

逆解法による翼列設計

高 梨 進* 田 村 敦 宏*
中 村 孝* 広 瀬 直 喜*

Inverse Design Method for Two-Dimensional
Transonic Cascades

by

Susumu TAKANASHI, Atsuhiko TAMURA,
Takashi NAKAMURA and Naoki HIROSE
National Aerospace Laboratory

ABSTRACT

In this paper, a simple and practical inverse design method is described for two-dimensional transonic cascades with specified target distributions.

The present design procedure is based on an iterative residual correction concept. The difference between target and computed pressures, at each iteration step, is determined using a cascade analysis code. The blade surface correction corresponding to the pressure difference (or residual) is approximately obtained by transonic integral equations.

Typical examples designed by the present method using the full potential solver as the analysis code are presented for subsonic and transonic cascades with specified pressures.

1. ま え が き

単独翼であるか翼列であるかを問わず、一般に任意に指定された翼面上圧力分布を実現する翼断面形状を求める所謂逆問題に対する解法はそのアプローチの仕方によって大雑把に次の三つに分類される¹⁾。まず第一の方法は、原理的には圧力分布（あるいは速度分布）を境界上で指定してそれを満たすポテンシャルあるいはオイラー方程式の解から目標とする形状を導き出すものであり、そのコード開発には解析コード開発と同程度の労力と時間を必要とするが、厳密な定式化を行なえば亜音速の場合には厳密解に

近い解が得られることもあり、古くから最もよく研究され実用化されている方法である。しかし、遷音速においては非粘性逆問題が本来 ill-posed であるため、厳密さに固執しすぎると指定圧力分布が如何に滑らかであっても収束解が得られないということがしばしば起こり得る。更に、ナビエ・ストークス流れの逆問題の場合にはどのように境界条件を設定すればよいかさえ不明であり、ましては現実の流れに対して逆問題を定式化することは困難である。

第二の方法は解析コードと最適値問題解法コードを交互に反復使用して、圧力残差（目標圧力分布と計算圧力分布の差）が最小になるように翼断面形を逐次修正していく手法である。これは最適値問題解法コードを一個用意しておきさえすれば、解析コー

* 航空宇宙技術研究所

ドとして何を選んでもよいので、極めて汎用性の高い設計法と言えるであろう。しかし、考え方は非常に簡単で分かり易いが、実際には翼形状を表現するパラメータを多くすると計算時間が飛躍的に増大し、また初期値を余程うまく選んでから出発しないといつまでたっても最適値に到達しないという事態に遭遇する。

第三の方法は間接的解法という意味では第二の方法と非常によく似ているが最も本質的な違いは流体物理を全く知らない最適値問題解法コードの代わりに翼面修正コードを導入している点である。この翼面修正コードというのは反復の各段階で圧力残差を補正すべき翼面修正量を流体力学の理論に則って導き出すものである。したがって、第二の方法に比し計算時間は格段に短くてすむが、どんな解析コードに対しても精度の良い結果を与える普遍的翼修正アルゴリズムを如何にして見出すかが最大の難事であったといってもよいであろう。

著者の一人は先に第三の方法を用いて、実際の航空機の遷音速後退翼に対して ISOBAR 設計を試み、6～10回の反復で実用上十分な精度で指定圧力分布が実現されることを示した^{2,3)}。そこで提案した翼面修正法は遷音速積分方程式により定式化したものであるが、解析コードとして数種類を選び収束性と精度についての検証を行なった結果、微小擾乱流を仮定しているにも拘らずかなり広範囲に適用可能であることが確認された^{4,5)}。

本報告はこの翼面修正法に基づく逆解法の翼列への直接的拡張に関するものであり、積分方程式を翼列用にかきかえている以外基本的な考え方は、単独翼の場合と全く同じである。

本方法による翼列設計のおおよその手順を第1図によって説明する。まず、初期翼 F のまわりの流れを解析コード「ANALYSIS」によって計算し、その圧力分布を C_p とする。目標圧力分布を C_{pt} とすると、圧力残差は $\Delta C_p = C_{pt} - C_p$ となるが、この圧力残差を補正する翼面修正量 ΔF を「CASDES」によって求め、目標とする翼の第一近似として $F + \Delta F$ を得る。この新しい翼に対して再び「ANALYSIS」により流れを計算し、 ΔC_p から ΔF を求め第二近似解 $F + \Delta F$ を得る。この操作を ΔC_p が十分小さくな

