

# TVD差分スキームによる3次元Euler方程式の 定常解について

高倉 葉子\*    石黒 登美子\*\*    小川 哲\*\*

## On the Stationary Solutions of Three-Dimensional Euler Equations by the TVD Difference Schemes

by

Yoko TAKAKURA  
*Fujitsu Limited*

Tomiko ISHIGURO, Satoru OGAWA  
*National Aerospace Laboratory*

### ABSTRACT

Numerical estimations are performed for our improved TVD schemes (Harten-Yee and Chakravarthy-Osher numerical fluxes) and also for the classical schemes with artificial dissipation models (Beam-Warming and Obayashi numerical fluxes) through a series of numerical experiments for three-dimensional inviscid flows around the ONERA M6 wing. Numerical experiments indicate that the two TVD numerical fluxes are excellent in the points that they capture shock waves without numerical oscillations and rapid expansions sharply and that they have the robustness and the self-adjusting mechanisms regarding the numerical viscosity.

On the other hand the Obayashi numerical flux is not capable of capturing the rapid expansions sharply like the Beam-Warming numerical flux, although the former captures the shock waves without numerical oscillations.

### 1. はじめに

最近のスーパーコンピュータの目覚ましい発展により、3次元流の実用計算も遷音速流の範囲内では容易にこなされるようになってきた。しかし、衝撃波や急激な膨張波のより鮮明な捕獲、極超音速流、乱流や化学反応を含む流れ等の計算を行うためには、より良いスキームの探求が必要であろう。ここでは、最近実用化が推し進められている TVD スキームに

着目し、筆者らにより3次元化・改良がなされた<sup>1)</sup> Harten-Yee TVD スキーム<sup>2)</sup>、Chakravarthy-Osher TVD スキーム<sup>3)</sup>の定常解の評価を行う。

他方において、流束発散の中心差分近似に数値拡散を加えることによる上流差分化への流れ(①→②)

① 中心差分+4階数値拡散<sup>4)</sup>

② 中心差分+4階と2階の非線形数値拡散<sup>5),6)</sup>

がある。数値的振動を抑えるために、衝撃波の前後において精度を落とすという点では、TVDスキームも②も同思想である。そこで、比較的計算時間が短いと思われる①、②と比較して TVD スキームがど

\* 富士通株式会社

\*\* 航空宇宙技術研究所

の程度良い(あるいは悪い)解を生み出せるかは、数値流体力学の発展上で避けては通れない問題であろう。ここでは、①として Beam-Warming スキーム<sup>4)</sup>、②の代表として大林の数値流束<sup>6)</sup>を取りあげ、TVD スキームによる定常解との比較を行う。

## 2. 支配方程式

一般座標系 3 次元 Euler 方程式

$$\partial_{\tau}\widehat{Q} + \partial_{\xi}\widehat{E} + \partial_{\eta}\widehat{F} + \partial_{\zeta}\widehat{G} = 0, \quad (1)$$

$$\widehat{Q} = Q/J, \quad (2.a)$$

$$\begin{aligned} \widehat{E} = & (\xi_t/J)Q + (\xi_x/J)E + (\xi_y/J) \\ & \times F + (\xi_z/J)G, \end{aligned} \quad (2.b)$$

$$\begin{aligned} \widehat{F} = & (\eta_t/J)Q + (\eta_x/J)E + (\eta_y/J) \\ & \times F + (\eta_z/J)G, \end{aligned} \quad (2.c)$$

$$\begin{aligned} \widehat{G} = & (\zeta_t/J)Q + (\zeta_x/J)E + (\zeta_y/J) \\ & \times F + (\zeta_z/J)G \end{aligned} \quad (2.d)$$

を解く。いわゆるヤコビアン行列

$$A \equiv \partial\widehat{E}/\partial\widehat{Q}, \quad B \equiv \partial\widehat{F}/\partial\widehat{Q}, \quad C \equiv \partial\widehat{G}/\partial\widehat{Q} \quad (3)$$

は次のように対角化される<sup>7)</sup>：

$$\begin{aligned} A & \equiv R_{\xi}A_{\xi}R_{\xi}^{-1}, \quad B \equiv R_{\eta}A_{\eta}R_{\eta}^{-1}, \\ C & \equiv R_{\zeta}A_{\zeta}R_{\zeta}^{-1}. \end{aligned} \quad (4)$$

