

圧縮性流れ解析における乱流モデルの検討

松尾 裕一* 齊藤 茂**

An Assessment of Turbulence Models in Compressible Viscous Flow Analysis

by

Yuichi MATSUO
University of Tokyo
 Shigeru SAITO
National Aerospace Laboratory

ABSTRACT

Recent advances in computational fluid dynamics in conjunction with both higher computer speed and more efficient numerical algorithm have made possible viscous computations of complicated flow fields. However, the accuracy of the prediction depends to a large extent upon the turbulence model used and deteriorates as the shock wave becomes stronger and eventually separates the boundary-layer. Special attention must be paid to the turbulence modeling in order to enhance the reliability of the computational approaches. In this study, three turbulence models are assessed for separated flows involving shock-wave/boundary-layer interactions. The models investigated consist of the algebraic model of Baldwin-Lomax, the one-equation model of Johnson-King and the two-equation model of Coakley. A comparison of computed and measured results indicates that the Johnson-King model has the best performance and that non-equilibrium types of turbulence models are essential for accurate prediction in transonic separated flow analysis.

1. はじめに

計算機性能の向上および計算法の進歩により流れの数値解析の技術は著しい発展を遂げた。特に圧縮性流れの分野では、TVDスキームの出現により安定な高精度計算が可能になり、3次元複雑流、高速流、反応流へと扱う対象は着実に広がっている。しかし、こと乱流計算となると、その実用的

重要さにもかかわらず相変わらず議論の余地が多い。計算結果に信頼性を期す最近の内外の要請¹⁾に答えるためには、乱流自身の解明もさることながら、乱流モデルの検討・整備が重要な課題であると考えられる。

圧縮性流れ解析では、現在までBaldwin-Lomaxモデルという乱流モデルの使用が圧倒的に多い。しかし、この代数モデルは元来付着流に対して定式化されたものなので、剥離流や3次元複雑流への適用には原理的に無理があり、最近その方面での欠陥や限界がしばしば指摘されている^{2,3)}。計算

* 東京大学大学院

** 航空宇宙技術研究所

法の改良と並行して、このモデルの見直しの必要性を感じる。とはいうものの、我々は他のモデルの使用経験が乏しいだけでなく、多種多様なモデルの中から適切な代替を選択する規範も欠いている。そこで、新しいモデルを云々する前に、既存の乱流モデルについてその特性、機能を各種流れ（特に剥離流れ）に対し詳細に検討把握し、独自の評価基準を確立する必要があるように思う。このような観点から本研究は、剥離を伴う遷音速流れの計算で代表的な圧縮性乱流モデルを検証することにより、既存のモデルに対してその特性に関わる有意な知見と実践的な選択の規範を得ることを目的としている。そして、結果として信頼できるモデル開発への有効な指針が得られれば好都合である。

2. 計算法

乱流輸送を広範に精度良く評価できる微分法による。簡単のため2次元問題に限定し、完全ガスのナビエ・ストークス方程式を乱流モデルとともに数値的に解き定常解を求める。

2.1 ナビエ・ストークス方程式

基礎保存式に質量加重平均および時間平均操作を施した後、レイノルズ応力項と乱流熱伝達項を渦粘性 μ_t と乱流プラントル数 Pr_t の導入によりモデル化すると直交座標系に対し時間平均式

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} = Re^{-1} \left(\frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} \right)$$

を得る。ここで

$$Q = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (e+p)u \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (e+p)v \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + q_x \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yy} \\ u\tau_{xy} + v\tau_{yy} + q_y \end{bmatrix}$$

また

$$p = (\gamma - 1) \left\{ e - \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2) \right\}$$

$$\tau_{ij} = (\mu + \mu_t) (u_{i,j} + u_{j,i}) - \frac{2}{3} \delta_{ij} u_{l,l} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \rho k$$

$$q_i = \left(\frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) \frac{c^2_{,i}}{\gamma - 1}$$

である。ただし、無次元化の仕方や諸量の定義用法は慣例⁴⁾に従う。

2.2 乱流モデル

本報告では、従来からの Baldwin-Lomax⁵⁾モデルと、比較的新しい Coakley⁶⁾, Johnson-King⁷⁾のモデルを取り上げ検討する。Baldwin-Lomaxモデルは圧縮性モデルの指標として採用した。また、Coakleyモデルは2方程式モデルの一員として選んだ。2方程式モデルは、経験関数を使わず、また乱れの移流拡散を考慮できる点で適用範囲が広く、剥離流れにもある程度有効であると言われる。一方、Johnson-Kingモデルは最近の注目度は大きいですが、不明瞭な部分やノウハウ的な側面も多分に見受けられるので、このモデルが本当に巧く機能するか否か追認する必要があると思取り上げた。以下に各モデルの内容を略述する。

