

## ATVD2スキームについて

小川 哲\* 石黒 登美子\*  
和田 安弘\* 高倉 葉子\*\*

### On a New Difference Scheme-ATVD2

by

Satoru OGAWA, Tomiko ISHIGURO  
and Yasuhiro WADA

*National Aerospace Laboratory*

Yoko TAKAKURA

*Scientific Systems Department, Fujitsu Limited*

### ABSTRACT

A new difference scheme ATVD2 is proposed, which is constructed by applying the modified flux method proposed by Harten for TVD2 (UNO2) scheme. The numerical experiment of ONERA-M6 wing test case shows the solutions of proposed scheme without artificial compression parameter almost coincide with those of Harten-Yee TVD scheme and Chakravarthy-Osher TVD scheme with maximum value of artificial compression parameter. This fact shows the proposed scheme is more accurate than other TVD schemes in multi-dimensional problem. It is also shown the dependence of solutions on the artificial compression parameter is little comparing the previous TVD schemes.

#### 1. はじめに

TVDスキームは衝撃波等の不連続を綺麗に捕らえ、かつ殆どマッハ数に関係なく安定に解けることは良く知られているが、artificial compression parameter (ACP) なしで計算を行うと問題によっては通常良く使われている Beam-Warmingスキームと比べても人工粘性のかなり強い鈍った解を与えてしまう。高精度のTVDスキームは一次精度のTVDスキームに numerical flux を付加することにより構成されるが numerical flux を計算する際物理量

の勾配の小さい方を選択しACPを加えないと殆ど一次精度のTVDスキームになってしまう場合がある。ここではHarten-Yeeタイプのスキーム<sup>1)</sup>の改良を考える。Harten-YeeのTVDスキームは1次精度のTVDスキームにmodified flux(anti-dissipation)を加えることにより2次精度スキームを構成しているがACPを加えないと鈍った解を与える場合があり<sup>2)</sup>、またACPをどのように与えるべきかの規範がなく殆どトライアンドエラーによって最適値を探している。ここでは色々な模索の後に、以下のようなACPの影響を殆ど受けない差分スキーム(ATVD2)を提案する。2nd-order TVDスキームにHartenのmodified fluxの考えかたを使ったもの

\* 航空宇宙研究所数理解析部

\*\* 富士通株式会社科学システム部

で(ATVD2とはTVD2に anti-dissipation を加えた意味) ONERA-M6 廻りの計算により他のスキームとの解の比較をおこなう。

## 2. 基礎方程式

3次元 Euler 方程式

$$\partial_t Q + \partial_x E + \partial_y F + \partial_z G = 0$$

を考える。方程式の性質は良くわかっている<sup>3)</sup> 例えば Jacobian Matrices

$$A \equiv \partial E / \partial Q, \quad B \equiv \partial F / \partial Q, \quad C \equiv \partial G / \partial Q$$

対角化のための相似変換

$$A \equiv T_\xi A_\xi T_\xi^{-1}, \quad B \equiv T_\eta A_\eta T_\eta^{-1}, \quad C \equiv T_\zeta A_\zeta T_\zeta^{-1}$$

$$A_\xi = \text{diag}(a_\xi^m), \quad A_\eta = \text{diag}(a_\eta^m),$$

$$A_\zeta = \text{diag}(a_\zeta^m)$$

などについては古くから良く知られている。

## 3. ATVD2スキームの構成

2次精度の風上差分の圧縮性流体への適用および flux limiter の考えは Van Leer<sup>4,5)</sup> により先駆的に行われた。最近の Harten らの論文<sup>6)</sup> に従うと2次の Godunov タイプのスキーム(TVD2)及び UNO2 スキームの数値流束はスカラー方程式

$$u_t + f(u)_x = 0$$

に対し

$$\begin{aligned} f_{j+1/2} = & 1/2 \{ f(u_{j+1}) + f(u_j) \\ & - |a_{j+1/2}| (u_{j+1} - u_j) \\ & + \max(0, a_{j+1/2}) (1 - \lambda a_{j-1/2}) S_j^n / [1 \\ & + \lambda (a_{j+1/2} - a_{j-1/2})] - \min(0, a_{j+1/2}) \\ & \times (1 + \lambda a_{j+3/2}) S_{j+1}^n / [1 + \lambda (a_{j+3/2} \\ & - a_{j+1/2})] \} \end{aligned}$$