ここに、 $A_{\xi}$ はAの固有値 $\alpha_{\xi}^m$ 、 $A_{\eta}$ はBの固有値 $\alpha_{\eta}^m$ 、 $A_{\zeta}$ はCの固有値 $\alpha_{\zeta}^m$ を成分とする対角行列である。

## 3. スキーム

### 3.1 TVDスキーム

一般座標における数値流束は以下のように見積もられる<sup>7)</sup>。

$$\widehat{E}_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (\widehat{E}_i + \widehat{E}_{i+1} + \Delta\widehat{E}_{i+\frac{1}{2}}), \quad (5)$$

$$|\Delta\widehat{E}| \sim |(\partial\widehat{E}/\partial\xi)\Delta\xi|. \quad (6)$$

我々の改良<sup>1)8)</sup>は、 $\Delta\widehat{E}$ の見積もりに関するものである。従来、流束 $\widehat{E}$ は $\widehat{Q}$ のみの関数であると表記されてきたので、誤まった関係式

$$\partial\widehat{E}/\partial\xi = (\partial\widehat{E}/\partial\widehat{Q})(\partial\widehat{Q}/\partial\xi) = A(\partial\widehat{Q}/\partial\xi) \quad (7)$$

が暗に用いられてきた。実際は、 $\widehat{E}$ はQとメトリッ

クの関数であり、発散形の性質を有効に用いることにより、正しい関係式

$$\begin{aligned} \partial\widehat{E}/\partial\xi & = (\partial\widehat{E}/\partial Q)(\partial Q/\partial\xi) \\ & = (1/J)A(\partial Q/\partial\xi) \end{aligned} \quad (8)$$

が導き出される。詳しくは参考文献1), 8)を参照のこと、

解法は、Yee & Harten の LCI (linearized conservative implicit) - ADI 形<sup>2)</sup>

$$\begin{aligned} & [I + \lambda^{\xi}\theta H_{i+\frac{1}{2},j,k}^{\xi} - \lambda^{\xi}\theta H_{i-\frac{1}{2},j,k}^{\xi}], \\ & [I + \lambda^{\eta}\theta H_{i,j+\frac{1}{2},k}^{\eta} - \lambda^{\eta}\theta H_{i,j-\frac{1}{2},k}^{\eta}], \\ & [I + \lambda^{\zeta}\theta H_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{\zeta} - \lambda^{\zeta}\theta H_{i,j,k-\frac{1}{2}}^{\zeta}]. \quad (\widehat{Q}^{n+1} - \widehat{Q}^n) \\ & = - \{ \lambda^{\xi} [\widetilde{E}_{i+\frac{1}{2},j,k}^n - \widetilde{E}_{i-\frac{1}{2},j,k}^n] \\ & \quad + \lambda^{\eta} [\widetilde{F}_{i,j+\frac{1}{2},k}^n - \widetilde{F}_{i,j-\frac{1}{2},k}^n] \\ & \quad + \lambda^{\zeta} [\widetilde{G}_{i,j,k+\frac{1}{2}}^n - \widetilde{G}_{i,j,k-\frac{1}{2}}^n] \} \end{aligned} \quad (9)$$

を用いる。

(9)式の左辺は1次精度スキームから作られており、数値流束が2点で求まる場合には(7)式に基づいてもたいして悪い近似を与えない。そこで、左辺オペレータの簡略化のため、Yee-Harten と同じ形を用いる。(9)式右辺に対しては、高精度スキーム(数値流束は4点に依存)が用いられる。

右辺の高精度数値流束に対して我々の改良<sup>1)</sup>(即ち(8)式に基づくもの)が適用される。(7)式に基づく差分近似と(8)式に基づくものとは解に著しい差異が現われ、後者が実験結果と良い一致を示すことは、既に参考文献1)に報告した通りである。

#### 3.1.1 Harten-Yee の数値流束<sup>2)</sup>

Harten-Yee の数値流束を、我々の改良(8)式に基づいて一般座標系に適用すると、以下の式を得る。

$$\widetilde{E}_{i+\frac{1}{2}} = (1/2) \left[ \widehat{E}_i + \widehat{E}_{i+1} + \left( \frac{1}{J} R_{\xi} \Phi \right)_{i+\frac{1}{2}} \right]. \quad (10)$$