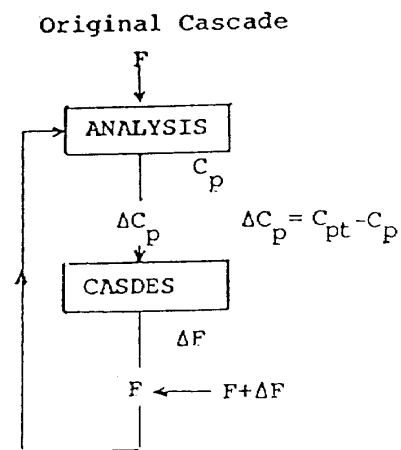
るまで繰返す。収束性は「CASDES」の能力に左右されるが、収束した最終的な翼断面形状の精度はすべて「ANALYSIS」の能力に依存する。

第二節では、遷音速微小擾乱理論から出発して圧力残差と翼修正量との関係を積分方程式により表現し、第三節では「CASDES」と完全ポテンシャルソルバーとを結合して設計した翼列の代表例を示す。

2. 残差修正問題の積分方程式による定式化

この節の目的は翼面上の圧力残差とそれを補正すべき翼面修正量との関係を積分方程式により表現することである。

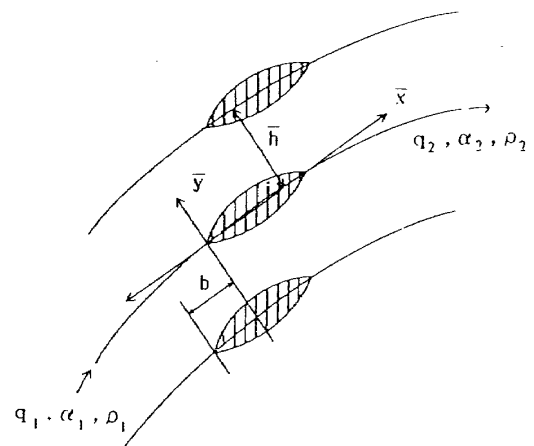
第2図のように配置した翼列のまわりの遷音速ポ



“ANALYSIS” Analysis Code

“CASDES” Inverse Correction Code

第1図 翼列設計の手順



第2図 翼列の座標系の定義

テンソル流を考える。図中、 \bar{x} , \bar{y} は直交座標、 \bar{h} は \bar{y} 方向のピッチ、 b は \bar{x} 方向の食い違い量、 α , q , ρ はそれぞれ流れの傾き、速度の大きさ、密度を表わし、無限上流と無限下流を区別するため、それぞれ下添字1, 2を付す。 α_1 , q_1 , ρ_1 を指定したとき、 α_2 , q_2 , ρ_2 のうち1個だけ任意に値を指定することができる⁷⁾。但し、Kuttaの条件のように、後縁のある位置に淀み点を強制的に固定して流れを解く場合には無限下流で境界条件を課すことはできない。

定式化を容易にするため、翼の厚みおよび反りは翼弦長 c ($c=1$ とする)に比して小さいと仮定する。この仮定の範囲内で遷音速微小擾乱理論が成立する。

遷音速微小擾乱方程式は

$$(1-M^2)\bar{\phi}_{\bar{x}\bar{x}}+\bar{\phi}_{\bar{y}\bar{y}}=K\cdot\left[\frac{1}{2}\bar{u}^2\right]_{\bar{x}} \quad (2-1)$$

と書かれる¹⁾。ここで、 $\bar{\phi}(\bar{x}, \bar{y})$ は擾乱速度ポテンシャル、 \bar{u} は \bar{x} 方向の擾乱速度($\bar{u}=\bar{\phi}_{\bar{x}}$)、 M は代表マッハ数、 $K(\gamma, M)$ は遷音相似パラメータ(例えば、 $K=(\gamma+1)M^2$)、 γ は気体の比熱比($\gamma=1.4$)である。

