$$

により、順次最も細かい格子まで行なう。

Ni の方法と Jameson の方法とを比較した場合、後者の方がより一般的と思われるので、ここでは Jameson の多重格子法を採用する。

3.4 境界条件

外部境界条件としては、境界に垂直な方向に対する 1 次元のリーマン不変量を用いる⁸⁾ すなわち、速度ベクトル \vec{u} 、法線ベクトル \vec{n} として、

$$R_\infty = (\vec{u}_\infty, \vec{n}) - \frac{2a_\infty}{\gamma - 1}, \quad R_e = (\vec{u}_e, \vec{n}) + \frac{2a_\infty}{\gamma - 1}$$

と定義するとき、

$$(\vec{u}, \vec{n}) = \frac{1}{2} (R_e + R_\infty), \quad a = \frac{\gamma - 1}{4} (R_e - R_\infty)$$

を得る。ここに、添字 ∞ 、 e は、一様流の値と外挿値をそれぞれ示している。これらの値と、流入境界では、接線速度成分とエントロピに一様流の値を与えることにより、また流出境界ではそれらの値を外挿することにより、境界上の値を求める。

4. 数値計算結果

前章で提案した方法を、衝撃波を伴う準 1 次元ノズル流や 2 次元翼まわりの遷音速流問題に適応し、その有効性の検証を行なった。有理ルンゲ・クッタ法に陰的残差平均法を組み合わせると、クーラン数が 50 程度でも依然として安定であった。しかし、定常解への収束率は、クーラン数の増加とともに必ずしも単調には改善されず、最も効率の良い値はクーラン数が約 5 程度であった。