ここに、 $\Phi$ の要素 $\phi^m$ は

$$\begin{aligned} \phi_{i+\frac{1}{2}}^m & = (1/2) \psi(\alpha_{i+\frac{1}{2}}^m) (g_i^m + g_{i+1}^m) \\ & \quad - \psi(\alpha_{i+\frac{1}{2}}^m + r_{i+\frac{1}{2}}^m) \alpha_{i+\frac{1}{2}}^m, \end{aligned} \quad (11)$$

であり、流束の修正量 $g_i^m$ は

$$g_i^m = \text{minmod} [\alpha_{i+\frac{1}{2}}^m, \alpha_{i-\frac{1}{2}}^m], \quad (12)$$

$$\alpha_{i+\frac{1}{2}} = R_{i+\frac{1}{2}}^{-1} (Q_{i+1} - Q_i) \quad (13)$$

で定義される。

### 3.1.2 Chakravarthy-Osher の数値流束<sup>3)</sup>

Chakravarthy-Osher の数値流束

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{i+\frac{1}{2}} &= h_{i+\frac{1}{2}} - \frac{1-\phi}{4} d\bar{E}_{i+\frac{3}{2}} - \frac{1+\phi}{4} d\bar{E}_{i+\frac{1}{2}} \\ &+ \frac{1+\phi}{4} d\bar{E}_{i+\frac{1}{2}} + \frac{1-\phi}{4} d\bar{E}_{i-\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} h_{i+\frac{1}{2}} &= (1/2)(\hat{E}_{i+1} + \hat{E}_i) \\ &- (1/2)(d\hat{E}_{i+\frac{1}{2}}^+ - d\hat{E}_{i-\frac{1}{2}}^-), \end{aligned} \quad (15)$$

を, (8)式に基づいて一般座標系に適用する。

$$d\bar{E}_k^+ = (1/J)_k R_k A_k^+ R_k^{-1} A_k Q, \quad (k=i+1/2), \quad (16)$$

$$\begin{aligned} d\bar{E}_{k+1}^- &= (1/J)_k R_k A_k^- \text{minmod} \\ &\times [R_k^{-1} A_{k+1} Q, \beta R_k^{-1} A_k Q], \end{aligned} \quad (17.a)$$

$$\begin{aligned} d\bar{E}_k^- &= (1/J)_k R_k A_k^- \text{minmod} \\ &\times [R_k^{-1} A_k Q, \beta R_k^{-1} A_{k+1} Q], \end{aligned} \quad (17.b)$$

$$\begin{aligned} d\bar{E}_k^+ &= (1/J)_k R_k A_k^+ \text{minmod} \\ &\times [R_k^{-1} A_k Q, \beta R_k^{-1} A_{k-1} Q], \end{aligned} \quad (17.c)$$

$$\begin{aligned} d\bar{E}_k^+ &= (1/J)_k R_k A_k^+ \text{minmod} \\ &\times [R_k^{-1} A_{k-1} Q, \beta R_k^{-1} A_k Q]. \end{aligned} \quad (17.d)$$

### 3.2 数値拡散を加えることによる流束発散近似

#### 3.2.1 Beam-Warming の数値流束<sup>4)</sup>

解法として対角化ADIアルゴリズム<sup>7),9)</sup>を用いる。その数値流束は次のように表わされる。

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{i\pm\frac{1}{2}} &= (1/2)(\hat{E}_i + \hat{E}_{i\pm 1}) \\ &+ \epsilon J_i^{-1} (\Delta \nabla \Delta)_{i\pm\frac{1}{2}} Q. \end{aligned} \quad (18)$$

#### 3.2.2 大林の数値流束<sup>6)</sup>

ここでもまた, 解法としてLCI-ADIアルゴリズム(9式)を用い, 右辺に大林の数値流束

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{i+\frac{1}{2}} &= (1/2)(\hat{E}_i + \hat{E}_{i+1}) \\ &+ \epsilon \max_m |a_{i+\frac{1}{2}}^m| / J_{i+\frac{1}{2}} \cdot \{ -(I - \phi_{i+\frac{1}{2}} Q \\ &+ \phi_{i+\frac{1}{2}} (\Delta \nabla \Delta)_{i+\frac{1}{2}} Q \} \end{aligned} \quad (19)$$

を用いる。 $\phi$ は対角行列であり, その要素は,

$$\phi_{i+\frac{1}{2}}^m = \text{minmod} \left( 1, \frac{Q_i^m - Q_{i-1}^m}{Q_{i+1}^m - Q_i^m}, \frac{Q_{i+2}^m - Q_{i+1}^m}{Q_{i+1}^m - Q_i^m} \right) \quad (20)$$

