

スペクトル法による平面Poiseuille流遷移の 数値シミュレーション

山本 稀義* 細川 巖**

Numerical Simulation of Transition to Turbulence in Plane Poiseuille Flow by a Spectral Method

by

Kiyoshi YAMAMOTO
National Aerospace Laboratory

Iwao HOSOKAWA
Department of Mechanical Engineering, Iwate University

ABSTRACT

Direct numerical simulation of the transition process from laminar to turbulent plane Poiseuille flow is carried out using a new computing method derived from the Fourier spectral method. The subcritical nonlinear instability for a three-dimensional small disturbance, which is induced by the basic flow plus the two-dimensional finite amplitude T-S wave, is investigated at a Reynolds number, 5000. The two distinct secondary instability mechanisms, the peak-valley splitting and the resonance interaction between T-S wave and a pair of subharmonic oblique waves, are obtained depending on a slight difference being in the initially given three-dimensional small disturbances. The mechanisms correspond to the experimental observation in the boundary layer on a flat plate. The transition is accelerated by the growing three-dimensional disturbances and the turbulent flow obtained agrees well with the experimental observation.

1. はじめに

計算機の発達に伴っていろいろな流体现象の数値シミュレーションが可能となってきたが、乱流についてもこれは例外ではなくて、LESや直接数値シミュレーションによる研究が盛んになって来ている。しかし、乱流の数値シミュレーションでは、流れの中に流体力学的不安定性が存在するため、層流に比べてより高い計算精度が必要となるので、今日でも

数値シミュレーションが成功する流れはごく限られた範囲である。その中でも、層流から乱流への遷移領域は、乱流としては比較的大規模な変動が支配的であるので、直接数値シミュレーションによる解明がとくに期待される領域である。ただ、このためにはナビエ・ストークス方程式の高精度な数値計算法が必要となるが、これに適した計算法としてスペクトル法がある。

スペクトル法は流れの速度場を適当な直交関数系で展開し、速度場の時間的发展をその展開係数について解く計算法で、通常の物理空間における差分法

* 航空宇宙技術研究所・空気力学第一部

** 岩手大学工学部

に比べて計算精度の良い事が特徴である¹⁾。とりわけ、直交関数にフーリエ級数を使用するフーリエ・スペクトル法は計算が簡明で、かつ、計算精度の良い事が知られていて、これまでもしばしば乱流の数値シミュレーションに使用されて来た²⁾。しかし、この計算法には流れに周期条件が必要となるので、固体壁の有る平面 Poiseuille 流や境界層等の剪断流の数値シミュレーションには適さないと考えられて来て、この様な流れではこれまでチェビシェフ級数を使用する方法が取られて来た^{3),4)}。これに対して、筆者は先にフーリエ・スペクトル法を少し修正する事によって壁境界条件を満たす新しいスペクトル法を提案し⁵⁾、これを応用した平面 Poiseuille 流遷移の簡単な計算結果について報告したが⁶⁾、ここでは、さらにその計算精度を向上した結果について述べる。

平面 Poiseuille 流はこれまで乱流の研究に最も広く使用されて来た流れで、遷移の機構もかなりよく知られている⁷⁾。すなわち、まず、臨界レイノルズ数 R_c が線型安定理論より 5772 と求められている。しかし、実験的にはレイノルズ数 R が 1000 程度から遷移する事が知られていて⁸⁾、この $R < R_c$ における遷移の機構を明らかにする事は、単に平面 Poiseuille 流のみならず、一般の乱流の遷移機構を理解する上で非常に重要である。これに対する説明として現在提案されている力学機構は次の通りである⁹⁾。まず、 $R < R_c$ でも不安定となる特別な 2 次元有限振幅波 (Tollmien-Shlichting 波、以下では T-S 波と略称する) が存在し、この T-S 波が存在する事によって、それまで安定であった 3 次元微小擾乱が不安定となり、最終的に乱流へ遷移する。ここでは、この亜臨界遷移の 2 次不安定機構をナビエ・ストークス方程式にもとづく数値シミュレーションによって調べる。

