

回転する直管内の流れ解析

石垣 博* 望月 宗和*

Numerical Analysis of the Flow in Rotating Straight Pipe

by

Hiroshi ISHIGAKI and Munekazu MOCHIZUKI
National Aerospace Laboratory, Kakuda Branch

ABSTRACT

Parabolized Navier-Stokes Computations are reported for the laminar flow in a circular pipe rotating about an axis perpendicular to that of the pipe. The results are compared with the experimental data by Ito and Nanbu in regard to the friction factor, velocity profile in the symmetry plane and wall pressure distribution.

1. ま え が き

直管が管軸と垂直な軸のまわりに一定の角速度で回転するとき、内部を流れる流体には遠心力とコリオリ力が作用する。このとき、速度の大きい管中央部の流体には管壁近くの流体にくらべて大きなコリオリ力が働くために、管断面には曲り管内流れに類似の二次流れが発生し、管摩擦係数や熱伝達率は静止直管にくらべて増加する。

このような流れはガスタービン動翼の冷却や遠心圧縮機の羽根車内の流動など、実用的にも重要であり伊藤、南部¹⁾や森、中山²⁾の実験および近似解析による研究をはじめとして、いくつかの研究がある。回転流路の流れは実験測定が難しいので、流れ場の詳細な情報を得る手段として数値解析手法が特に有効である。このような数値解析的な研究としてはMajumdarら³⁾、Iacovidesら⁴⁾の矩形ダクト内の乱流を扱った研究がある。円管については伊藤・長谷

川・谷野⁵⁾が十分に発達した層流の数値解を求めているが、回転レイノルズ数 R_Ω の小さい範囲に限られているので、自身の高 R_Ω 数の実験データ¹⁾との比較はなされていない。

本研究では放物形前進解法により円管内層流を助走区間も含めて解析し、高い R_Ω の流れを扱って伊藤・南部の実験データと比較した。

2. 基礎方程式と数値解析

図1に示すように回転円管に固定して座標をとり、管軸を Z 軸とする(図1の紙面垂直上向き)。直管は Y 軸のまわりに一定角速度 Ω で回転し、回転の向きは x 軸から Z 軸に向うとする。管内の流れが定常、非圧縮であるとすれば、 (r, θ, z) 方向の速度成分を (u, v, w) として、放物化したNavier-Stokes式は次のように書かれる。

$$u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \Omega^2 r \cos^2 \theta + 2\Omega w \cos \theta$$

* 航空宇宙技術研究所

$$+ \nu \left(\nabla^2 u - \frac{u}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right), \quad (1)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r} = - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \Omega^2 r \cos \theta \sin \theta - 2\Omega w \sin \theta + \nu \left(\nabla^2 v + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r^2} \right), \quad (2)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + w \frac{\partial w}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \Omega^2 z - 2\Omega (u \cos \theta - v \sin \theta) + \nu \nabla^2 w, \quad (3)$$

ここに

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

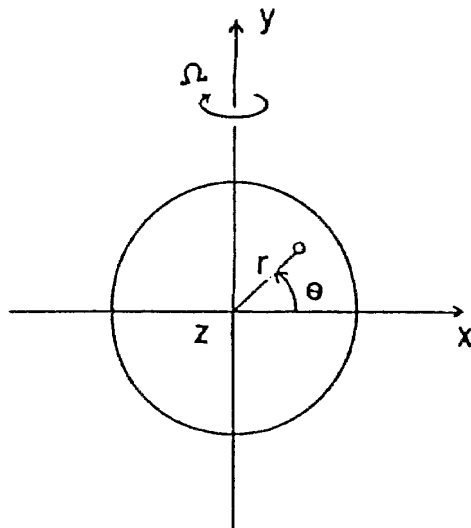


図1 座標系

連続式は

$$\frac{\partial}{\partial r} (ru) + \frac{\partial}{\partial \theta} (v) + \frac{\partial}{\partial z} (rw) = 0, \quad (4)$$

数値計算プログラムは Patankar⁶⁾に準拠して作成した。すなわち式(1)~(4)をコントロールボリューム法により離散化し、スタガード格子を用いた。対流・拡散項にはハイブリッドスキーム、圧力補正には SIMPLE 法を用いた。放物形解法は Patankar-Spalding 法⁷⁾によった。

