

# 乱流境界層用計算プログラムの開発

石 垣 博\* 望 月 宗 和\*

## Development of the Computer Program for Turbulent Boundary Layers

by

Hiroshi ISHIGAKI and Munekazu MOCHIZUKI

National Aerospace Laboratory, Kakuda Branch

### ABSTRACT

A computer program was developed for calculation of the turbulent boundary layer around a two-dimensional or an axisymmetrical body. The method of solving the algorithm, computed results of laminar and turbulent boundary layers are presented.

#### 1. ま え が き

乱流境界層計算のためのプログラムは多く作られていて、そのなかでは Patankar-Spalding による GENMIX<sup>1)</sup>と BOX法を用いた Cebeci のもの<sup>2)</sup>が有名である。しかしこれらのプログラムは、独立あるいは従属変数として流線関数を用いているために、三次元境界層には拡張できない。また、これらを用いて実際に数種の流れを計算してみたが、必ずしも使い易いプログラムとは思えなかった。

これらのことにかんがみ筆者らは、把握しやすい構造をもち、修正や乱流モデルの組み込みが比較的容易な使いやすいものということを念頭におきながら、乱流モデル計算の道具としてのプログラムを開発しつつある。ここでは2次元非圧縮外部流について、計算法の概要と層流計算結果の精度確認、Cebeci-Smith のゼロ方程式モデルを用いた乱流計算結果と実験データとの比較などについて述べる。

#### 2. 計算法の概要

垂直応力の項を省略すれば、2次元定常非圧縮性

境界層の時間平均速度  $u$ ,  $v$  および温度  $T$  の方程式は次のようになる(軸対称の式は省略する)。

連続式

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

運動量式

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = u_e \frac{du_e}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu_{\text{eff}} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (2)$$

エネルギー式

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \alpha_{\text{eff}} \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (3)$$

ただし、乱流モデルは次の乱流粘性モデルを用いることにする。

$$\begin{aligned} -\overline{u'v'} &= \nu_T \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \nu_{\text{eff}} = \nu + \nu_T \\ -\overline{u'T'} &= \alpha_T \frac{\partial T}{\partial y}, \quad \alpha_{\text{eff}} = \alpha + \alpha_T = \frac{\nu}{Pr} + \frac{\nu_T}{Pr_T} \end{aligned} \quad (4)$$

境界条件は

$$y = 0 : u = 0, \quad v = \nu_w, \quad T = T_w$$

$$y \rightarrow \infty : u \rightarrow u_e, \quad T \rightarrow T_e$$

$x = 0$  での特異性を除き、 $y$  方向距離を拡大するために  $(x, y)$  座標を境界層座標系  $(x, \eta)$  に変換

\* 航空宇宙技術研究所

する。

$$\eta = y \sqrt{(u_e/\nu x)}, \quad F = u/u_e, \quad G = \frac{T_w - T}{T_w - T_e} \quad (5)$$

このとき(1)-(3)は次のようになる。

$$xF \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\beta+1}{2} F + \frac{\partial V}{\partial \eta} = 0 \quad (6)$$

$$xF \frac{\partial F}{\partial x} + V \frac{\partial F}{\partial \eta} + \beta(F^2 - 1) = \left( \frac{\nu_{eff}}{\nu} \frac{\partial F}{\partial \eta} \right) \quad (7)$$

$$xF \frac{\partial G}{\partial x} + V \frac{\partial G}{\partial \eta} + rF(G-1) = \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\alpha_{eff}}{\nu} \frac{\partial G}{\partial \eta} \right) \quad (8)$$

ただし

$$V = \frac{\beta-1}{2} \eta F + \frac{v}{u_e} \sqrt{Rex}, \quad Rex = \frac{u_e x}{\nu}$$

$$\beta = \frac{x}{u_e} \frac{du_e}{dx}, \quad r = \frac{x}{T_w - T_e} \frac{dT_w}{dx} \quad (9)$$

境界条件は

$$\eta = 0 : F = 0, \quad V = \frac{v_w}{u_e} \sqrt{Rex}, \quad G = 0$$

$$\eta \rightarrow \infty : F \rightarrow 1, \quad G \rightarrow 1$$

$x = 0$  では(6)-(8)は常微分方程式となり、鋭い前縁をもつ物体の流れでは  $\beta = 0$  (平板流), 鈍い2次元物体の流れでは  $\beta = 1$  (2次元淀み点流), 鈍い軸対称物体の流れでは  $\beta = 1/3$  (軸対称淀み点流) として  $x = 0$  での速度, 温度分布を計算する。