Baldwin-Lomax モデル

付着流に対し良く整備されている Cebeci-Smith⁸⁾のモデルを基礎に境界層外端位置を陽に求めなくて済むように単純化した2層代数モデルである。

内層における渦粘性は混合長理論から

$$\mu_{ti} = \rho l^2 |\omega| Re$$

で与える。ここで、

$$l = \kappa y D,$$

$$D = 1 - \exp(-y^+/A^+),$$

ω は渦度である。 D は壁の影響を補正する。また、外層の渦粘性は

$$\mu_{to} = KC_{cp} \rho F_{max} y_{max} \gamma Re$$

として壁からの距離 y に無関係な一定値で与える。ここに、 F_{max} , y_{max} は

$$F(y) = y |\omega| [1 - \exp(-y^+/A^+)]$$

の最大値およびそのときの y である。また、

$$\gamma = [1 + 5.5 (C_{kleb} y / y_{max})^6]^{-1}$$

であり、定数は、

$$\kappa = 0.4, \quad A^+ = 26, \quad K = 0.0168, \quad C_{cp} = 1.6,$$

$$C_{kleb} = 0.3$$

Coakley モデル

有名な Jones-Launder⁹⁾ の $k-\epsilon$ モデルを基礎に、

圧縮流用にチューニングされた2方程式モデルである。

次の速度, 長さスケール $q (= \sqrt{k})$, $\omega (= \varepsilon/k)$ に関する輸送方程式を解く。

$$\frac{\partial \rho q}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j q}{\partial x_j} = Re^{-1} \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_q} \right) \frac{\partial q}{\partial x_j} \right\} + \frac{1}{2} \left\{ C_\mu f_\mu \frac{S}{\omega^2} - \frac{2D}{3\omega} - 1 \right\} \rho \omega q$$

$$\frac{\partial \rho \omega}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j \omega}{\partial x_j} = Re^{-1} \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\omega} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right\} + \left\{ C_1 \left(C_\mu \frac{S}{\omega^2} - \frac{2D}{3\omega} \right) - C_2 \right\} \rho \omega^2$$

ここで,

$$\mu_t = C_\mu f_\mu Re \frac{\rho q^2}{\omega}, \quad f_\mu = 1 - \exp(-0.0065 R_y),$$

$$R_y = \frac{\rho q y}{\mu} Re, \quad S = (u_{i,j} + u_{j,i}) u_{i,j} - \frac{2}{3} D^2,$$

$$D = u_{i,i}$$

である。また定数は,

$$\sigma_q = 1, \quad \sigma_\omega = 1.3, \quad C_\mu = 0.09, \quad C_1 = 0.045 + 0.405 f_\mu, \quad C_2 = 0.92$$

Johnson-King モデル

Bradshaw¹⁰⁾の対流輸送型1方程式モデルが基礎になっている。レイノルズ応力の発展方程式を解くという点では, 一種の応力モデルとみることもできる。ここでは我々の用いた方法に沿ってモデルの内容に触れる。

まず n (時間) ステップの渦粘性からレイノルズ応力 $\tau = -\overline{u'v'}$ を

$$\tau = \frac{\mu_t}{\rho} (u_y + v_x)$$

により算出した後, τ の最大値 τ_m , 最大を与える壁からの距離 y_m , その点での速度 V_m を各断面で求める。また, 特性距離 L_m を

$$L_m = \begin{cases} 0.4 y_m & y_m \leq 0.225 \delta \\ 0.09 \delta & y_m \geq 0.225 \delta \end{cases}$$

で与える。この下に次の g_m に関する流れ方向の常微分方程式を解く。

$$\frac{dg_m}{ds} = \frac{a_1}{2 Re^{1/2} V_m L_m} \left\{ 1 - \frac{g_m}{g_{m,eq}} \right\}$$

$$+ \frac{C_D L_m |1 - \sigma^{1/2}|}{a_1 \delta [0.7 - y_m/\delta]}$$

この結果 $n+1$ ステップでのレイノルズ応力の最大値 $\tau_m (= 1/g_m^2)$ が決まる。これを用いて渦粘性を, 内層では

$$\mu_{ti} = \rho \kappa y D^2 \tau_m^{1/2} Re^{1/2}$$

で与える。 D は壁の影響を補正する関数である。また外層では, まず

$$\frac{\rho_m \tau_m}{(u_y + v_x)_m} - (\mu_{to})_m \{ 1 - \exp(-(\mu_{ti})_m / (\mu_{to})_m) \} = 0$$