流れが翼表面に沿うという条件は

$$\bar{v}(\bar{x}, \pm 0)=\bar{f}'_{\pm}(\bar{x}) \quad (2-2)$$

と書かれる。ここで、

$$\bar{v}(\bar{x}, \pm 0)=\bar{\phi}_{\bar{y}}(\bar{x}, \pm 0) \quad (2-3)$$

$$\bar{f}'_{\pm}(\bar{x})=\frac{d}{d\bar{x}}\bar{f}_{\pm}(\bar{x}) \quad (2-4)$$

$\bar{f}_{+}(\bar{x})$, $\bar{f}_{-}(\bar{x})$ はそれぞれ翼の上下面における形状関数である。

翼面上の圧力係数は

$$C_{p\pm}(\bar{x})=-2\bar{u}(\bar{x}, \pm 0) \quad (2-5)$$

と表わされる。

新変数を

$$\beta=\sqrt{1-M^2}, \quad x=\bar{x}, \quad y=\beta\bar{y},$$

$$\phi=\frac{K}{\beta^2}\bar{\phi}, \quad u=\frac{K}{\beta^2}\bar{u}, \quad v=\frac{K}{\beta^3}\bar{v} \quad (2-6)$$

によって導入すれば式(2-1), (2-3), (2-5)はそれぞれ

$$\phi_{xx}+\phi_{yy}=\left[\frac{1}{2}u^2\right]_x \quad (2-7)$$

$$v(x, \pm 0)=f'_{\pm}(x) \quad (2-8)$$

$$C_{p\pm}(x)=-\frac{2\beta^2}{K}u(x, \pm 0) \quad (2-9)$$

と変形される。ここで、

$$f'_{\pm}(x)=\frac{d}{dx}f_{\pm}(x), \quad f_{\pm}(x)=\frac{K}{\beta^3}\bar{f}_{\pm}(\bar{x}) \quad (2-10)$$

今、ある翼断面 $f_{\pm}(x)$ に対して方程式(2-7)の解 $u(x, y)$ が既知であるとし、これからの摂動を考える。摂動量にはすべて Δ を冠して表わすことにすれば、摂動方程式およびそれに対応する翼面上の条件と圧力係数はそれぞれ

$$\Delta\phi_{xx}+\Delta\phi_{yy}=\left[\frac{1}{2}(u+\Delta u)^2-\frac{1}{2}u^2\right]_x \quad (2-11)$$

$$\Delta v(x, \pm 0)=\Delta f'_{\pm}(x) \quad (2-12)$$

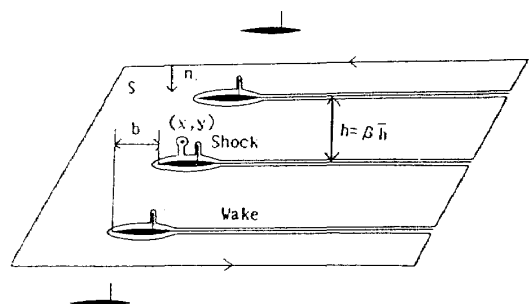
$$\Delta C_{p\pm}(x)=-\frac{2\beta^2}{K}\Delta u(x, \pm 0) \quad (2-13)$$

となる。

圧力残差 $\Delta C_{p\pm}(x)$ に対する式(2-13)を境界条件として方程式(2-11)を解いて得た $\Delta v(x, \pm 0)$ から式(2-12)を用いて翼面修正量 $\Delta f_{\pm}(x)$ を求めるのが主題である。そのため、まず第3図に示すような積分路に、Greenの定理⁷⁾を適用して微分方程式(2-11)を次の微積分方程式に変換する。

$$\Delta\phi(x, y)=\frac{1}{2\pi}\oint[\psi(x, y; \xi, \eta)\Delta\phi_n(\xi, \eta)-\psi_n(x, y; \xi, \eta)\Delta\phi(\xi, \eta)]d\ell$$

$$+\frac{1}{2\pi}\iint_s\psi(x, y; \xi, \eta)\frac{\partial}{\partial\xi}\chi(\xi, \eta)ds \quad (2-14)$$