2. スペクトル法による平面 Poiseuille 流の計算方法

2.1 流れの境界条件

流れの速度場をフーリエ級数で

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{u}(\mathbf{k}, t) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{X}) \quad (2.1)$$

と展開し、速度場の発展を $\mathbf{u}(\mathbf{k}, t)$ について解く。

(以後は $\mathbf{u}(\mathbf{k}, t)$ 等の時間 t は必要のないかぎり省略して $\mathbf{u}(\mathbf{k})$ と書く。) (2.1) では流れの周期性が仮定されていて、その各方向の長さを L_α ($\alpha = x, y, z$) とすれば、波数は $k_\alpha = 2\pi n_\alpha / L_\alpha$ (n_α は整数) となる。

今、 $\pm L_z/2$ に壁のある平面 Poiseuille 流を考えると (図 1) ここでは境界条件

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}) = 0 \quad (2.2)$$

が必要となるが、(2.1) では一般にこれを満たす事は出来ない。しかし、もしフーリエ成分の間に

$$\sum_{n_z} (-1)^{n_z} \mathbf{u}(k_x, k_y, \frac{2\pi}{L_z} n_z) = 0 \quad (2.3)$$

が恒等的に成立すれば、(2.1) は (2.2) を満足する。

(2.3) は $\mathbf{u}(\mathbf{k})$ についての同次な束縛条件で、力学的にはこれらの成分が互に独立ではない事を表わす。この様な一次の束縛条件を持つ力学変数から独立な力学変数を導く簡単な関数変換が先に筆者によって導かれている。すなわち、(2.3) 式を一般に

$$\sum_{n=1}^N a_n u_n = 0 \quad (2.4)$$

と書くと、 N 次元空間のベクトル $\{a_n\}$ に直交する $N-1$ 個の単位ベクトルから成る直交変換 ϕ_{mn} によって

$$u_n = \sum_{m=1}^{N-1} \phi_{mn} v_m \quad (2.5)$$

で表わされる u_n は (2.4) を満たす⁵⁾。(2.5) の逆変換

$$v_m = \sum_{n=1}^N \phi_{mn} u_n \quad (2.6)$$

によって $N-1$ 個の独立な力学変数 v_m は得られる。流れの時間的发展の計算を v_m について行えば、境界条件 (2.4) は常に保証される。

2.2 基礎方程式

流れの座標系を図 1 の様に、基本流 U の方向に x 軸、壁に垂直な方向に z 軸、これらに垂直に y 軸をとる。また、流れを基本流 $U (=1-z^2)$ と遷移によって発生する乱れ $\mathbf{u}(x, y, z)$ に分解すると、 \mathbf{u} の方程式はナビエ・ストークス方程式より

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial t} = -U \frac{\partial u_\alpha}{\partial x} - \delta_{\alpha x} w \frac{\partial U}{\partial z} - u_\beta \frac{\partial u_\alpha}{\partial X_\beta} - \frac{\partial p}{\partial X_\alpha}$$

$$+\frac{1}{R} \nabla^2 u_\alpha \quad (2.7)$$

となる。ここで $\mathbf{X}=(x, y, z)$, $\mathbf{u}=(u, v, w)$ で、圧力は $-2x/R + p$ と置かれた。また、 $\delta_{\alpha x}$ はクロネッカーのデルタである。流れの計算領域は $L_z=2$, $L_x=L_y=4\pi/\lambda$ と選び、レイノルズ数を $R=U(0) \cdot (L_z/2)/\nu=1/\nu$ で定義する。ここで、 λ は後に与える T-S 波の波数 ($\lambda=1.2$) である。 $\mathbf{u}(\mathbf{X})$ のフーリエ成分 $\mathbf{u}(\mathbf{k})$ の方程式は (2.7) より

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_\alpha(\mathbf{k})}{\partial t} = & -\frac{k^2}{R} u_\alpha(\mathbf{k}) - i k_\beta \sum_{\mathbf{k}'} u_\alpha(\mathbf{k}') u_\beta(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \\ & - i k_\alpha p(\mathbf{k}) - i k_x \sum_{k'_z} U(k_z - k'_z) \\ & \cdot u_\alpha(k_x, k_y, k'_z) - \delta_{\alpha x} \sum_{k'_z} U'(k_z - k'_z) \\ & \cdot w(k_x, k_y, k'_z) \end{aligned} \quad (2.8)$$