と定義される。

## 4. 数値実験

### 4.1 数値実験条件

Harten-Yee 数値流束においては, 人工圧縮パラメータ  $\omega = 2$  を用い, Chakravarthy-Osher 数値流束においては, 3次精度スキーム ( $\phi = 1/3$ ) と人工圧縮パラメータの最大値 ( $\beta = 4$ ) を用いる。定常状態への収束を加速するために, 左辺オペレータの対角化<sup>7)</sup>及び局所時間増分<sup>9)</sup>を採用する。

数値実験は, 測定データが豊富なONERA-M6翼まわりの流れ<sup>10)</sup>に対して行う。数値実験を行う流れは, 以下12ケースである。

- A)  $M_\infty = 0.70 : \alpha = 1^\circ, 3^\circ, 6^\circ$
- B)  $M_\infty = 0.84 : \alpha = 1^\circ, 3^\circ, 6^\circ$
- C)  $M_\infty = 0.88 : \alpha = 1^\circ, 3^\circ, 6^\circ$
- D)  $M_\infty = 0.92 : \alpha = 1^\circ, 3^\circ, 6^\circ$

用いた格子は等角写像とせん断変換によるC-H型格子<sup>11)</sup>であり, 格子点数は(191, 33, 24)である。半翼幅を1に正規化し, 翼面上で最小格子幅 = 0.01となるように格子を切り直している。翼近傍における格子の拡大図を図1に示す。

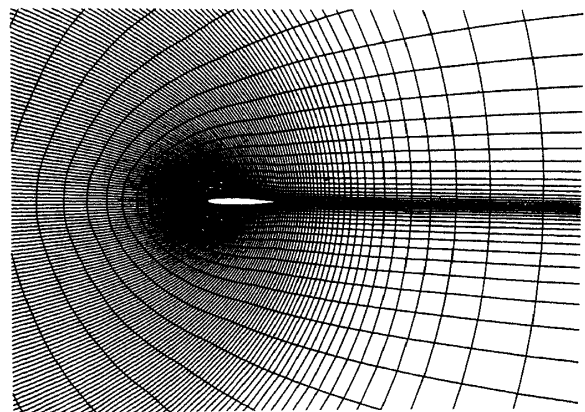
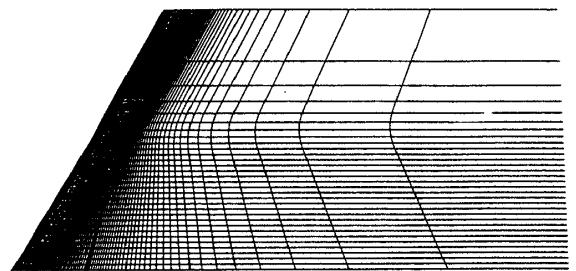