第3図 積分路

ここで,

$$\psi(x, y; \xi, \eta) = \ln[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{\frac{1}{2}} \quad (2-15)$$

$$\chi(x, y) = \frac{1}{2}(u + \Delta u)^2 - \frac{1}{2}u^2 \quad (2-16)$$

S は、翼面, Wake, 衝撃波, 特異点 (x, y) をとり除いた全領域である。簡単のため無限上下流領域において摂動はすべて 0 となる摂動流を仮定し, また衝撃波に沿う線積分は消滅すること⁷⁾に注意すれば, 式 (2-14) は次のように書き直される。

$$\begin{aligned} \Delta\phi(x, y) = & \sum_{n=0}^{\pm\infty} \frac{1}{2\pi} [\psi(x, y; \xi + nb, nh) \\ & \times \{ \Delta\phi_\eta(\xi, +0) - \Delta\phi_\eta(\xi, -0) \} \\ & - \psi_\eta(x, y; \xi + nb, nh) \\ & \times \{ \Delta\phi(\xi, +0) - \Delta\phi(\xi, -0) \}] d\xi \\ & - \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\xi)^2 - \eta^2}{[(x-\xi)^2 + \eta^2]^2} \\ & \times \psi_\xi(x, y; \xi, \eta) \chi(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (2-17) \end{aligned}$$

式 (2-17) の両辺を x で微分し, $y = +0$ における $\Delta u(x, y)$ と $y = -0$ におけるそれとを足し合わせれば

$$\begin{aligned} \Delta u_s(x) = & \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\Delta v_s(\xi)}{x-\xi} d\xi \\ & + \sum_{n=\pm 1}^{\pm\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{x-\xi-nb}{(x-\xi-nb)^2 + (nh)^2} \Delta v_s(\xi) d\xi \\ & + \sum_{n=\pm 1}^{\pm\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{-nh}{(x-\xi-nb)^2 + (nh)^2} \Delta u_a(\xi) d\xi \\ & - \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\xi)^2 - \eta^2}{[(x-\xi)^2 + \eta^2]^2} \\ & \times [\chi(\xi, \eta) + \chi(\xi, -\eta)] d\xi d\eta + \frac{1}{2} \chi_s(x) \quad (2-18) \end{aligned}$$

ここで,

$$\Delta u_s(x) = \Delta u(x, +0) + \Delta u(x, -0) \quad (2-19)$$

$$\Delta u_a(x) = \Delta u(x, +0) - \Delta u(x, -0) \quad (2-20)$$

$$\Delta v_s(x) = \Delta v(x, +0) - \Delta v(x, -0) \quad (2-21)$$

$$\chi_s(x) = \chi(x, +0) + \chi(x, -0) \quad (2-22)$$

同様に, 式 (2-17) の両辺を y で微分し, $y = +0$ における $\Delta v(x, y)$ と $y = -0$ におけるそれとを足

し合わせれば

$$\begin{aligned} \Delta v_a(x) = & -\frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\Delta u_a(\xi)}{x-\xi} d\xi \\ & + \sum_{n=\pm 1}^{\pm\infty} -\frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{x-\xi-nb}{(x-\xi-nb)^2 + (nh)^2} \Delta u_a(\xi) d\xi \\ & + \sum_{n=\pm 1}^{\pm\infty} -\frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{nh}{(x-\xi-nb)^2 + (nh)^2} \Delta v_s(\xi) d\xi \\ & + \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{2(x-\xi)\eta}{[(x-\xi)^2 + \eta^2]^2} \\ & \times [\chi(\xi, \eta) - (\xi, -\eta)] d\xi d\eta \quad (2-23) \end{aligned}$$

ここで,

$$\Delta v_a(x) = v(x, +0) + v(x, -0) \quad (2-24)$$

翼列の中の 1 つの翼に注目したとき, その翼の周囲の摂動は主としてその翼自身とその近傍の翼の ΔC_p によってひき起されたものであり, 遠方の翼からのそれは 2 次的なものである。それ故, 実際の計算では無限個の翼を考慮する必要はなく高々数個の近隣の翼についての積分の評価をすれば十分である。更に, それぞれの翼の前方および後方の領域からの非線形項の影響は小さいので, 2 重積分を評価する際これを無視することによって積分方程式を著しや簡単化することができる。