ここで  $\lambda = \Delta t / \Delta x$ ,  $a$  は特性速度,  $S^n$  は

$$S_j^n \equiv \minmod(S_j^+, S_j^-)$$

$$\text{TVD2: } S_j^\ddagger \equiv v_{j\pm 1/2} u$$

$$\text{UNO2: } S_j^\ddagger \equiv v_{j\pm 1/2} u - [\pm (1/2) D_{j\pm 1/2} u]$$

$$D_{j+1/2} u \equiv \minmod(D_j u, D_{j+1} u),$$

$$D_j u \equiv v_{j+1/2} u - v_{j-1/2} u$$

で定義される。上記のスキームの方程式系への適用は簡単にでき以下のように現される。

$$\begin{aligned} F_{j+1/2}^K = & 1/2 \{ F^K(u_{j+1}) + F^K(u_j) \\ & - T_K |A_{j+1/2}| T_K^{-1} (Q_{j+1} - Q_j) \\ & + T_K (\Gamma^+ S_{K,j}^n - \Gamma^- S_{K,j+1}^n) \end{aligned}$$

$$\Gamma^{+\alpha} = \max(0, A_{j+1/2}^\alpha) (1 - \lambda A_{j-1/2}^\alpha) / [1 + \lambda (A_{j+1/2}^\alpha - A_{j-1/2}^\alpha)]$$

$$\Gamma^{-\alpha} = \min(0, A_{j+1/2}^\alpha) (1 + \lambda A_{j+3/2}^\alpha) / [1 + \lambda (A_{j+3/2}^\alpha - A_{j+1/2}^\alpha)]$$

なお, TVD2 及び UNO2 はほぼ同じ解を与え ACP なしの解は1次の Godunov タイプのスキームに近い鈍った解を与える。

Harten<sup>1)</sup> は一次精度の TVD スキームに modified flux を加えることにより2次精度の TVD スキーム

$$\begin{aligned} F_{j+1/2}^K = & (1/2) \{ F^K(u_{j+1}) + F^K(u_j) \\ & + (T_K \Phi)_{j+1/2} \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_{j+1/2}^m = & (1/2) \psi(a_{j+1/2}^m) (g_j^m + g_{j+1}^m) \\ & - \psi(a_{j+1/2}^m + r_{j+1/2}^m) \alpha_{j+1/2}^m \end{aligned}$$

$$g_j^m \equiv \minmod[\alpha_{j+1/2}^m, \alpha_{j-1/2}^m]$$

$$\alpha_{j+1/2} \equiv T_{j+1/2}^{-1} (Q_{j+1} - Q_j)$$

を構成したが, 上記の TVD2 (UNO2) スキームの  $\lambda \rightarrow 0$  の表現はそのまま Harten の方法を適用するのに都合の良い形式をしており我々は TVD2 (UNO2) に modified flux を加えたスキーム ATVD2 (AUNO2)

$$f_{j+1/2} = 1/2 \{ f(u_{j+1}) + f(u_j) + \phi_{j+1/2} \}$$

$$\phi_{j+1/2} \equiv \sigma(a_{j+1/2}) (G_{j+1} - G_j)$$

$$- \psi(a_{j+1/2} + r_{j+1/2}) \delta \chi_{j+1/2}$$

$$\begin{aligned} \delta \chi_{j+1/2} = & v_{j+1/2} u - S_j^n \quad \text{if } a_{j+1/2} \geq 0 \\ = & v_{j+1/2} u - S_{j+1}^n \quad < 0 \end{aligned}$$