差分スキームは完全陰解法を用い, 図1で運動量式, エネルギー式は  $(n+1, j)$  を中心に, 連続式は  $(n+1, j-1/2)$  を中心にとる<sup>3)</sup>。運動量差分式は, Newton-Raphson法により線形化し, 得られた三重

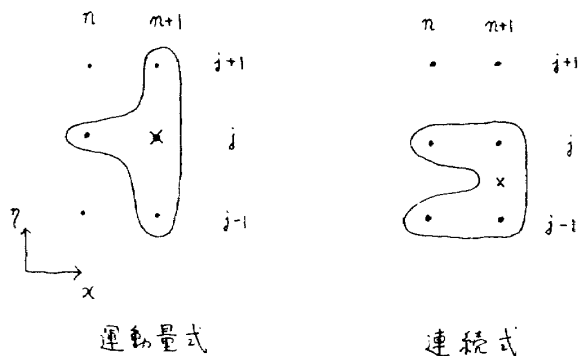


図1 格子のとり方

対角行列は Thomas のアルゴリズムにより解く。

### 3. 層流境界層の計算結果

(6), (7)で  $\nu_T = 0$  として解く。はじめに  $\Delta x, \Delta \eta$  の大きさを変えて Howarth 流れを計算し, 実精度が  $0(\Delta x), 0(\Delta \eta^2)$  であることを確認した。そのほか, いくつかの層流について計算を行い, 本計算プログラムが十分な精度を有することを確認した。そのうちのいくつかを図2-6に示す。

図2は Hiemenz の測定した主流速度分布を与えたときの表面摩擦の計算結果(実線)であり, Smith-Clutter の数値解<sup>5)</sup>, Tifford の級数解と比較した。級数解は剥離点に近づくにつれて収束が悪くなる。

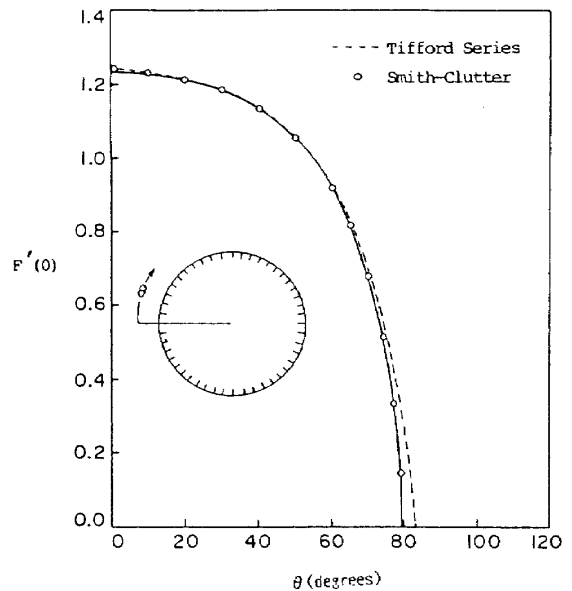


図2 円柱まわりの層流 (Hiemenz の主流速度分布), 表面摩擦の変化

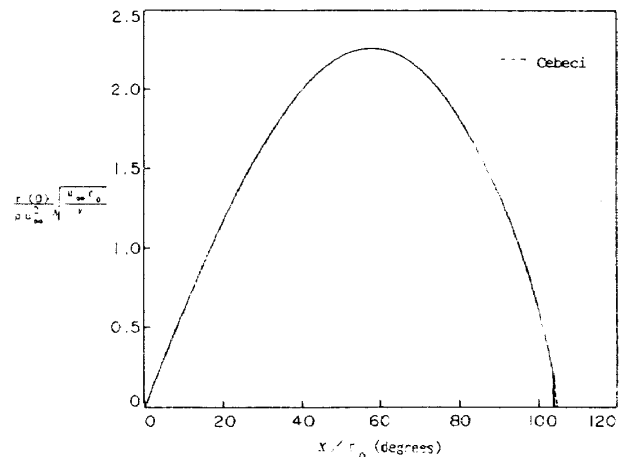


図3 円柱まわりの層流, 表面摩擦の変化

図3は、ポテンシャル理論解  $U_e = 2U_\infty \sin \theta$  を用いたときの計算結果であり、Cebeci らの Box 法による結果<sup>4)</sup>と比較した。本計算結果が剥離点近傍で急激に落ちているのは、この近傍で補間や  $\Delta x$  を小さくするなどの精度向上をはかるための特別の処理をしなかったためである。