式 (2-18), (2-23) に現われる 2 重積分を評価するためには, 空間における速度分布 $u(x, y)$ および $\Delta u(x, y)$ を知る必要がある。ここでは, $u(x, y)$ を

$$\begin{aligned} u(x, y) = & u(x, \pm 0) + u_y(x, \pm 0) y \\ & + \frac{1}{2} u_{yy}(x, \pm 0) y^2, \text{ for } y \geq 0 \quad (2-25) \end{aligned}$$

によって近似する。 $u_x(x, \pm 0)$ は渦なしの条件 $u_x(x, \pm 0) = v_y(x, \pm 0)$ と式 (2-8) とから

$$u_x(x, \pm 0) = f_{\pm}''(x) \quad (2-26)$$

によって求められる。又 $u_{yy}(x, \pm 0)$ については基礎方程式 (2-7) の両辺を x で微分することによって

$$\begin{aligned} u_{yy}(x, \pm 0) = & -u_{xx}(x, \pm 0) \\ & + \left[\frac{1}{2} u^2(x, \pm 0) \right]_{xx} \quad (2-27) \end{aligned}$$

として求められる。 $\Delta u(x, y)$ の近似式も上と同様に求められる。式 (2-25) によって定義された速度

分布関数はかなり粗い近似であるが2重積分内の核関数は点 (ξ, η) が翼面から遠ざかるにしたがって急速に減衰することから、翼から離れた点での速度の見積誤差はそれ程大きく解に影響を与えないであろう。

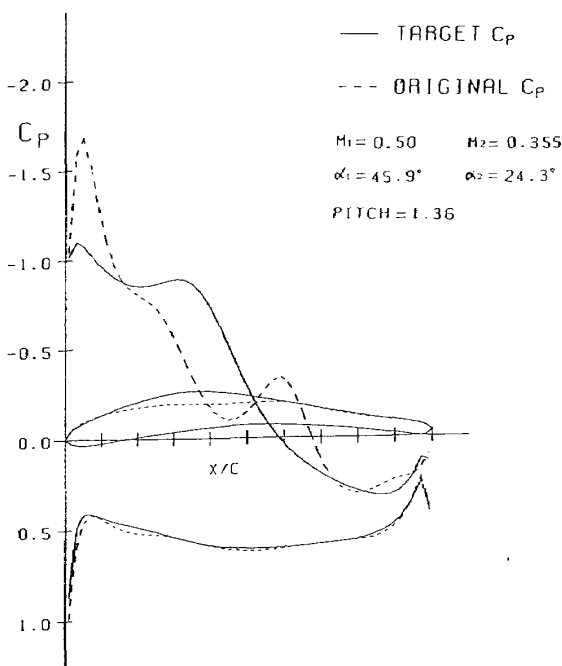
未知関数 $\Delta v_s, \Delta v_a$ は、 $\Delta u_s, \Delta u_a, \chi_s, \chi$ を既知関数として積分方程式(2-18), (2-23)を連立させて解けば得られるが、そのような解は無数に存在し一意には決定されない²⁾。それは式(2-18)の右辺第1項の特異積分の反転が無数に存在することに起因する。解の一意性が保証されるためにはひとつの条件、例えば翼の後縁の閉結条件が必要である。これは次のように書くことができる。

$$\int_0^1 \Delta v_s(x) dx = 0 \quad (2-28)$$

以上によって、圧力残差 $\Delta C_{p\pm}(x)$ を補正すべき翼面修正量 $\Delta f_{\pm}(x)$ を求める問題が定式化された。実際の計算では翼面および空間を小さなパネルに分割し、1重および2重積分を離散化して数値的に解く。離散化された詳細な式は紙数の制約のためここでは割愛する。