$$G_j \equiv \minmod(\delta \chi_{j+1/2}, \delta \chi_{j-1/2})$$

$$r_{j+1/2} \equiv \sigma(a_{j+1/2}) [(G_{j+1} - G_j) / \delta \chi_{j+1/2}]$$

を提案する。方程式系の numerical flux の表現は

$$\begin{aligned} F_{j+1/2}^K = & (1/2) \{ F^K(u_{j+1}) + F^K(u_j) \\ & + (T_K \Phi)_{j+1/2} \} \end{aligned}$$

$$\phi_{j+1/2} \equiv (1/2) \psi(a_{j+1/2}^m) (G_{j+1} + G_j)$$

$$- \psi(a_{j+1/2} + r_{j+1/2}) \delta \chi_{j+1/2}$$

$$G_j \equiv \minmod(\delta \chi_{j+1/2}, \delta \chi_{j-1/2})$$

$$\begin{aligned} \delta \chi_{j+1/2} = & T_{j+1/2}^{-1} (v_{j+1/2} u - S_j^n) \quad \text{if } a_{j+1/2} \geq 0 \\ = & T_{j+1/2}^{-1} (v_{j+1/2} u - S_{j+1}^n) \quad < 0 \end{aligned}$$

$$r_{j+1/2} \equiv (G_{j+1} - G_j) / \delta \chi_{j+1/2}$$

$$\begin{aligned} \psi(z) = & 1/2 (z^2 / \delta + \delta) \quad \text{if } |z| < \delta \\ = & |z| \quad |z| \geq \delta \end{aligned}$$

となる。ATVD2 スキームは minmod の評価が1回ふえるだけで Harten らの TVD スキームと殆ど類似

した簡単な表現になっておりプログラムのコーディングもたやすい。

#### 4. 計算結果

数値計算はONERA-M6翼の test case ( $M=0.84$ ,  $\alpha=3.06$ ) について行った。計算格子はC-Hタイプのもので格子点は $(191 \times 33 \times 24)^7$ である。UNO2のACPなしの計算結果がFig.1に示されている。Numerical dissipation が大きく弱い衝撃波が不鮮明になっており1次精度のスキームに近い解となっていることがわかる。ATVD2とAUNO2の結果は殆ど差異がなくATVD2とHarten-Yee及びChakravarthy-OsherタイプのTVDスキーム<sup>8)</sup>との比較を示す。ACPを加えない場合の比較がFig.2に、ACPの最適値を加えたHarten-Yee及びChakravarthy-OsherタイプのTVDと我々が提案するACP無しのATVD2の解の比較がFig.3に示されている。Fig.3において殆ど識別できない程一致していることがわかる。なおACPの形式はそれぞれの論文を参照されたい。Fig.4にATVD2のACPによる解の違いを示しているがACPの値によって