図1 ONERA-M6翼近傍の格子図

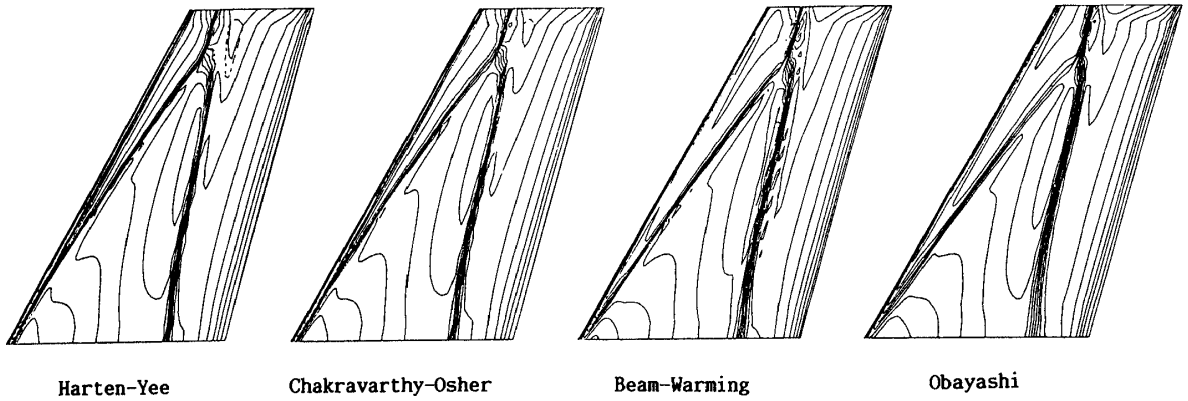
4.2 数値実験結果

4.1 で示した 12 ケースの流れ条件のうち, B), C), D) の  $\alpha = 3^\circ, 6^\circ$  においては三重衝撃波 (強い衝撃波と弱い衝撃波, 及びその合体衝撃波) が計算結果, 実験測定結果共に現われる。三重衝撃波が現れるケースの代表として, 流れ条件 1 ( $M_\infty = 0.84, \alpha = 3.06^\circ$ ) における解の比較を図 2 に示し, その他

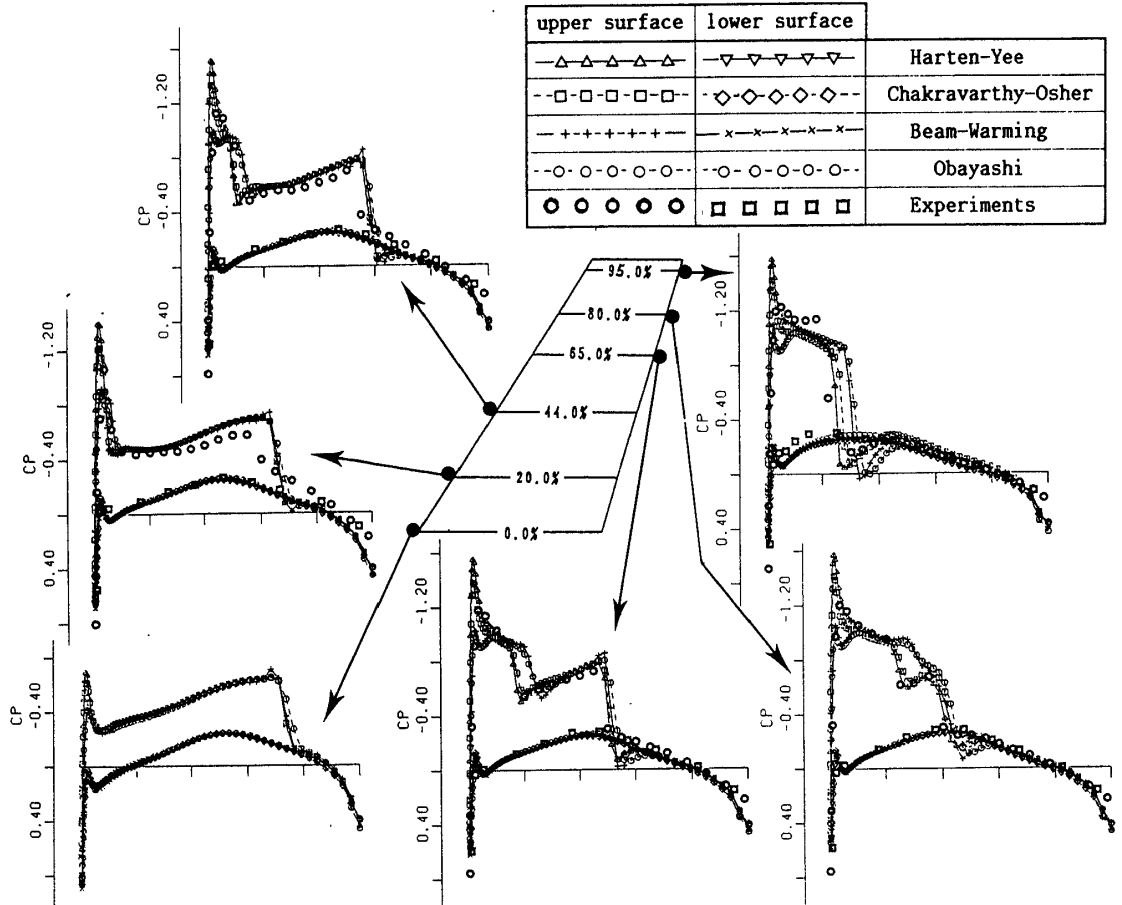
のケースの代表として, 流れ条件 2 ( $M_\infty = 0.70, \alpha = 6.09^\circ$ ) における解の比較を図 3 に示す。

流れ条件 1, 2 における  $C_p$  分布を見ると, 2 つの TVD 数値流束の解はよく似ていること, 大林数値流束と Beam-Warming 数値流束による解もまた類似していることが観察される。