軸対称流の例として  $U_e = 3/2 U_\infty \sin \theta$  としたとき

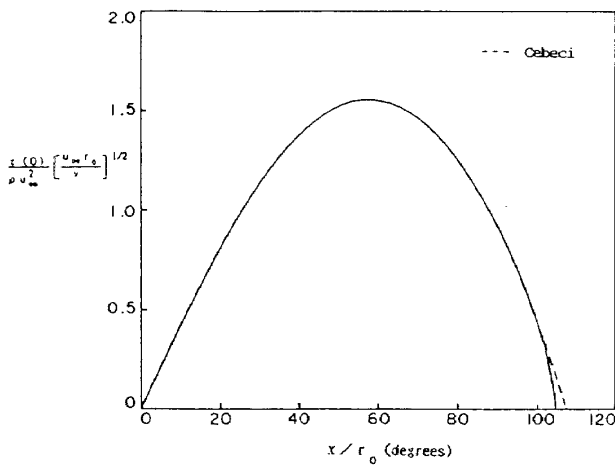


図4 球のまわりの層流，表面摩擦の変化

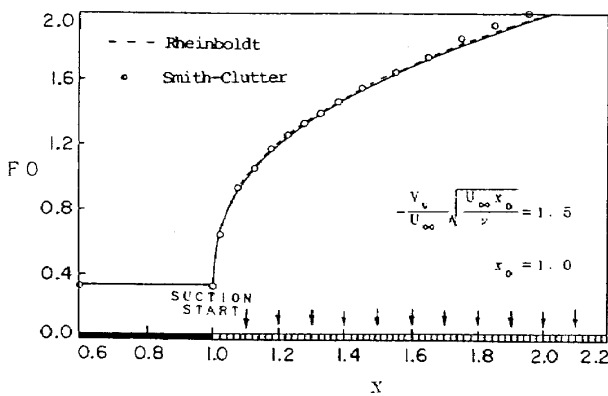


図5 a 吸込みのある平板の層流  $F'_w$  の変化

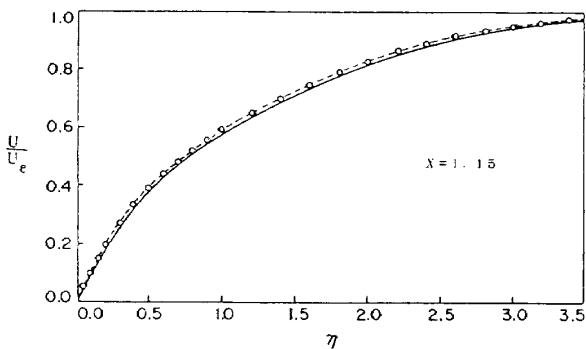


図5 b 吸込みのある平板の層流速度分布

の球のまわりの層流表面まさつの計算結果を図4に示す。Cebeci らの結果とのちがいは図3と同じ理由による。

境界条件が急変化する流れの例として、途中 ( $X = 1.0$ ) から一定吸込のある平板層流の表面まさつ (図5 a) と速度分布 (図5 b) の計算結果を示す。破線は Rheinboldt の厳密解<sup>7)</sup>、○印は Smith-Clutter の数値解である。さらに急激な変化をする例として吸込みが小区間 ( $1.0 \leq X \leq 1.15$ ) に限られる平板層流の計算結果を示す。図6 a は表面まさつ、図6 b は吸込みの始点 ( $X = 1.0$ ) と終点 ( $X = 1.15$ ) における速度分布の結果を示し、記号は図5 a, b と同じである。