を解いて $(\mu_{to})_m$ を求め,

$$\sigma^{(n+1)} = \sigma^{(n)} \frac{(\mu_{to})_m^{(n+1)}}{(\mu_{to})_m^{(n)}}$$

により σ を更新した後,

$$\mu_{to} = \sigma \cdot \mu_{to,eq}$$

で与える。ここで添え字 eq は Baldwin-Lomax モデルから求めた量であることを表す。定数は,

$$a_1 = 0.25, \quad C_D = 0.5$$

2.3 スキーム

基礎式は一般座標系表示し, 差分法に基づき離散化して解く。時間積分は陰解法とする。空間差分として離散化式右辺の対流項には Chakravarthy-Osher¹¹⁾ の TVD スキームを, 粘性項には2次精度中心差分を用いる。左辺には対角化 ADI 法を用いる。Coakley モデルの輸送式も同様のスキームで解く。

3. 計算結果と考察

前述の3つの乱流モデルを, 衝撃波と境界層の干渉による剥離を含む流れの問題で検証した。強い干渉場での, 衝撃波位置や剥離に関する予測の正確さがモデル良否の鍵を握る。以下, Baldwin-Lomax, Coakley, Johnson-King の各モデルを B-L, q- ω , J-K と略記する。

3.1 NACA 0012 翼

最初の例は, 翼型まわりの流れで, 計算条件は, 一様流マッハ数 0.8, 迎角 2.26° , レイノルズ数 9×10^6 である。図1はマッハ数の等高線を示す。

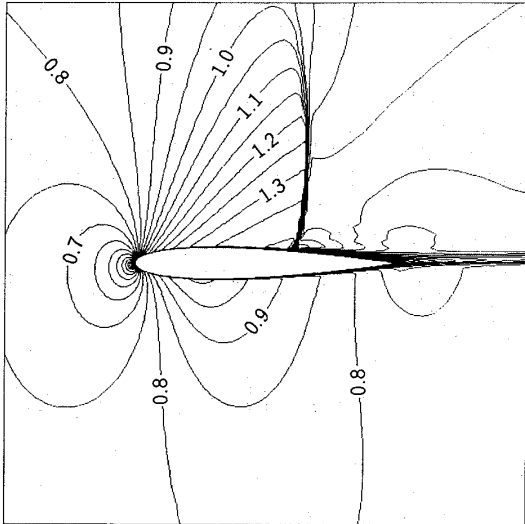


図1 NACA0012翼型まわりの等マッハ線図
($M_\infty=0.8$, $\alpha=2.26^\circ$, $Re=9\times 10^6$)

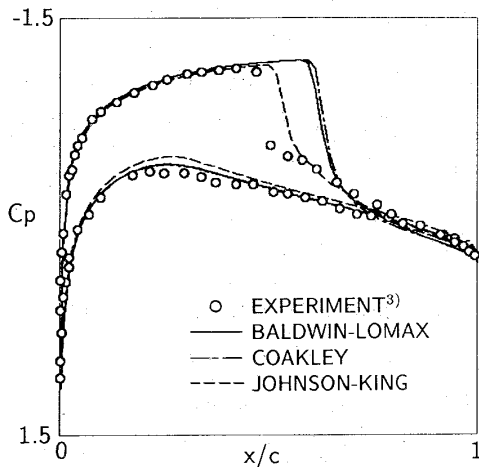


図2 NACA 0012翼面上の圧力係数分布
($M_\infty=0.8$, $\alpha=2.26^\circ$, $Re=9\times 10^6$)

背面に強い衝撃波が生じ、翼面境界層と干渉して後部に剥離域ができる。この流れは、AIAAの翼まわりの粘性流計算ワークショップ³⁾でも取り上げられ、J-Kモデルのみが衝撃波位置に関し実験との良い一致を与えることが報告された。図2は本計算による翼面圧力分布の実験との比較である。本計算においても、J-Kモデルは他のモデルとは対照的に、衝撃波を実験により近い位置に捕らえている。またJ-Kモデルは衝撃剥離による圧力回復の遅れもある程度再現している。図3は衝撃波付近の剥離の様子を比較したものであり、J-Kモデルは剥離を大きく捕らえている。