となる。ここで $U'=dU/dz$ で、圧力 $p(\mathbf{k})$ は

$$\begin{aligned} p(\mathbf{k}) = & -\frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} \sum_{\mathbf{k}'} u_\alpha(\mathbf{k}') u_\beta(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \\ & + \frac{i 2 k_x}{k^2} \sum_{k'_z} U'(k_z - k'_z) w(k_x, k_y, k'_z) \end{aligned} \quad (2.9)$$

である。 $\mathbf{u}(\mathbf{k})$ はさらに連続の条件

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{k}) = 0 \quad (2.10)$$

に従うが、これはまた (2.4) と同型の束縛条件であるので、(2.5) と同様な変換で容易に満足する事が出来る。結局、これらの条件を満たす流れは (2.6) と同様な変換によって

$$\begin{aligned} \eta_\mu(k_x, k_y, m, t) = & \sum_{n_z} \phi_\mu(k_x, k_y, \frac{2\pi}{L_z} n_z, m) \\ & \cdot \sum_{\alpha=1}^3 e_{\alpha\mu}(\mathbf{k}) u_\alpha(\mathbf{k}, t) \end{aligned} \quad (2.11)$$

と表わす事が出来る。ここで $\mu=1, 2$ で、 $e_{\alpha\mu}(\mathbf{k})$ は \mathbf{k} に直交する 2 つの単位ベクトルである¹⁰⁾ η_μ の時間的发展は (2.11) と (2.8) から計算される。

2.3 初期条件

前述の様に、ここでは平面 Poiseuille 流の垂臨界非線型遷移機構を調べる。このため、レイノルズ数 R は臨界レイノルズ数 5772 より小さい値を選ぶが、

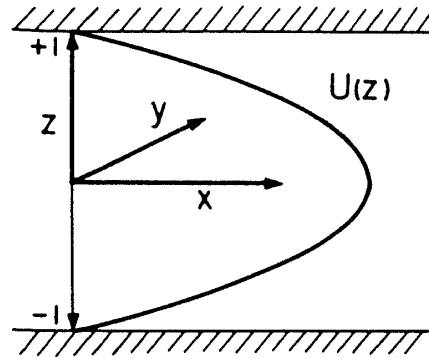


図1 平面 Poiseuille 流

これまで実験も多く行われている $R=5000$ とする⁷⁾。乱れ \mathbf{u} の初期条件は、 $R=5000$ の線型安定理論から最も減衰率の小さい 2 次元波として得られる波 (T-S 波) を有限振幅とした流れに 3 次元微小擾乱を加えたものを与える。この事は T-S 波による 2 次不安定機構を想定しているが、これと同じ取扱は実験においても振動リボンの加振によって T-S 波を発生させる装置で行われている⁷⁾。

3. 計算結果と討論

(2.8) 式の計算はフーリエ・スペクトル法を応用して行われる。この時、フーリエ成分の数と共に計算量の急増をもたらす項は右辺の第 2 項と圧力項であるが、これを高速フーリエ変換を応用して効率的に計算するのがスペクトル法の要点である。これに使用する速度場のフーリエ成分の数を x, y, z 方向について $32 \times 32 \times 128$ 個とする。ここで、壁に垂直な z 方向は分解能を高くするためフーリエ成分の数を多くしてある。もちろん、これらの数が多い程計算の打ち切り誤差は小さくなるが、反面、計算時間が急増する。文献 6) では $16 \times 16 \times 64$ 成分による計算が行われたが、本報告ではこれらを各 2 倍にして計算精度の検討も行う。また、時間方向の差分には精度のよいルンゲ・クッタ・ジル法を使用するが、この時安定に計算出来る時間ステップ Δt は 0.05 である。これらによる本計算の所要時間は VP-400 を使用して約 6 時間である。