以上の層流計算結果により、この計算プログラム

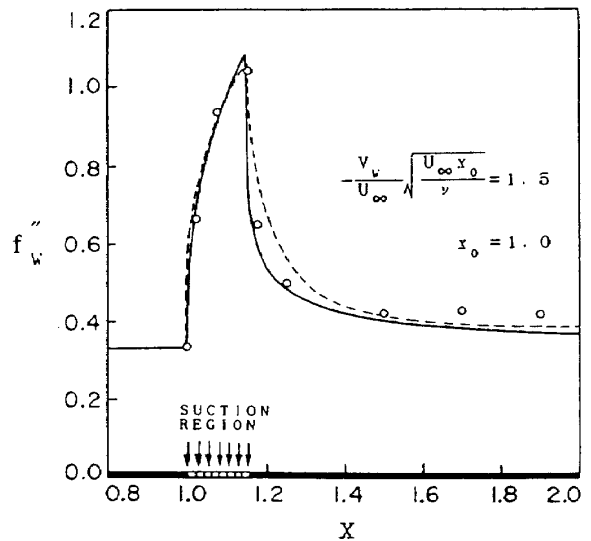


図6 a 吸込みのある平板の層流  $F'_w$  の変化

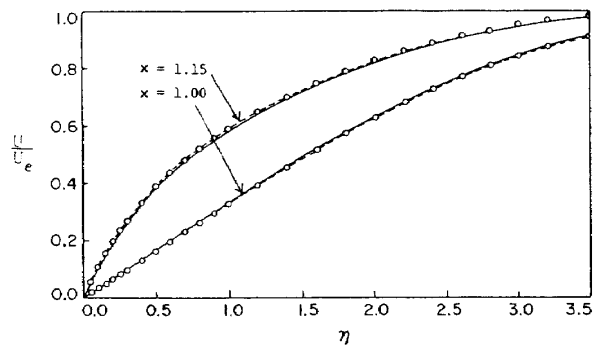


図6 b 吸込みのある平板の層流 吸込部のすぐ上流 ( $X = 1.00$ ) とすぐ下流 ( $X = 1.15$ ) における速度分布

が他の数値解法プログラムと同等の精度と安定性をもつことを確認した。

#### 4. 乱流境界層の計算結果

ここでは乱流境界層の計算例として、Cebeci-Smithのゼロ方程式モデルを用いた計算結果を示す。このモデルは低レイノルズ数効果、遷移、吹出しや吸込み、強い圧力勾配などの効果の経験補正を含み、壁境界層に用いるゼロ方程式モデルでは最もよく整備されたものといえる。

平板乱流境界層の計算結果を図7 a, bに示す。図7 aに表面まさつ係数の計算結果と実験データの

比較、図7 bは速度分布の結果とColesの実験データおよびCebeciらの数値解析結果との比較を示す。外層のレイノルズ数による分布の相違がよく再現されている。

図8は吹出しのある平板の表面まさつ係数を実験データと比較したものである。 $V_w/U_e \leq 0.003$ では実験データとよく一致したが、0.005では計算は発散した。現在 $V$ の上流化を含め、プログラムを改良中である。