解がほとんど変わらないことがわかる。更に、ATVD2はACPの値及び境界の取り扱いに解が殆ど影響されないという長所を持っている。

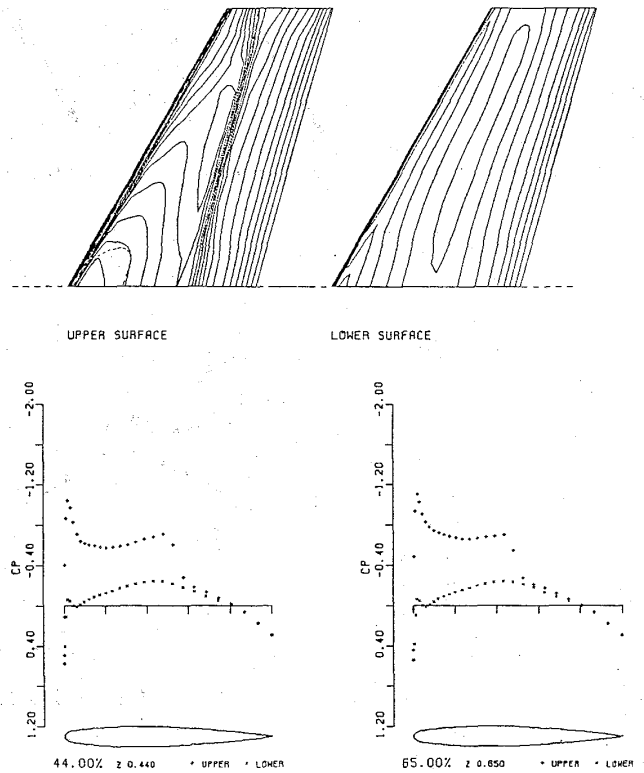


Fig.1 UNO2スキームによる解 (ACPなし)

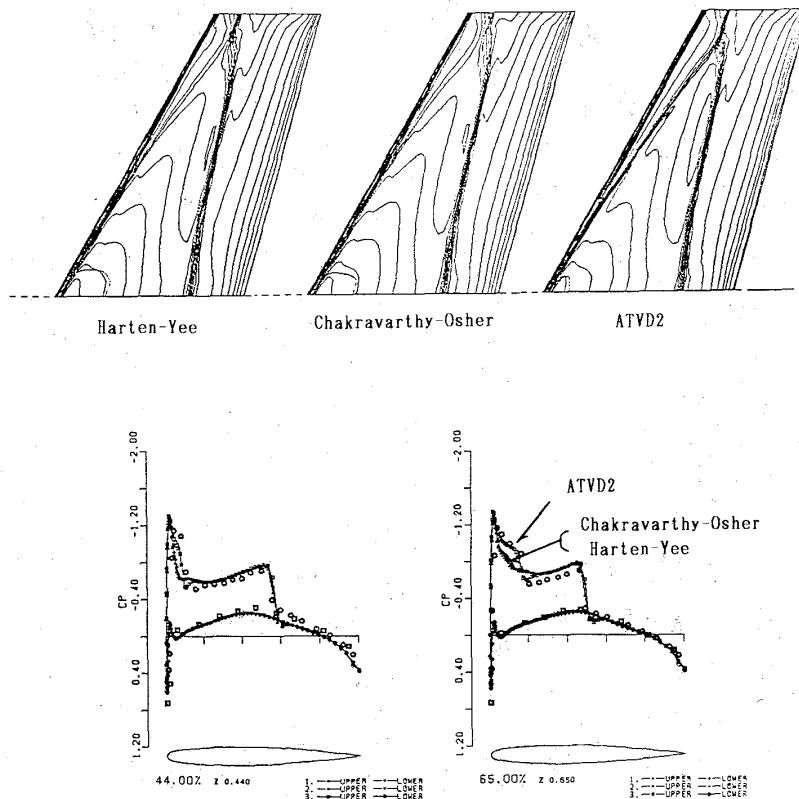


Fig.2 ACPなしの場合のCp分布比較

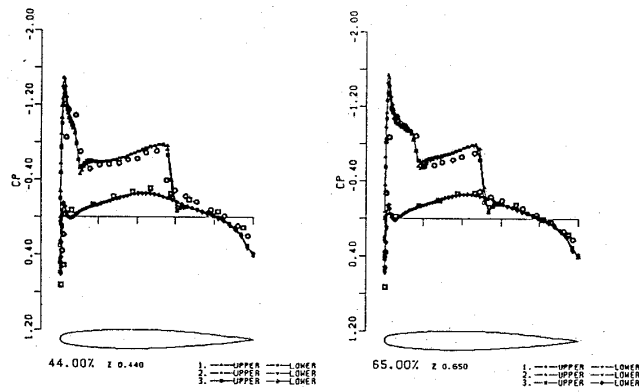
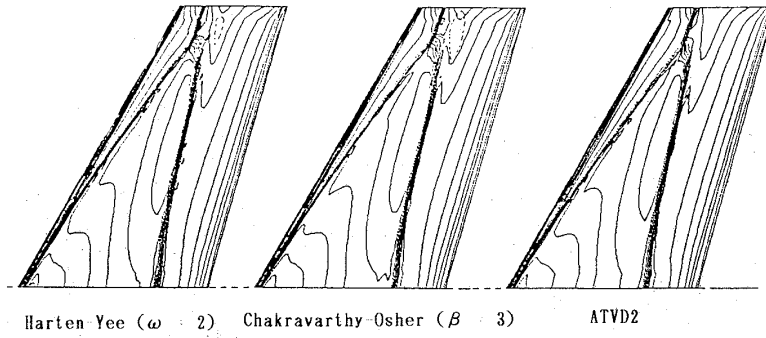