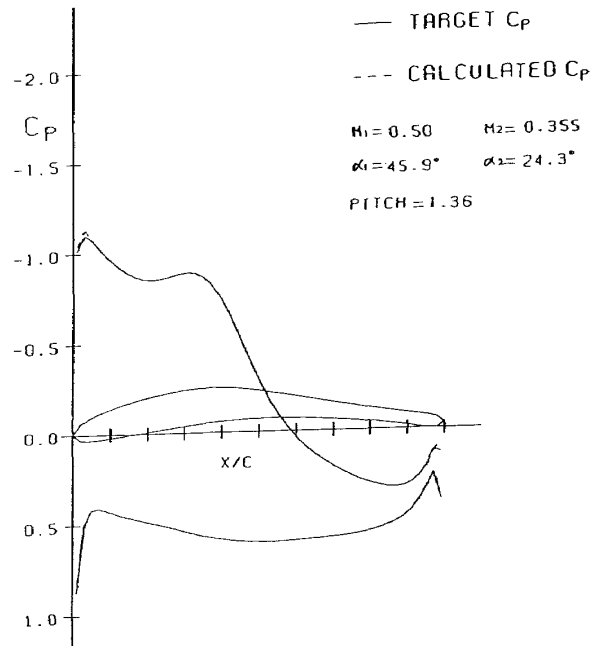
3. 二次元翼列の設計例

本方法により設計された圧縮機の翼列の例を以下

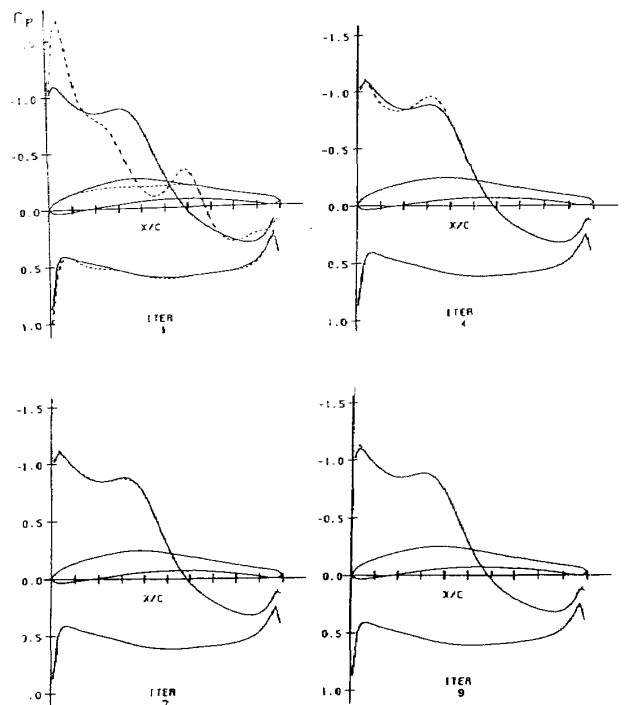


第4図 亜音速翼列の設計における目標圧力分布と初期圧力分布

に示す。解析コードとしては井上により開発されたポテンシャル・ソルバー⁶⁾を使用した。これは、二次元翼列を過ぎる遷音速完全ポテンシャル流を陰的近似因子分解差分法により解くコードである。最初の例として、ピッチ1.36, 入口条件 $M_1=0.5, \alpha_1=45.90$ を指定して第4図に示すような目標圧力分布に対して設計を行ない、9回の反復により第5図に



第5図 収束した亜音速翼列の形状 (反復回数9)



第6図 反復回数に対する計算圧力分布

示すような結果を得た。このときの流出マッハ数および流出角はそれぞれ $M_2 = 0.355$, $\alpha_2 = 24.3$ であり, 流れはいたるところ亜音速である。反復回数と共に計算圧力分布がどのように指定圧力分布に近づいていくかの様子を第6図に示す。次の例題としてピッチ 1.36, 入口条件を $M_1 = 0.72$, $\alpha_1 = 45.90$ とし, 目標圧力分布として翼面上に局所的超音速領域が存在するような分布を選び設計した。このときの結果を第7図および第8図に示す。遷音速の場合であっても, 収束性は悪化していないことが分かる。