図 2 は $k_x=1.2$ の 2 次元 T-S 波の非線型安定性をナビエ・ストークス方程式を使って計算した結果を示し、 $E(k_x, k_y)$ は

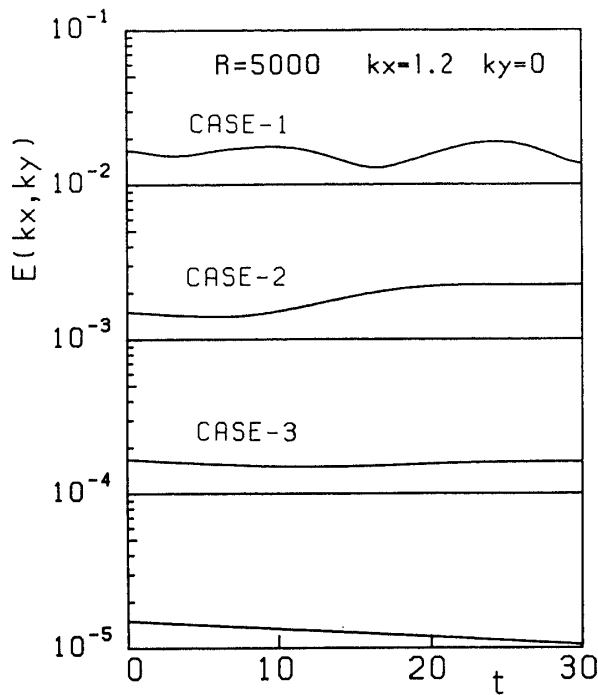


図2 2次元 T-S波の亜臨界非線型不安定性

$$E(k_x, k_y) = \sum_{k_z} |u(k_x, k_y, k_z)|^2 \quad (3.1)$$

で、 (k_x, k_y) モードに含まれるエネルギーの2倍である。計算結果は T-S波の安定(減衰)・不安定(増幅)が初期に与えたエネルギー E に依存する事を示している。この結果は Herbert の非線型安定計算の結果とよく一致している⁹⁾。特に、Case-3は中立安定曲線の下枝にほぼ対応するため、エネルギーの平衡状態がほぼ成立している。これによって、少なくともこの大きさの T-S波は流れの中で残存出来る事が実証出来たので、次はこの Case-3 のエネルギーを持つ T-S波に 3次元微小攪乱を加えて、その流れの安定・不安定を数値シミュレーションによって調べる。

図3と図4は T-S波による 3次元微小攪乱の 2次元不安定機構から生ずる遷移過程の中でいろいろなモードが増幅される様子を示したもので、図3と図4の違いは初期に与えた 3次元微小攪乱の形状の違いに対応している。すなわち、図3では 3次元攪乱の初期値を $|n_x| \leq 1$ かつ $|n_y| \leq 6$ のモードに加え、その他を零としたが、図4では $|n_x| \leq 1$ かつ $|n_y| = 1, 2$ のモードだけに加えて、その他を零としている。この時、初期に与えられた各モードの $E(k_x,$

$k_y)$ の値はいずれも 10^{-12} で、T-S波(図中で Primary と記されている三角印の曲線)に比べて約 8桁小さくなっているため、微小攪乱と考えてよい。また、T-S波はそのサブハーモニックの役割を調べるため $n_x=2$ に与えてある。計算結果は初期に与えられた 3次元微小攪乱の形状の違いに依存して遷移過程が異なる事を示している、以下では図3の場合を Case-4A、図4の場合を Case-4B と呼ぶ。

図3では初期にエネルギーを与えたモードと共に、零と置いた他のモードも時間と共に成長して来るが、その発達の過程において卓越した特別なモードが出現して来ない。これに対して、図4では時間と共に直線的に成長する各モードの中で $n_x=1, n_y=2$ の成分(丸印)が他に比べて卓越して発達する結果が得られている。このモードは x 方向の波数について T-S波のサブハーモニックであり、図3とは明らかに異なる遷移の機構を持っている。最近の Saric と Thomas¹¹⁾ の平板境界層の実験によると、T-S波による 2次元不安定機構にもとづく遷移では、従来よく知られている T-S波の振幅の peak-valley 構造をもつ遷移¹²⁾の外に、T-S波とそのサブハーモニックの共鳴干涉による遷移¹³⁾も実現する事が報告されているが、ここで得られた二つの遷移機構については、図3(Case-4A)は前者に対応し、図4(Case-4B)は後者に対応している事がわかる。すなわち、これらの結果は平板境界層で実験的に観測された二つの遷移機構が平面 Poiseuille 流でも実現する事を示していると共に、その発生が初期に与えられた 3次元微小攪乱のわずかな違いに対応して生ずる事を示している点で注目される。しかし、これについてのこれ以上の討論は本報告では省略する。