3. 結 果

以下に示す結果は円管の半断面を 10 × 10 および 21 × 17 の不等間隔格子で計算したものである。図2に 21 × 17 の場合の格子分布を示す。

主流方向の局所壁面せん断応力 τ_p は次式から求まる。

$$\tau_p(z, \theta) = -\mu \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)_{r=R} \quad (5)$$

τ_p の周方向分布の 1 例を使用した格子図とともに図2に示す。コリオリ力によって生じる二次流れは x 軸上で左から右に向うから、二次流れが壁に衝突する方向に τ_p の分布が大きく偏っていることがわかる。

周平均壁面せん断応力 τ_z

$$\tau_z(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \tau_p d\theta \quad (6)$$

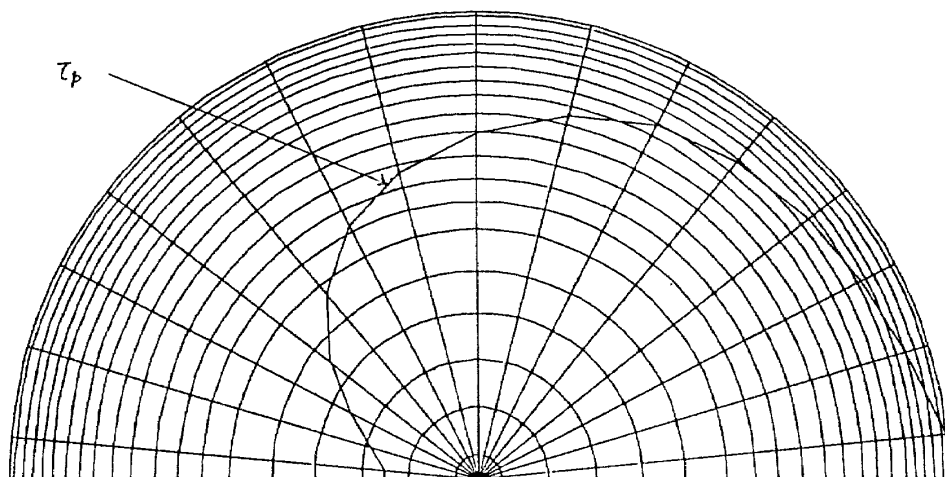


図2 格子分布 (21 × 17) と局所壁せん断応力の周方向分布

を用いると、管摩擦係数は次式で定義される。

$$f = \frac{\tau_z}{\frac{1}{2} \rho w_m^2}, \quad w_m \text{は } z \text{ 方向平均速度} \quad (7)$$

伊藤・南部は十分に発達した層流について詳細な実験測定を行い、次の実験式を導いた¹⁾。

$$\frac{f}{f_{SL}} = 0.0883 K_L^{1/4} (1 + 11.2 K_L^{-0.325}) \quad (8)$$

但し、 $f_{SL} = 16/R_e$ (静止円管の管摩擦係数)

$$K_L = R_g R_e, \quad R_g = \frac{\Omega D^2}{\nu}, \quad R_e = \frac{w_m D}{\nu}$$