準 1 次元ノズル流問題で行なった検証の例として、 L_2 残差の収束履歴を図 1 に示す。ノズル形状(断面積)に

$$A(x) = \frac{5}{2} (x - 0.4)^2 + 1 \quad (0 \leq x \leq 0.4)$$

$$A(x) = \frac{35}{18} (x - 0.4)^2 + 1 \quad (0.4 < x \leq 1)$$

で、初期条件には、のど部が臨界状態で他が亜音速である解を与え、出口圧力を、流れ場の約 75% の所に衝撃波が生じるように、

$$p_{\text{exit}} / p_{\text{total}} = 0.8$$

とした。格子点数は 65 点である。図より、有理ルンゲ・クッタ法と残差平均法および多重格子法を組み合わせることにより、収束が加速されていることがわかる。

次に、2 次元遷音速流の基本的な試験問題として、NACA0012 翼型を過ぎる一様流マッハ数 0.8、迎角

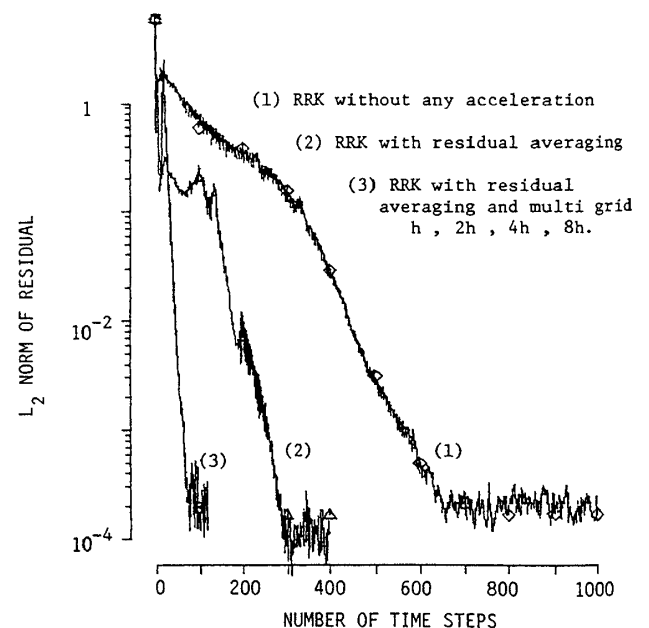


図 1 L_2 残差の収束履歴

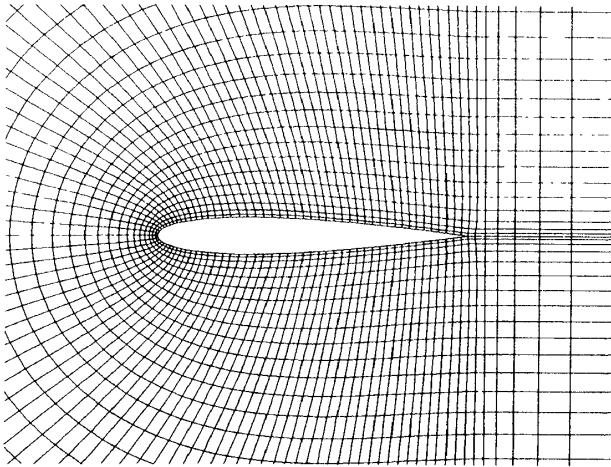


図2 翼形格子

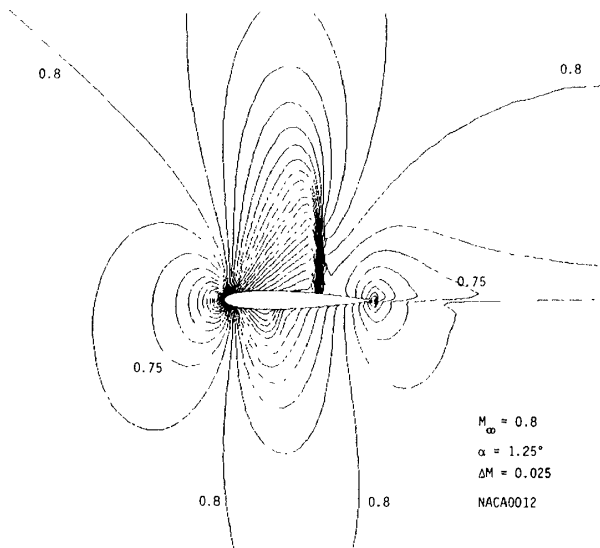


図3 等マッハ線図

1.25°の流れ場への適用例を示す。図2は、計算に使用したC型格子で、格子点数は129×33点で、うち97点を翼面上に配置した。初期条件として流れ場全域に一樣流の値を与えた衝撃出発より得られた等マッハ線図を図3に示す。また図4は、翼面上の圧力分布を示し、比較のため同じ格子を用いてBeam-Warming法⁴⁾により得られた結果も合わせて示してある。両者の分布は、衝撃波の部分における僅かな違いを除いて非常に良く一致している。 L_2 残差の収束履歴を図5に示す。図の横軸の単位は、有理ルンゲ・クッタ法に陰的残差平均法を組み合わせた方法の1段階当りの計算時間を規準に取り換算したものである。定常解を得るに必要な時間段階数は、