図3では時間 t がほぼ 150 を越えると 3次元モードのエネルギーは T-S波と同程度となり、丁度この頃から $n_x=n_y=0$ の平均流成分(四角印)が急激に成長を始め、 $t \approx 180$ で最大値に到達し、その後はほぼ一定値を取る。これは、平均流分布が、この時刻で初期の層流分布から乱流分布に変化した事を表わしている(図6参照)。他方、その他の各モードは T-S波を含めてほぼ一塊となっていて、これは乱流特有の強い非線型相互作用の結果である。図3と図4の比較では、遷移は図3の方が早く進行し

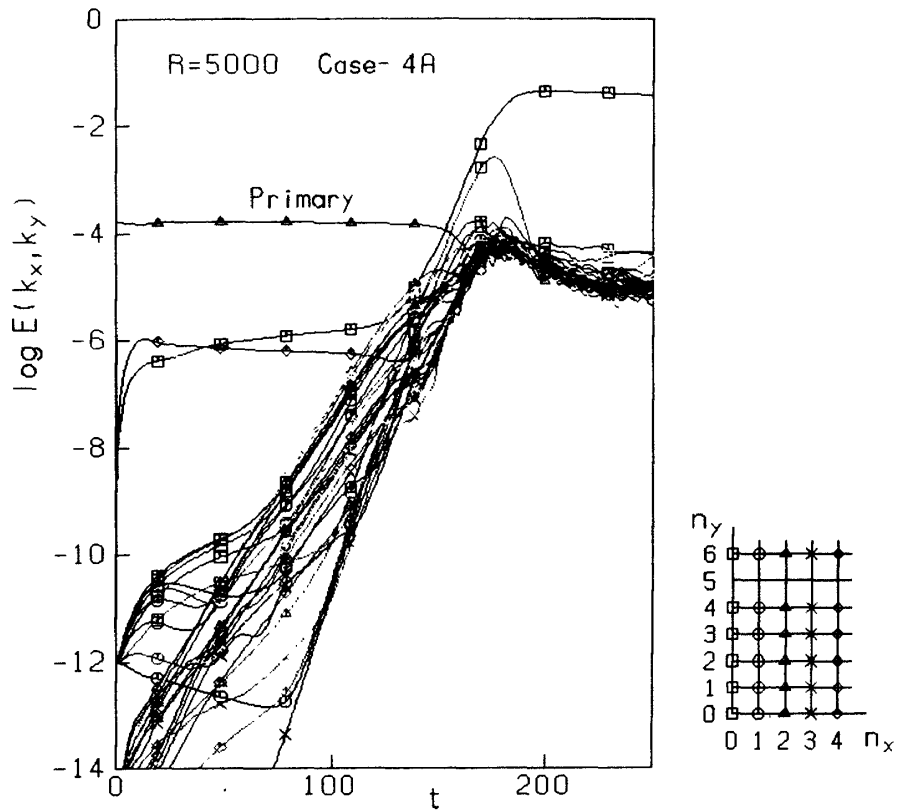


図3 2次不安定機構による遷移過程におけるいろいろなモードの発達
Case-4A

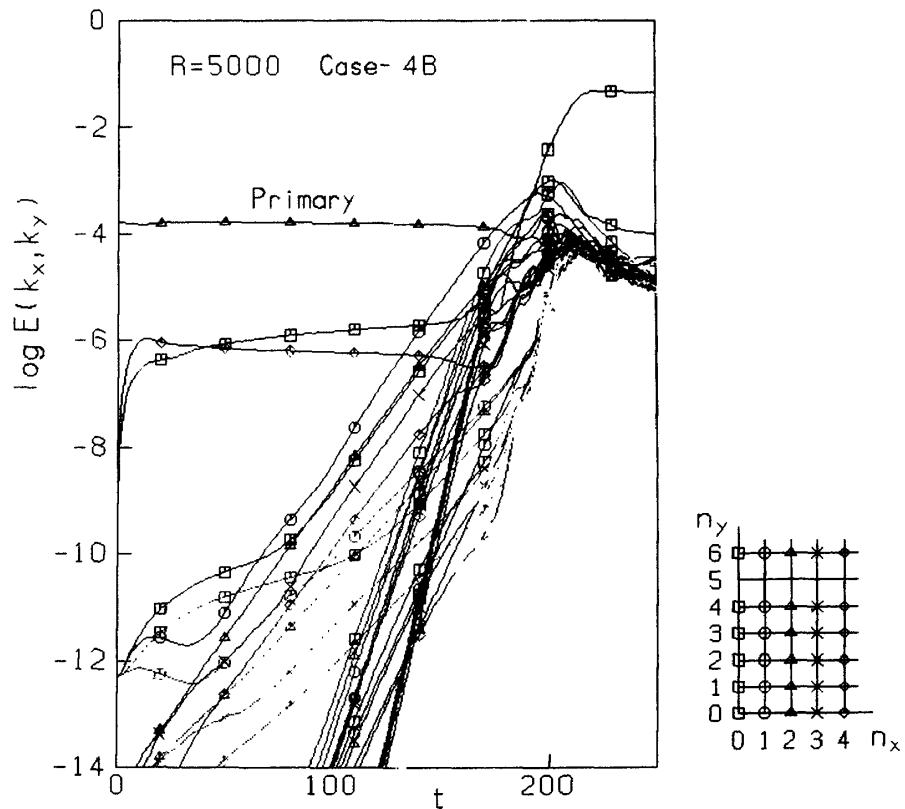


図4 2次不安定機構による遷移過程におけるいろいろなモードの発達
Case-4B

ている事がわかるが、この傾向は Saric と Thomas の実験と一致している¹¹⁾。他方、遷移後に得られた乱流の構造については両者の間に大きな違いは見られない。

図 5 は Case-4B における乱れの x 成分 u の空間分布の時間的発達を示し、時間は上から $t=0$ 、 $t=190$ 、 $t=220$ である。 $t=0$ の波形は初期に与えた T-S 波を示し、 $t=190$ では空間的に大きい変動がこれに加わる事を示している。さらに $t=220$ では遷移後の完全な乱流分布になっている。すなわち、平均的には流れの中央部で負、両端の壁近くでは正の値を取る不規則な分布が実現していて、これは平面 Poiseuille 流の乱流成分の特徴である。