式(8)の適用範囲： $2.2 \times 10^2 < K_L < 10^7$, $\frac{R_g}{R_e} < 0.5$

図3に式(8)と計算結果との比較を示す。計算条件は

$z=0$ で一様流入速度 w_m を与えて z 方向に計算を進め f が一定値になるまで計算し、この一定値を完全発達領域の f とした。

図4は対称面 $y=0$ での w の速度分布を伊藤らの測定値と比較したものである。計算結果は全体の傾向をよく表している。

図5は管壁上の圧力分布を比較したものである。 P は実際の圧力 P^* から遠心力場の作用による平衡圧力を差し引いた圧力である。

$$P^* = P - \frac{\rho \Omega^2}{2} (r^2 \cos^2 \theta + z^2) \quad (9)$$

図6に $Z/D = 100$ における w の等速度線図、図7に二次流れの速度ベクトル図を示す。断面内の発達した二次流れの様子が観察できる。

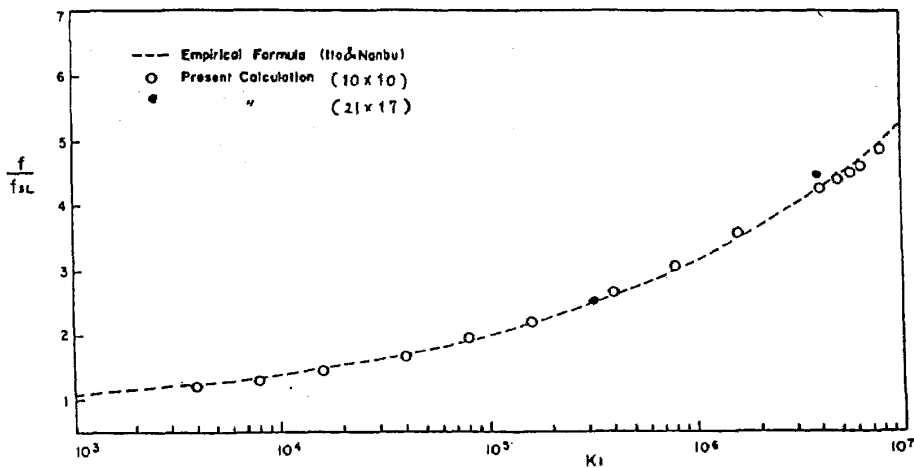


図3 完全発達領域の管摩擦係数

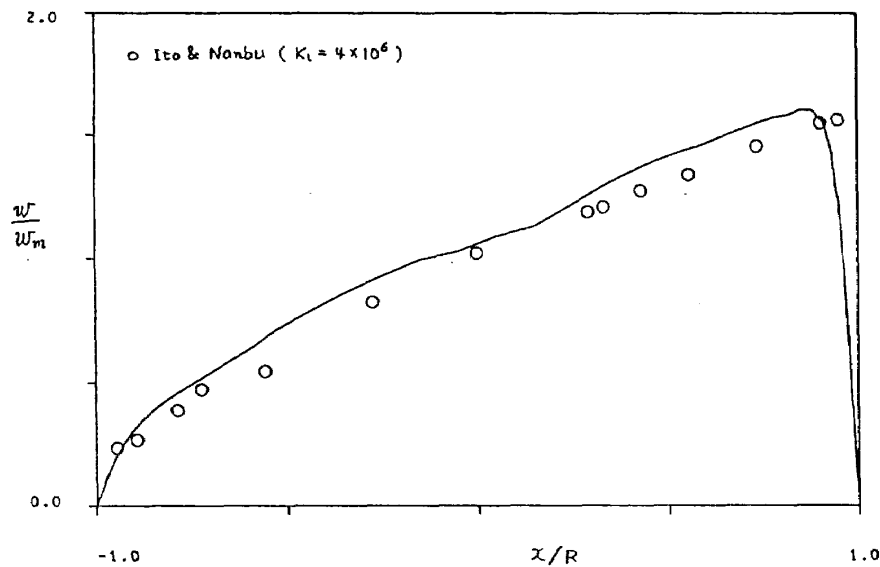


図4 x 軸上 ($y=0$) における速度分布

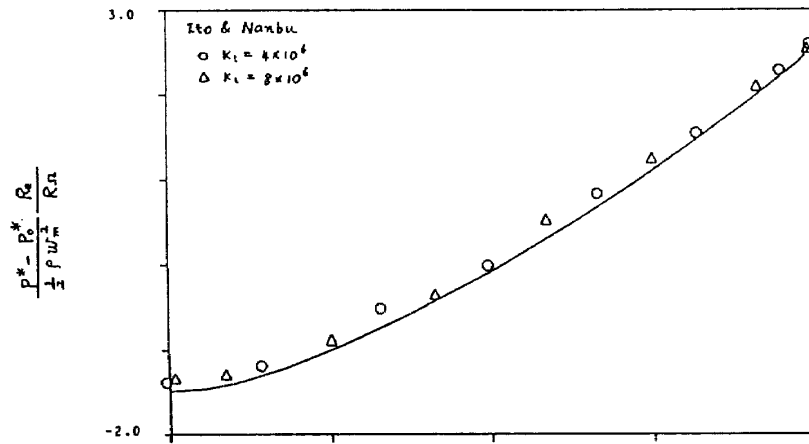


図5 管壁上の圧力分布 ($K_L = 4 \times 10^6$)