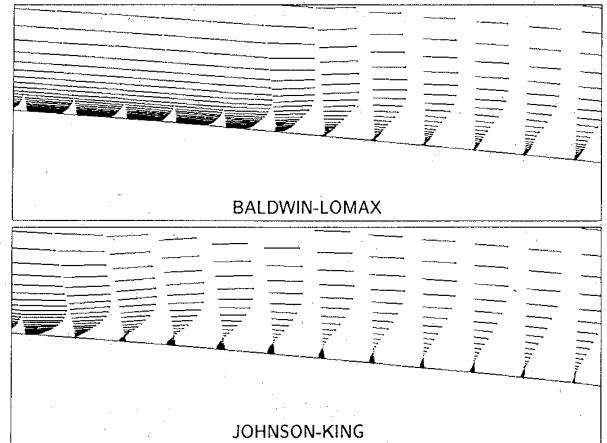


図3 剥離点付近の速度ベクトルの比較
($M_\infty=0.8$, $\alpha=2.26^\circ$, $Re=9\times 10^6$)

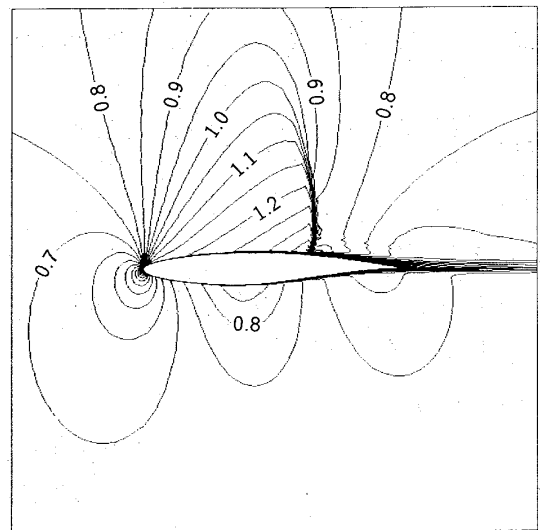


図4 RAE 2822翼型まわりの等マッハ線図
($M_\infty=0.75$, $\alpha=2.8^\circ$, $Re=6.2\times 10^6$)

3.2 RAE 2822 翼

次も翼型まわりの流れで、計算条件は、一様流マッハ数0.8、迎角 2.26° 、レイノルズ数 9×10^6 である。図4はマッハ数の等高線を示す。図5は翼面上の圧力分布を、図6は背面の摩擦係数の分布を計算と実験で比較したものである。この場合もJ-Kモデルの衝撃波の予測位置は他に比べて良い。

3.3 圧縮コーナー

最後は古典的な圧縮コーナーの問題である。角部に斜め衝撃波が生じ、その根元に強い逆圧力勾配のために剥離域ができる。図7はコーナー付近のマッハ数の等高線を示したものである。図8,9は、角付近の表面圧力と摩擦力の分布をプロット

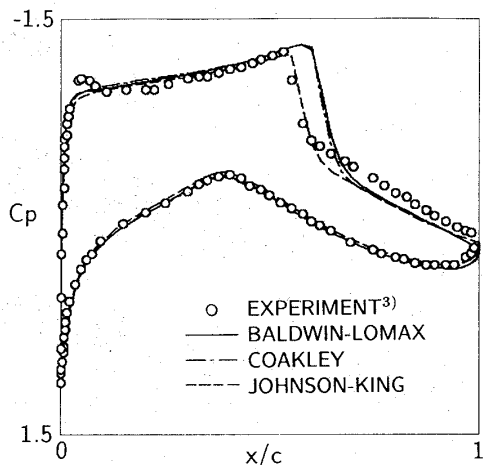


図5 RAE 2822 翼面上の圧力係数分布
($M_\infty=0.75$, $\alpha=2.8^\circ$, $Re=6.2 \times 10^6$)

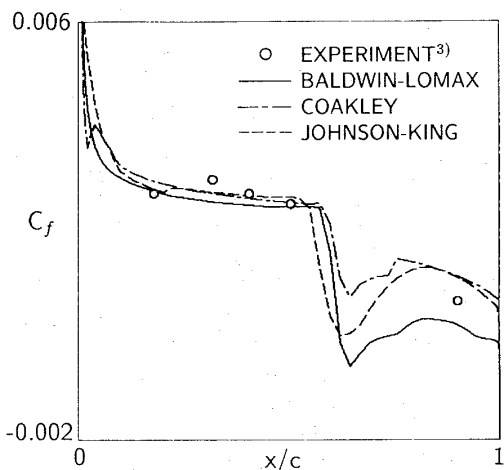


図6 RAE 2822 翼背面の摩擦係数分布
($M_\infty=0.75$, $\alpha=2.8^\circ$, $Re=6.2 \times 10^6$)