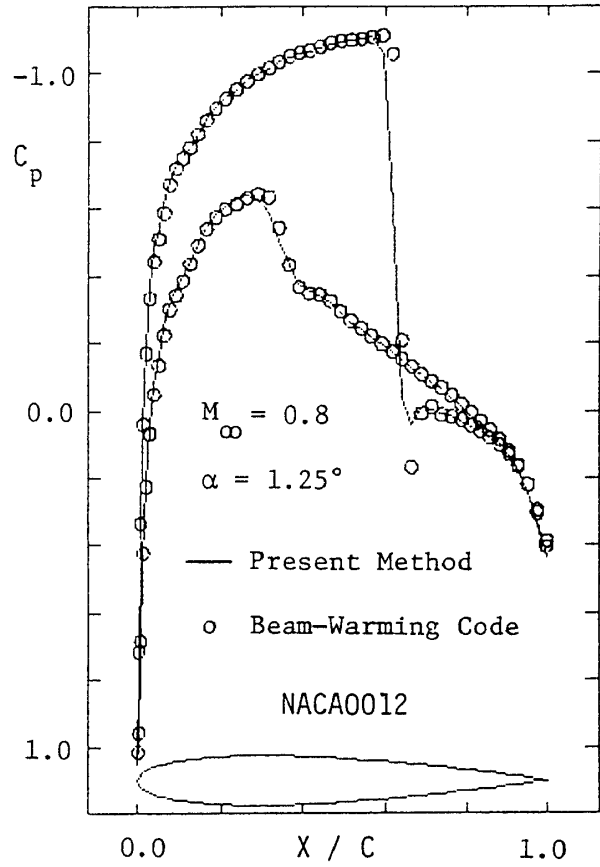


図4 圧力分布

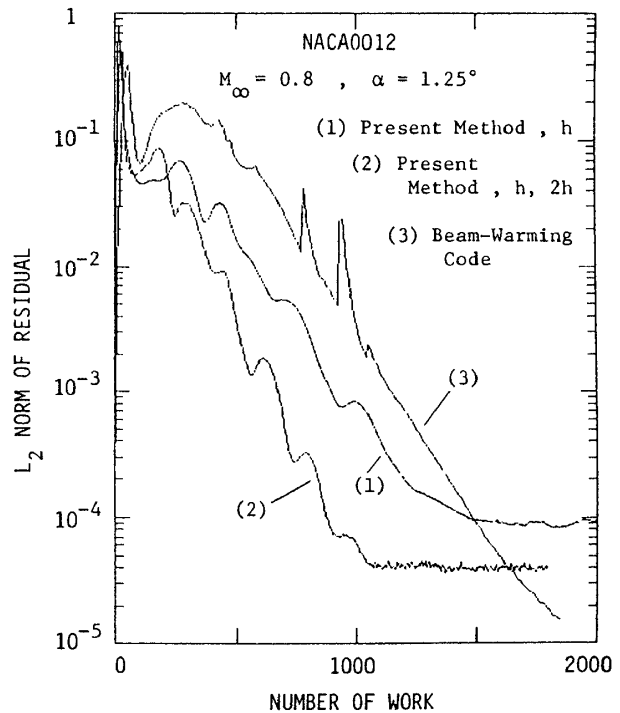


図5 L_2 残差の収束履歴

Beam-Warming法と有理ルンゲ・クッタ法に残差平均法と多重格子法を組み合わせた方法とでは、およそ同じであったが、前者は1時間段階当りの計算時間が長いため、効率の面では図に示すように後者の方が良かった。ただし、ここで用いたBeam-Warming法はブロック3重対角の形になっており、これを対角形の方法にすれば2次元の場合計算時間が $\frac{3}{4}$ 程度に短縮されると思われる¹³⁾。そのことを考慮しても、ここで提案した方法は、現在一般に用いられている陰的法と比べて、少なくとも同程度効率が良いと言える。

最後に同じ2次元の試験問題として、RAE 2822翼型まわりの一様流マッハ数0.75、迎角 3.0° の流れ場への適用例を示す。計算格子は、図2と同様な 129×33 点のC-型格子を用いた。図6は、等マッハ線図で、格子点数が少ないにもかかわらず比較的滑らかな分布が得られた。図7は翼面上の圧力分布で、Beam-Warming法による結果も合わせて示した。両者の分布は、衝撃波の部分の僅かな違いを除いて、やはりよく一致している。しかし、揚力係数等の積分量は人工粘性項の定数の値や格子点数等に依存する傾向があり、今後これらの値を工学上必要な精度で求めるためには、翼面上の格子点を200点程度取るか、衝撃波の部分に格子を集める解適応格子法^{14),15)}あるいはHartenのTVD法¹⁶⁾のような高分解能差分法^{17),18)}等を用いることが望ましいと思われる。