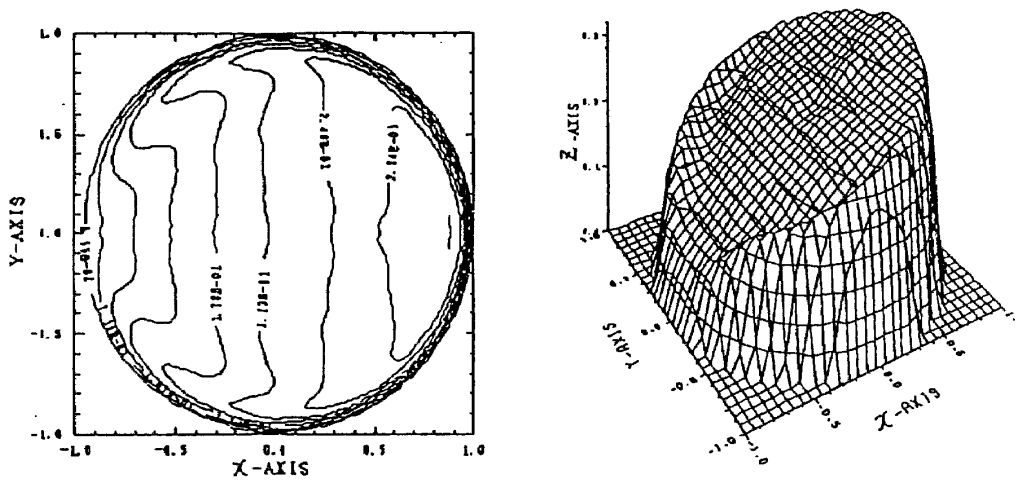


図6 完全発達領域 ($\frac{z}{D} = 100$) における w の等速度線図

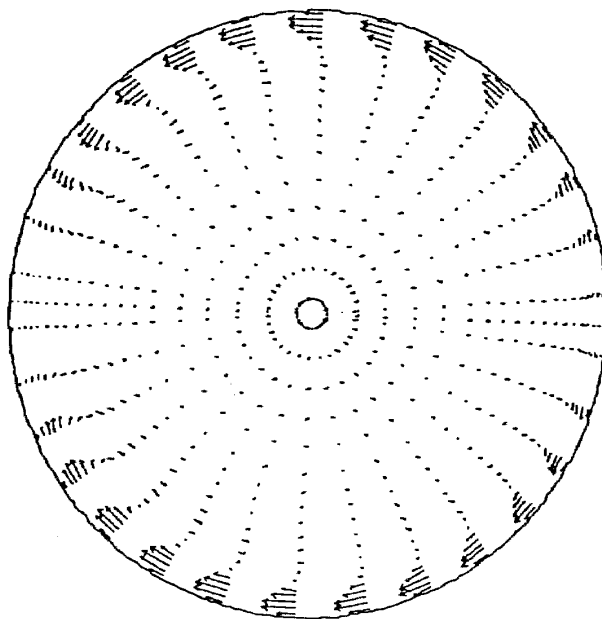


図7 完全発達領域 ($\frac{z}{D} = 100$) における二次流れの速度ベクトル図

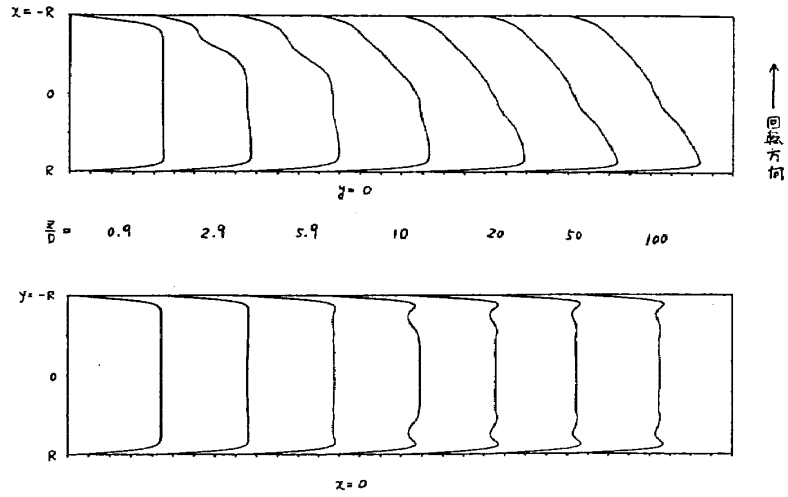


図8 軸方向速度 w の発達の様子 ($R_0 = 4 \times 10^3$, $R_0 = 10^3$, Rossby 数 = 0.25)