図 6 は Case-4A における x 方向の平均流 $U + \langle u \rangle$ の時間的発達を示す。ここで $\langle u \rangle$ は平均値

$$\langle u \rangle = \frac{1}{L_x L_y} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} u(x, y, z) dx dy \quad (3.2)$$

である。計算結果はほぼ $t \approx 170$ で分布が層流型から乱流型に急変する事を示し、これは図 3 のモードの変化とよく対応している。 $t=250$ の分布は実験的にもよく知られた乱流分布を示している。

4. む す び

フーリエ・スペクトル法から導かれた新しいスペクトル法を応用して平面 Poiseuille 流の遷移過程の数値シミュレーションを行った。レイノルス数が 5000 で、T-S 波による 2 次不安定機構にもとづく亜臨界非線型遷移過程について計算し、二つの異なる遷移機構、peak-valley 機構および T-S 波とそのサブハーモニックの共鳴干渉による機構、が実現する結果が得られた。これらの遷移機構は実験的にも観測されている。

得られたいろいろな計算結果は実験ともよく一致していて、少なくとも平面 Poiseuille 流については、本スペクトル法でその遷移機構が十分解明出来る事がわかった。また、この様な数値シミュレーションは実験とは異なる多くの利点を有するので、乱流の研究に今後ますます重要となると考えられる。