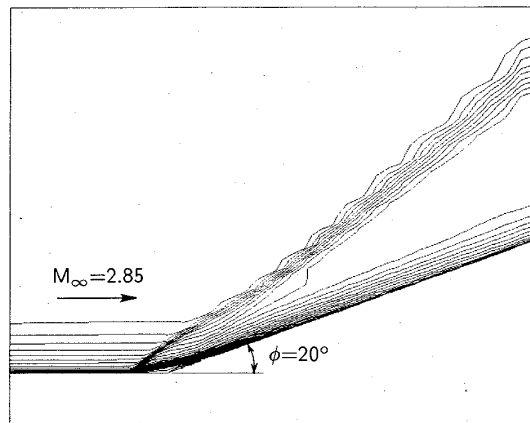


図7 圧縮コーナーの等マッハ線図
($M_\infty=2.85$, $\phi=20^\circ$, $Re=1.6 \times 10^6$)

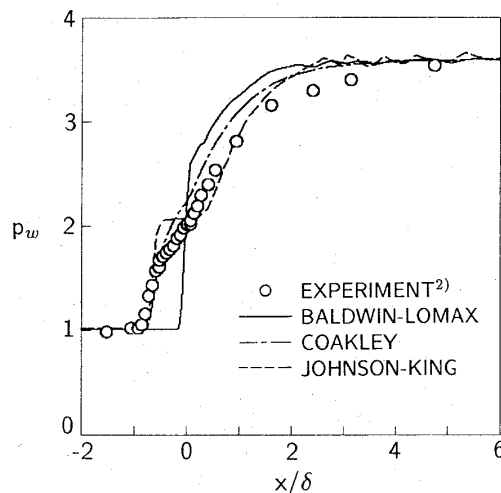


図8 コーナー付近の壁面圧力分布
($M_\infty=2.85$, $\phi=20^\circ$, $Re=1.6 \times 10^6$)

したものである。また図10は、角付近の剥離の様子を比較したものである。代数モデルに比し、J-K, q- ω という非平衡モデルの予測精度が良い。

3.4 まとめ

結果をまとめると、流れが付着している部分では各モデルの予測は大差なく総じて良いが、剥離が起こると違いが出ることがわかる。各モデルの特徴・問題点等について整理すると次のようになる。

- B-Lモデルは、簡単で計算時間は短いですが、剥離流れには精度が悪く、剥離域を過小評価する傾向にある。
- q- ω モデルは、剥離流れへの適用は可能ではあ

るが、期待されたほど（特に翼流れでは）予測精度は良くなかった。その原因として、i)壁近傍のモデル化が適切でない、ii)定数のチューニングが良くない、iii)勾配拡散仮説に問題がある、等が挙げられ改善の余地を残す結果となった。2方程式モデルの壁近傍の取扱いは壁法則を利用する場合も含めて流動的で、検討改良する必要がある。しかし、経験関数を使わないので3次元への拡張等も容易であり、今後このモデルの発展に期待できると思う。

- J-Kモデルは、計算時間が短いという代数モデルの利点を持ちつつ剥離流れにも精度が良い。対流輸送仮説がいいのか、応力モデル的取扱いがいいのか早急に結論は出せないが、従来のモ

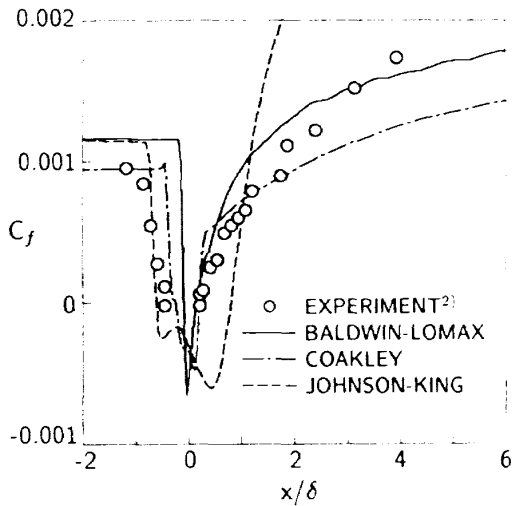


図9 コーナー付近の壁面摩擦係数分布
($M_\infty=2.85$, $\phi=20^\circ$, $Re=1.6 \times 10^6$)