図9は乱流熱伝達の計算例で、等温平板の Stanton数の計算結果を実験データと比較したものである。

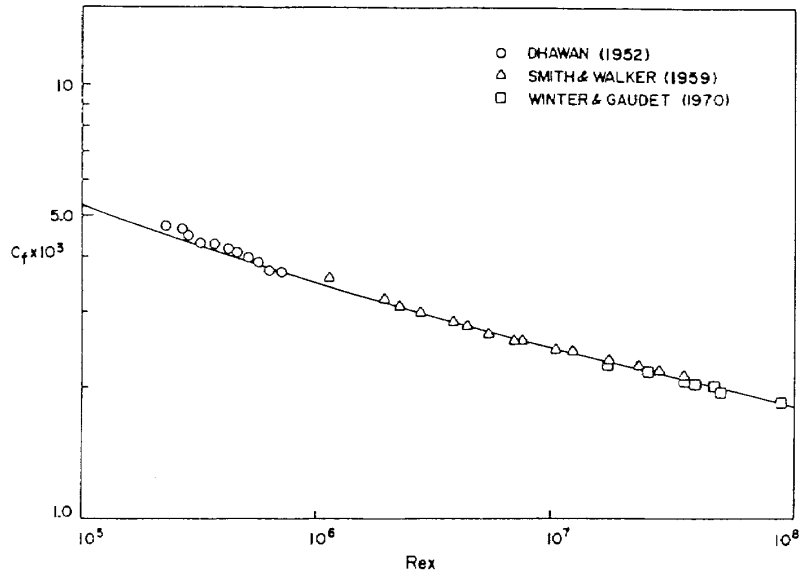


図7 a 平板の乱流, 表面摩擦係数の変化

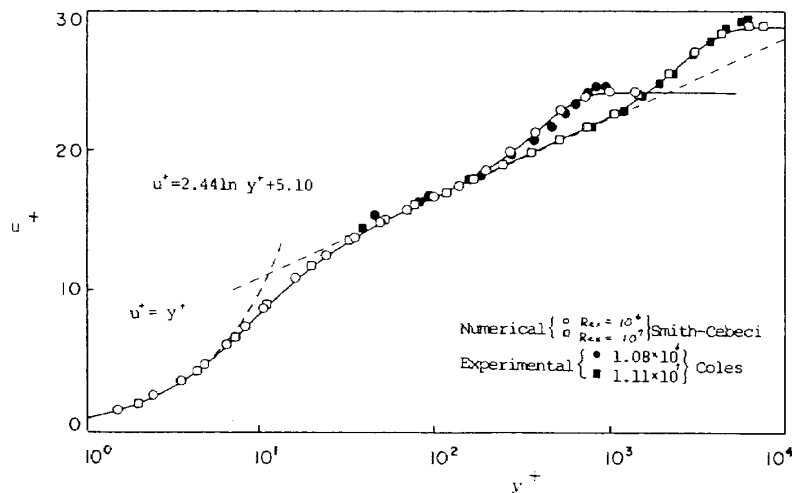


図7 b 平板の乱流, 速度分布

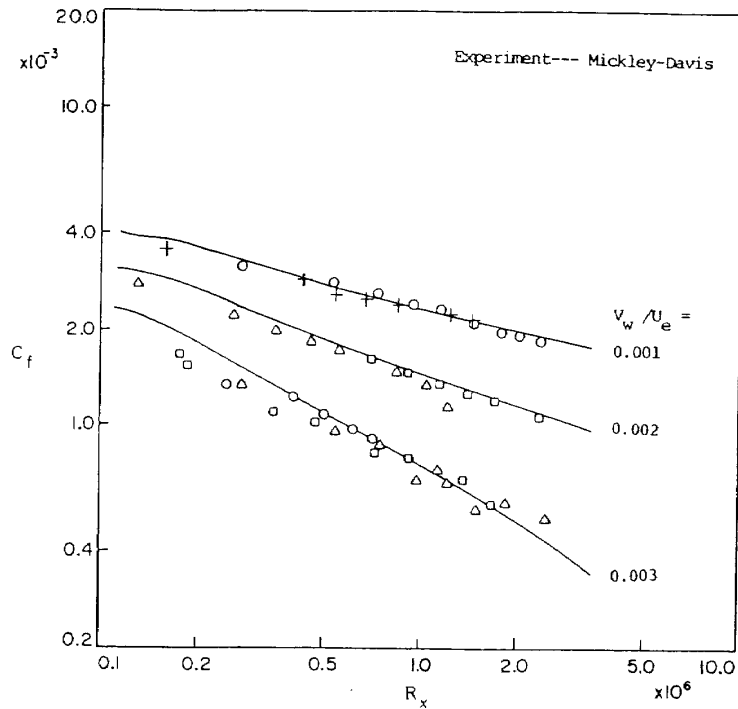


図8 吹出しのある平板の乱流  
表面摩擦係数の変化

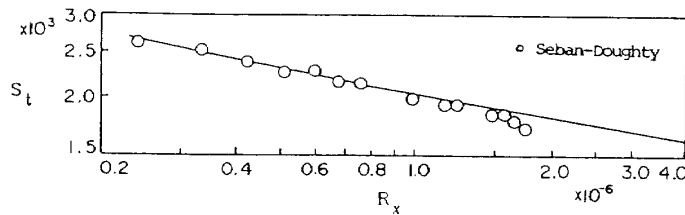


図9 平板の乱流熱伝達, 熱伝達率の変化

参 考 文 献

- 1) D.B. Spalding: GENMIX-A General Computer Program for Two-Dimensional Parabolic Phenomena, 1977, Pergamon.
- 2) T. Cebeci & P. Bradshaw: Physical and Computational Aspects of Convective Heat Transfer, 1984, Springer.
- 3) D.A. Anderson, J.C. Tannehill, and R.H. Pletcher: Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer, 1984, Hemisphere.
- 4) T. Cebeci & A.M.O. Smith: Analysis of Turbulent Boundary Layers, 1974, Academic Press.
- 5) A.M.O. Smith & D.W. Clutter: AIAA J. 1, 1963, pp. 2062.
- 6) T. Cebeci & P. Bradshaw: Momentum Transfer in Boundary Layers, 1977, Hemisphere.
- 7) W. Rheinboldt: NASA TTF-29, 1961.
- 8) H.S. Mickley & R.S. Davis: NACA TN-4017, 1957.