4. む す び

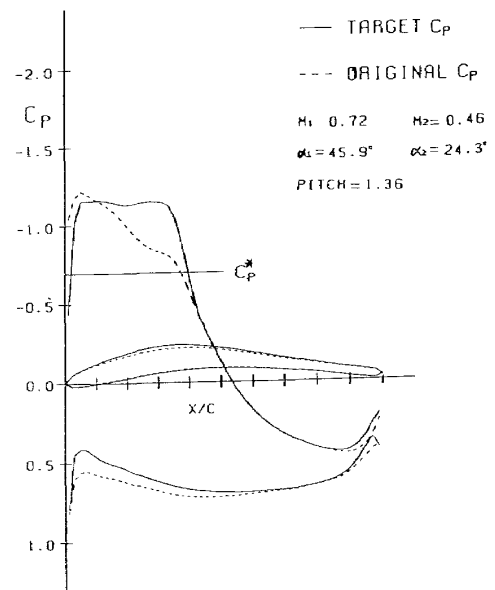
二次元翼例に対して指定圧力分布を実現する翼断面形を求める一方法を示した。本解法の特徴は次の通りである。

- 1) 解析コードと翼面修正コードを交互に反復使用して指定圧力分布に対応する翼断面形状を算出する。
- 2) 解析コードとしては何を選んでもよいが, 遷音速微小擾乱を仮定しているので, 圧縮機のように翼の厚みや反りが比較的小さい翼列に対して本解法は有効である。

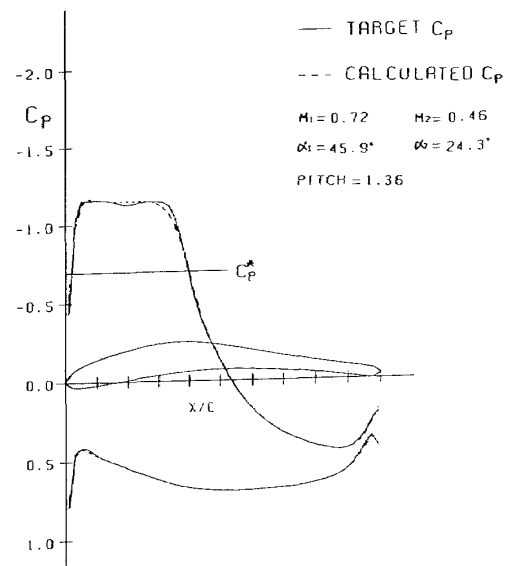
最初の試みとして完全ポテンシャル・ソルバーを用いて圧縮機翼列の設計を行なった例を示したが, これだけでは本方法の有効性, 適用性を議論するには不十分である。今後は解析コードとして種々のソルバーを用いた場合の設計を行ない解の精度と収束性について検討する予定である。

参 考 文 献

- 1) Yoshihara, H. (Ed.): Applied Computational Transonic Aerodynamics, AGARD-AG-266, 1982.
- 2) Takanashi, S.: Iterative Three-Dimensional Transonic Wing Design using Integral Equations, Journal of Air Craft, Vol. 22, No. 8, 1985.
- 3) 高梨 進: 「三次元遷音速積分方程式の数値解法とその応用」, 第二回航空機計算空気力学シンポジウム論文集, NAL SP-3, 1984.
- 4) 高梨 進: 「逆解法コード "WINDES" によ



第7図 遷音速翼列の設計における目標圧力分布と初期圧力分布



第8図 収束した遷音速翼列の形状 (反復回数 10)

- る遷音速翼設計の諸例」, 第三回航空機計算空気力学シンポジウム論文集, NAL SP-5, 1985.
- 5) Hirose, N., Takanashi, S. and Kawai, N.: Transonic Airfoil Design based on the Navier-Stokes Equations to attain Arbitrarily Specified Pressure Distribution - An Iterative Procedure, NAL TR-901T, 1986.
- 6) 井上建二: 「二次元翼列を過ぎる遷音速ポテ

ンシャル流のAF1法による計算」, 航空宇宙学会誌, Vol.34, No.392, 1986.

- 7) Heaslet, M.A. and Spreiter, J.R.: Three-Dimensional Transonic Flow Theory Applied to Slender Wings and Bodies, NACA R. 1318, 1957.