Fig.3 ACPの最適値を使った場合の $C_p$ 分布比較 (ATVD2はACPなし)

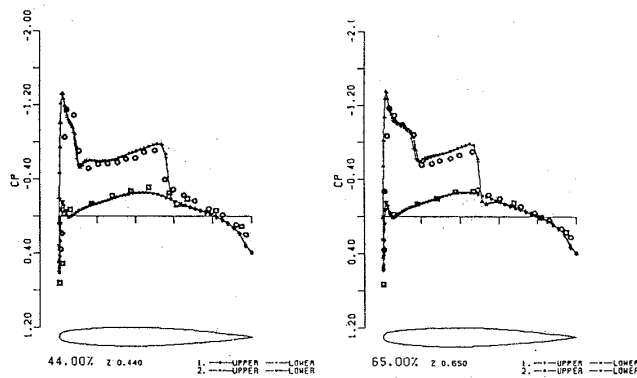
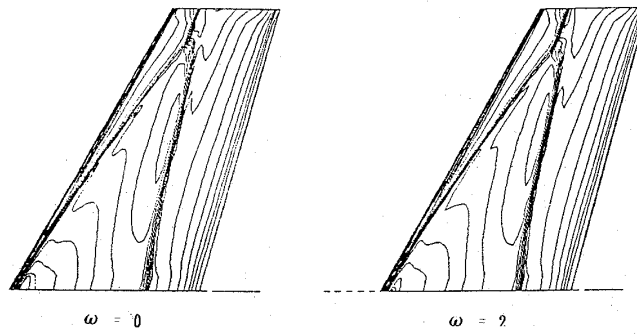


Fig.4 ATVD2におけるACPの違いによる解の変化

## 5. おわりに

我々はTVD2(UNO2)スキームに Harten の anti-dissipation を加える方法を適用しACPを使うことなしに鮮明な解をだすATVD2スキームを提案した。ONERA-M6の1ケースでの比較しか行わなかったがACPなしの結果がACPの最適値を使ったHarten-Yeeタイプ及びChakravarthy-OsherタイプのTVDスキームと殆ど一致することが示された。

計算結果を眺めると衝撃波の中に依然として計算点が2~3個入っている。これは計算格子に対し衝撃波が斜めに入っていることによると考えられ、有限体積法的取り扱いを含め様々な改良を試みたが解はあまり変わらなかった。多次元一般座標系における計算法についてもっと良い方法があるのではないかと思う。

## 参 考 文 献

- 1) A. Harten, J. Comp. Phys., 49 (1983), 357.
- 2) Y. Takakura, T. Ishiguro and S. Ogawa, Int. J. Num. Meth. Fluid (to appear)
- 3) T.H. Pulliam and D.S. Chaussee, J. Comp. Phys. 39 (1981), 347.
- 4) B. van Leer, J. Comp. Phys. 23 (1977), 263.
- 5) B. van Leer, J. Comp. Phys. 32 (1979), 101.
- 6) A. Harten and S. Osher, SIAM J. Num. Anal. 24 (1987), 279.
- 7) Y. Takakura, T. Ishiguro and S. Ogawa, AIAA paper 87-1151.
- 8) S.R. Chakravarthy and S. Osher, AIAA paper 85-0363.