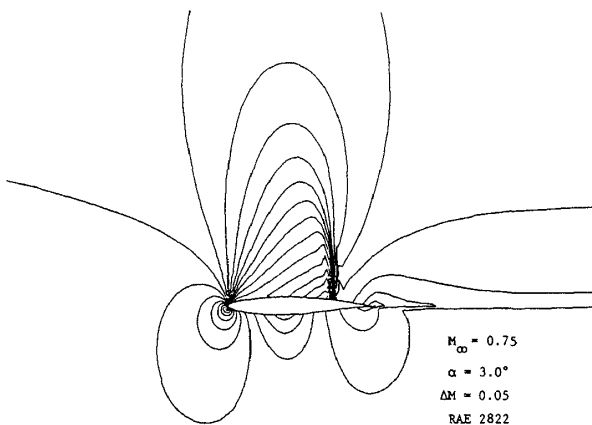


図6 等マッハ線図

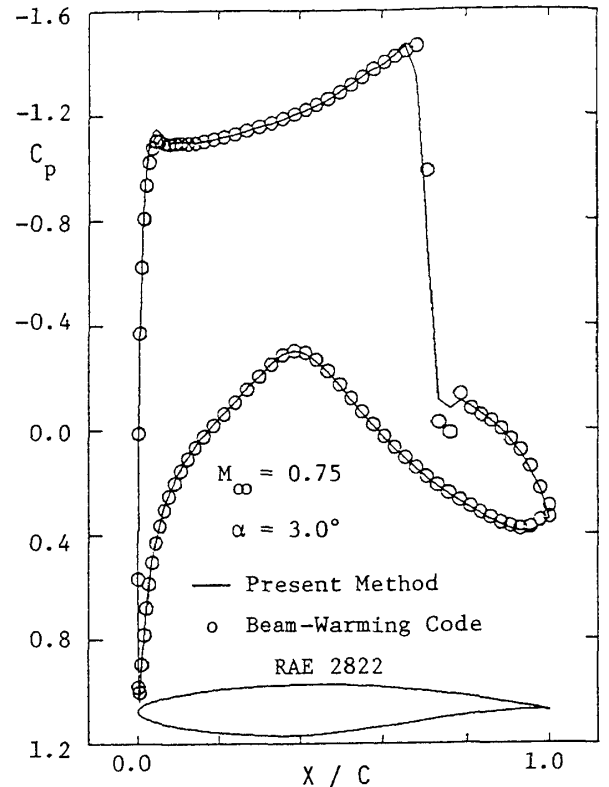


図7 圧力分布

5. まとめ

オイラー方程式に対する新しい陽的差分法を提案し、基本的な準1次元ノズル流問題や2次元翼まわりの遷音速流等に適用し、その有効性を検証した。その結果、有理ルンゲ・クッタ法に残差平均法と多重格子法を組み合わせて用いることにより、現在広く用いられているBeam-Warming法と比較して少なくとも同程度、効率の良い方法が構成できた。しかし、今後揚力係数等を工学上必要な精度で求めるためには、解適応格子法、あるいはTVD法などを合わせて用いることが望ましいと思われる。

最後に、ここで示した数値計算の一部は、京都大学大型計算機センターの開発計画を利用して行ったことを記す。また資料の提供など多大の協力をいただいた航空宇宙技術研究所の藤井孝蔵氏や、多大の便宜をはかっていただいた本シンポジウム幹事の西武徳氏にこの紙面を借りて感謝いたします。

参考文献

- 1) Rizzi, A.W. and Viviand, H., eds., "Numerical methods for the Computation

- of Inviscid Transonic Flow with shocks,” Notes on Numerical Fluid Mechanics, Vol.3, Vieweg, Braunschweig (1981).
- 2) Beam, R.M. and Warming, R.F., J Comp. Phys., Vol.22, 1976, pp. 87–110.
 - 3) Steger, J.L., AIAA J., Vol.16, No.7, July 1978, pp. 679–686.
 - 4) Pulliam, T.H., Jespersen, D.C., and Chikls, R.E., AIAA Paper 83-0314.
 - 5) Lerat, A., AIAA Paper 81-0110.
 - 6) Pulliam, T.H. and Steger, J.L., AIAA Paper 85-0360.
 - 7) Rizzi, A., AIAA J., Vol. 20, No.10, Oct. 1982, pp. 1321–1328.
 - 8) Jameson, A. and Baker, T.J., AIAA Paper 83-1929.
 - 9) Wambecq, A., Computing, Vol.20, 1978, pp.333–342.
 - 10) Ni, R.H., AIAA J, Vol.20, No.11, Nov. 1982, pp. 1565–1571.
 - 11) Chima, R.V. and Johnson, G.M., AIAA J. Vol.23, No.1, Jan. 1985, pp. 23–32.
 - 12) Jameson, A. and Baker, T.J., AIAA Paper 84-0093.
 - 13) Pulliam, T.H. and Chaussee, D.S., J Comp. Phys., Vol. 39, 1981, pp. 347–363.
 - 14) Holst, T.L. and Brown, D., AIAA Paper 81-1010.
 - 15) Nakahashi, K. and Deiwert, G.S., AIAA Paper 85-1529.
 - 16) Harten, A., J. Comp. Phys., Vol.49, No.3, 1983, pp. 357–393.
 - 17) Chakravarthy, S.R. and Osher, S., AIAA Paper 83-1943.
 - 18) Collella, P. and Woodward, P.R., J. Comp. Phys., Vol.54.