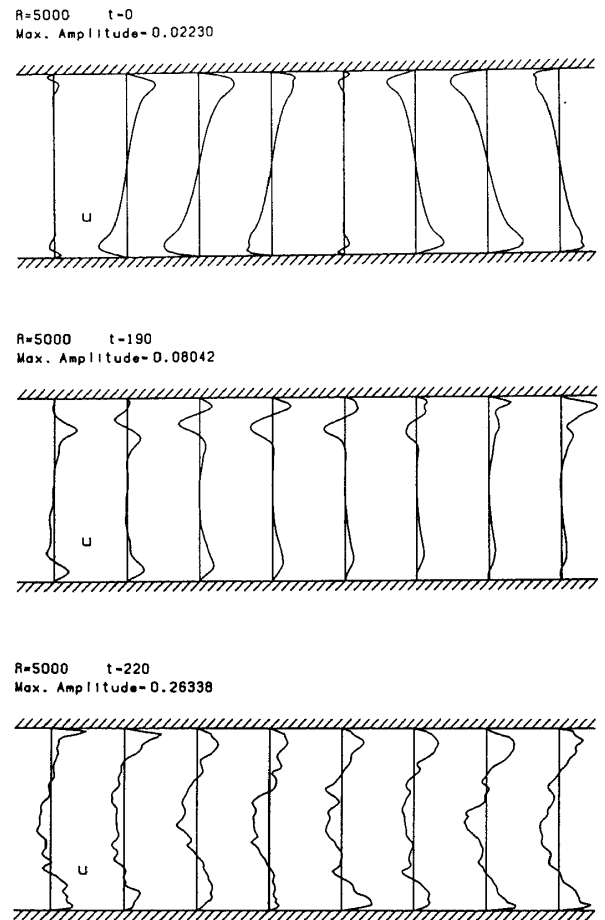


図 5 乱れの x 成分 u の発達
Case-4B

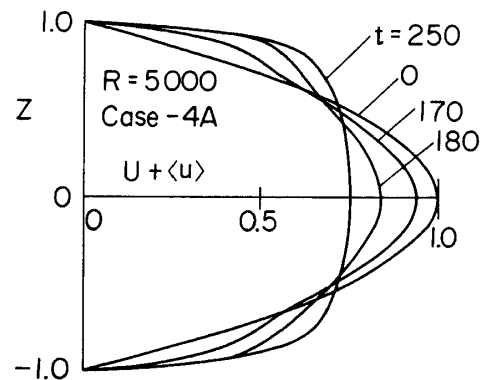


図 6 平均流 $U + \langle u \rangle$ の発達
Case-4A

5. 謝 辞

本計算の初期値に使用した T-S 波の分布は空気力学第二部伊藤信毅室長による。有益な討論と共に感謝致します。

参 考 文 献

- 1) D. Gottlieb and S.A. Orszag: NSF-CBMS Monograph No. 26, Soc. Ind. and Appl. Mech. (1977).
- 2) S.A. Orszag and G.S. Patterson, Jr.: Phys. Rev. Lett. **28** (1972) 76.
- 3) S.A. Orszag and A.T. Patera: J. Fluid Mech. **128** (1983) 347.
- 4) L. Kleiser and E. Laurien: AIAA Paper No. 85-0566 (1985).
- 5) I. Hosokawa and K. Yamamoto: J. Phys. Soc. Japan **55** (1986) 1030.
- 6) 山本稀義, 細川 巖: 第18回乱流シンポジウム論文集, ながれ5巻別冊 (1986) 220.
- 7) M. Nishioka, S. Iida and Y. Ichikawa: J. Fluid Mech. **72** (1975) 731.
- 8) V.C. Patel and M.R. Head: J. Fluid Mech. **38** (1969) 181.
- 9) T. Herbert: AGARD CP-224 (1975) 3-1.
- 10) K. Yamamoto and I. Hosokawa: J. Phys. Soc. Japan **50** (1981) 343.
- 11) W.S. Saric and A.S.W. Thomas: Proc. IUTAM Symposium: Turbulence and Chaotic Phenomena in Fluids, Kyoto, Japan (1983) 117.
- 12) P.S. Klebanoff, K.D. Tidsstorom and L.M. Sargent: J. Fluid Mech. **12** (1962) 34.
- 13) A.D. Craik: J. Fluid Mech. **50** (1971) 393.