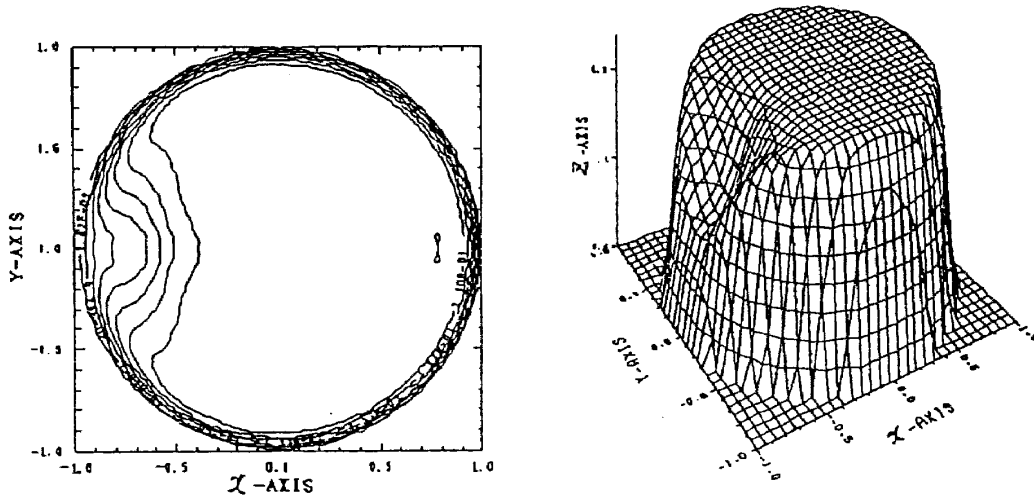


図9 助走区間 ($\frac{z}{D} = 2.9$) における w の等速度線図

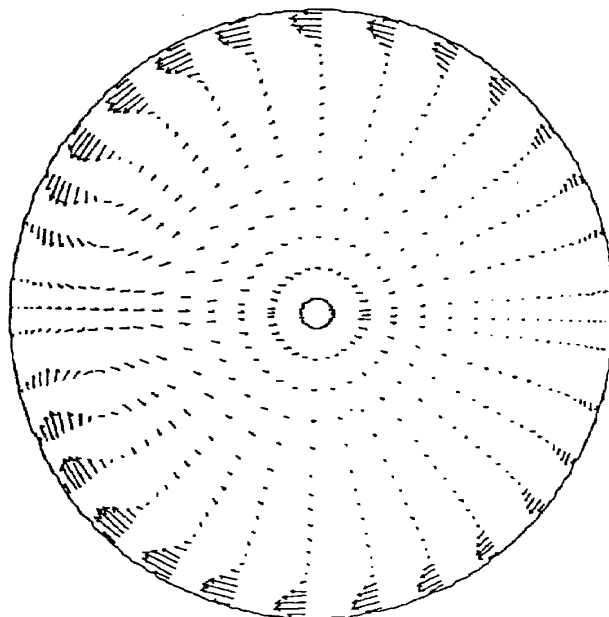


図10 助走区間 ($\frac{z}{D} = 2.9$) における二次流れのベクトル図

次に管入口部からの流れの発達の様子を示す。図8は x 軸上および y 軸上の速度分布の発達を示したものであり、入口から短い距離で負圧側から低速流体が中心部に向かって入りこむのが特徴的である。これは図9の w の等速度線図からも容易にわかり、図10のベクトル図から左上、下部の渦運動がその原因であることが観察できる。

参 考 文 献

- 1) Ito, H. and Nanbu, K. (1971), *J. Basic Engng. Trans. ASME, Ser. D, Vol. 93*, pp. 383-394.
伊藤, 南部 (1973), 東北大学速研報告, 第32巻, 55-105頁.
- 2) 森, 中山 (1967), 機械学会論文集, 33巻, pp.1669.
森, 中山, 深田 (1970), 機械学会論文集, 36巻, pp.983.
- 3) Majumdar, A.K., Pratap, V.S., Spalding, D.B. (1977), *J. Fluids Engng., Trans. ASME Vol. 99*, p. 148.
- 4) Iacovides, H. and Launder, B.E. (1987), *Numerical Heat Transfer, Vol. 12*, p. 475.
- 5) 伊藤, 長谷川, 谷野 (1986), 東北大学速研報告, 第56巻, 75-118頁.
- 6) Patankar, S.V. (1980), *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, Hemisphere*.
- 7) Patankar, S.V. and Spalding, D.B. (1972), *Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 15*, p. 1787.