TVD 数値流束による解の特徴は以下の通りであ



(a) 翼上面における等圧線図



(b) 翼面上圧力係数分布

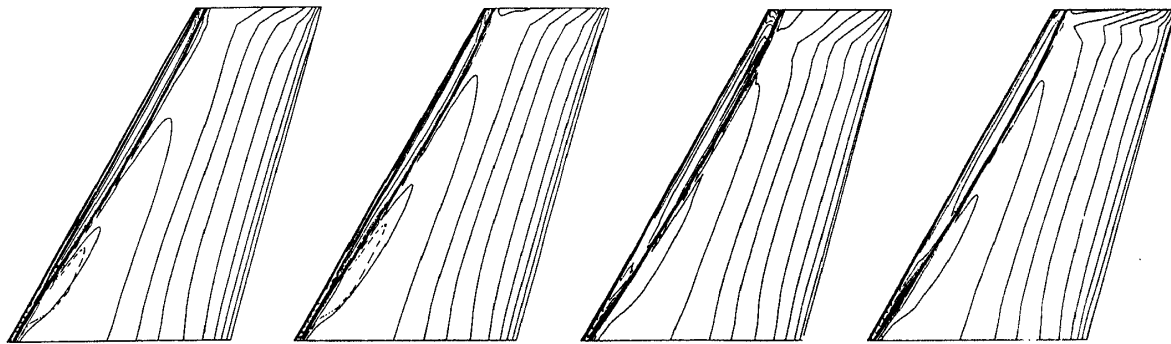
図 2 スキーム比較 ( $M_\infty = 0.84, \alpha = 3.06^\circ$ )

る。

- 衝撃波を数値的振動なく捕える (図 2, 3)。
- 前縁まわりの急激な膨張から衝撃波にかけての実験の傾向を非常に良く捕える (図 2 (b), 図 3 (b))。
- 急激な前縁膨張を実験よりも過剰に捕える (図 2 (b), 図 3 (b)) が, 非粘性流としては妥当な傾向

であろう。

- 衝撃波と急激な前縁膨張を除けばほぼ一定の値の翼面上エントロピー分布を示す (参考文献 12))。一方, 大林数値流束は, 衝撃波前後の振動を除去してはいるものの, 急激な前縁膨張を捕えきれないという点では Beam-Warming 数値流束と同様であ