デルに比べて顕著な改善が望めるという点で、将来的にも有望な存在である。しかし、経験関数による渦粘性や特性距離の指定という代数モデル的な弱点も合わせ持ち、一般的な流れへの拡張は必ずしも容易ではないようにみえる。目的、対象を限定した使用が最適であろう。また、他のモデルの改良への有効なヒントを与えてくれるかもしれない。

4. おわりに

圧縮性流れ（特に剥離流）に対する精度の良い乱流モデルを探る目的で、いくつかのモデルの検証を行った。今回検討した乱流モデルはごく限られたものであり検証例も少ないが、結果は各系列のモデルの特色を一面ではよく表していたように思う。複雑流に対し予測精度を期待するとき代数モデルではもはや限界に来ている。もっと性能の良い代替モデルを開発していくとすれば、汎用性、経済性等を考慮すると2方程式モデルの改良・整備が最も近道であるという印象を得た。

現時点での乱流研究が実用計算に寄与する割合が少ない以上、乱流モデルの使用は暫時避けられない。今後数値計算の用途が拡大し、かつ信頼性を要求されるようになれば、乱流モデルにかかる負担は今以上に大きくなるだろう。圧縮性流れでも信頼に足る乱流モデルの研究開発がもっと行われていいのではないかと思う。

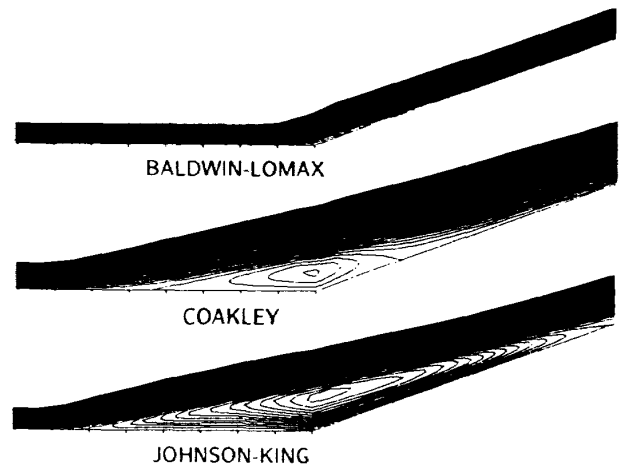


図10 コーナー付近の剥離域の比較
($M_\infty=2.85$, $\phi=20^\circ$, $Re=1.6 \times 10^6$)

参考文献

- 1) 藤井孝蔵: 数値流体力学: 最近の成果と動向, 日本航空宇宙学会誌, 第37巻, 第421号1989, pp. 30-38.
- 2) J.G. Marvin, "Turbulence Modeling for Computational Aerodynamics," AIAA Paper 82-0164, 1982.
- 3) T.L. Holst, "Viscous Transonic Airfoil Workshop Compendium of Results," AIAA Paper 87-1460, 1987.
- 4) D.A. Anderson, J.C. Tannehill and R.H. Pletcher, *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*, Hemisphere Publishing Corporation, 1984.
- 5) B.S. Baldwin and H. Lomax, "Thin-Layer Approximation and Algebraic Model for Separated Turbulent Flows," AIAA Paper 78-257, 1978.
- 6) T.J. Coakley, "Turbulence Modeling Methods for Compressible Navier-Stokes Equations," AIAA Paper 83-1693, 1983.
- 7) D.A. Johnson and L.S. King, "A Mathematically Simple Turbulence Closure Model for Attached and Separated Turbulent Boundary Layers," *AIAA Journal*, Vol. 23, Nov., 1985. pp. 1684-1692.

- 8) T. Cebeci, K. Kaups, and J.A. Ramsey, "A General Method for Calculating Three-Dimensional Compressible Laminar and Turbulent Boundary Layers on Arbitrary Wings," NASA CR-2777, 1977.
- 9) W.P. Jones and B.E. Launder, "The Prediction of Laminarization with a Two-Equation Model of Turbulence," *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 15, 1972, pp. 301-314.
- 10) P. Bradshaw, D.H. Ferris, and N.P. Atwell, "Calculation of Boundary-Layer Development Using the Turbulent Energy Equation," *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 28, 1967, pp. 593-616.
- 11) S.R. Chakravarthy and S. Osher, "A New Class of High Accuracy TVD Schemes for Hyperbolic Conservation Laws," AIAA Paper 85-0363, 1985.