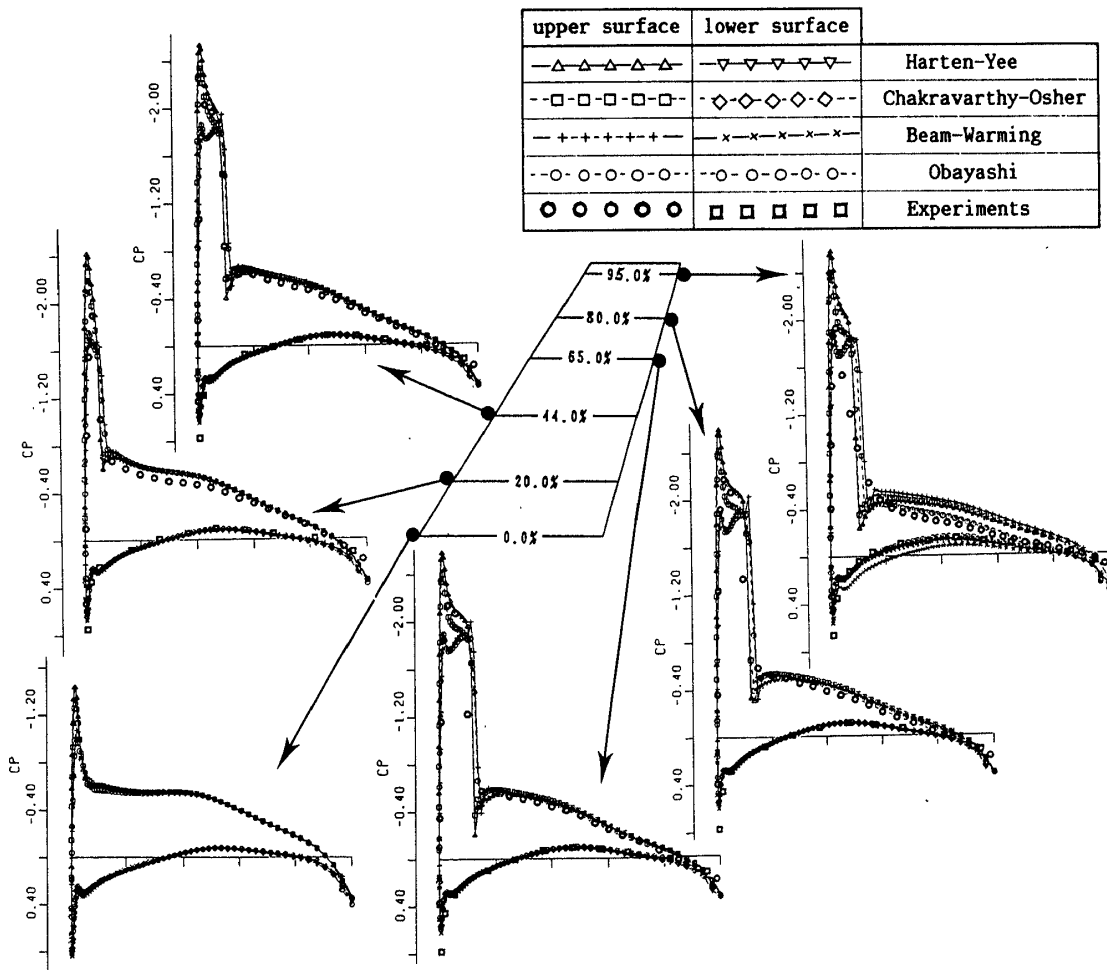
Harten-Yee

Chakravarthy-Osher

Beam-Warming

Obayashi

(a) 翼面上における等圧線図



(b) 翼面上圧力係数分布

図 3 スキーム比較 ( $M_\infty=0.70, \alpha=6.09^\circ$ )

る。これは、急激に膨張する所で数値拡散が必要以上に評価されてしまうためであろう。

以上の傾向は、4.1に示した12ケースの流れ条件のもとでの数値実験結果すべてに共通して観察された。一連の数値実験において、TVD数値流束と大林数値流束は係数を適当な値に固定しておけば問題は起きなかったが、Beam-Warming数値流束では発散や数値的振動を抑えるため数値拡散係数の値の調節を必要とした。

## 5. 結 論

我々の改良したTVD数値流束は以下の点においてBeam-Warmingスキームよりも優れている。

- 1) 衝撃波を数値的振動なく捕える。
- 2) 急激な前縁膨張を数値粘性に汚されずに捕える。
- 3) 数値粘性の自己調節機能と強靱さを備えている。

一方、大林の数値流束は1)と3)を備えてはいるが、その解はBeam-Warmingスキームの解に酷似している。即ち2)の能力がない。

TVD数値流束の特性2)は、極超音速流や反応流の数値計算において、今後重要視されるであろう。

## 6. 謝 辞

一連の研究を遂行するにあたって、航空宇宙技術研究所数理解析部長三好甫先生の御示唆と励ましを賜りましたことを厚く感謝致します。

なお、一連の研究は航空宇宙技術研究所のソフトウェア開発の一環としてなされたものである。

## 参 考 文 献

- 1) Takakura, Y., Ishiguro, T. and Ogawa, S., AIAA Paper 87-1151.
- 2) Yee, H.C. and Harten, A., AIAA Paper 85-1513.
- 3) Chakravarthy, S.R. and Osher, S., AIAA Paper 85-0363.
- 4) Beam, R.M. and Warming, R.F., J. Comp. Phys. 22 (1976) 87-110.
- 5) Jameson, A. and Baker, T.J., AIAA Paper 85-1929.
- 6) Obayashi, S., Fujii, K. and Takanashi, S., AIAA Paper 87-0428.
- 7) Pulliam, T.H. and Caussee, D.S., J. Comp. Phys. 39 (1981) 347-363.
- 8) Takakura, Y., Ishiguro, T. and Ogawa, S., Proceedings of I.S.C.F.D-Sydney (to appear).
- 9) Pulliam, T.H. and Steger, J.L., AIAA Paper 85-0360.
- 10) Schmitt, V. and Charpin, F., AGARD AR-138-B1 (1979).
- 11) Ishiguro, T., NAL TR-731 (1982).
- 12) Takakura, Y., Ishiguro, T. and Ogawa, S., Theor. Appl. Mech. (to appear).