

有限体積型TVDスキームを用いた 圧縮性ナビエ・ストークス方程式の複合格子解法

古川 雅人* 山崎 政男* 井上 雅弘*

A Zonal Approach for Solutions to the Compressible Navier-Stokes Equations Using a TVD Finite Volume Method

by

Masato FURUKAWA, Masao YAMASAKI and Masahiro INOUE
Department of Mechanical Engineering for Power, Kyushu University

ABSTRACT

A new zonal approach for the computation of compressible viscous flows has been developed. In the present approach, a highly accurate TVD, finite volume formulation with the composite zonal grid system is implemented in order to produce a Navier-Stokes solver with robustness and high accuracy. The emphasis in this paper is on the treatment of the zonal boundary. In the present zonal approach, the zonal boundary is constructed of interfaces of computational cells, and the communication from one zone to the other is accomplished by numerical fluxes across the zonal boundary. The complete conservation of the fluxes at the zonal boundary can be satisfied by directly evaluating the fluxes using the finite volume formulation and by ensuring the uniqueness of the zonal boundary between two zones.

1. 緒 言

複雑な境界形状をもった流れ場を解析する場合、単一の構造型格子系を採用すると、格子の歪みが大きく、計算精度が低下するばかりでなく、格子生成すら困難となることがある。この問題を解決するには、流れ場を複数の領域に分割して各領域で独立に格子を生成し、領域毎に流れ場を解く領域分割法の導入が考えられる。領域分割法は、重合格子法 (Overlaid grid approach)¹⁾と複合格子法 (Composite grid approach)²⁻⁴⁾に大別される。いずれの方法においても領域境界 (Zonal boundary)

と呼ばれる領域間の境界の処理が重要であり、その処理方法として、重合格子での内挿処理に関する Chimera 法¹⁾、領域境界上での流束に着目した差分法に対する Rai の方法²⁾、局所的な一次元の特性曲線法によりリーマン不変量を介して領域境界上の物理量を求める方法³⁾、差分法と有限要素法を併用した方法⁴⁾などが提案されている。このうち、Rai の方法のみにおいて領域境界での流束の保存性が考慮されているが、Rai の方法では空間離散化法として差分法が用いられているため、流束の保存性が厳密には満たされておらず、領域境界で誤差が生じる。

本報では、圧縮性ナビエ・ストークス方程式に対する高精度の複合格子解法として有限体積型

* 九州大学工学部動力機械工学科

TVD法を用いた新しい解法を提案する。本解法では、空間離散化法として有限体積法を用いることにより、領域境界上での数値流束の保存性を厳密に満足させる。

2. 有限体積型 TVD 法

2.1 有限体積法

二次元の時間平均ナビエ・ストークス方程式を無次元化された積分形で記述すると、次式を得る。

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} Q d\Omega + \int_{\partial\Omega} HdS = \frac{1}{Re} \int_{\partial\Omega} RdS \quad (1)$$

ここで、 Q 、 H 及び R はそれぞれ保存量、非粘性流束及び粘性流束から成るベクトルを表し、 Re はレイノルズ数である。四辺形セルを用いた Cell-Centered法により離散化すると、式(1)は次のように表せる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (A_{i,j} Q_{i,j}) &= (SF)_{i,j-\frac{1}{2}} + (SF)_{i+\frac{1}{2},j} \\ &+ (SF)_{i,j+\frac{1}{2}} + (SF)_{i-\frac{1}{2},j} \end{aligned} \quad (2)$$

ただし、 $F = -H + R/Re$ であり、 $A_{i,j}$ はセル面積、 $S_{i+\frac{1}{2},j}$ 等はセルの辺の長さである。

2.2 非粘性流束

非粘性流束 $H_{i+\frac{1}{2},j}$ は以下の projection stage 及び evolution stage から構成される MUSCL 法に基づいた高次精度の TVD スキームにより評価される。

2.2.1 Projection Stage

各計算セルにおいて、セル境界上での物理量の値 $Q_{i+\frac{1}{2},j}^-$ 及び $Q_{i+\frac{1}{2},j}^+$ を次式⁵⁾に従って外挿する。

$$Q_{i+\frac{1}{2},j}^- = Q_{i,j} + \{0.25s[(1-\kappa s) \Delta_- + (1+\kappa s) \Delta_+]\}_{i,j} \quad (3)$$

$$Q_{i+\frac{1}{2},j}^+ = Q_{i,j} - \{0.25s[(1-\kappa s) \Delta_+ + (1+\kappa s) \Delta_-]\}_{i,j} \quad (4)$$

ここで

$$(\Delta_+)_{i,j} = Q_{i+1,j} - Q_{i,j} \quad (5)$$

$$(\Delta_-)_{i,j} = Q_{i,j} - Q_{i-1,j} \quad (6)$$

$$s = (2\Delta_+ \Delta_- + \epsilon) / [(\Delta_+)^2 + (\Delta_-)^2 + \epsilon] \quad (7)$$

ただし、 $\epsilon = 10^{-6}$ 。また、 $\kappa = -1$ のとき二次精度、 $\kappa = 1/3$ のとき三次精度となり、本報では $\kappa = 1/3$

とした。なお、 j 方向の projection も式(3)~(7)と同様に行う。

2.2.2 Evolution Stage

Projection stage において外挿されたセル境界を挟む二つの状態 $Q_{i+\frac{1}{2},j}^-$ 及び $Q_{i+\frac{1}{2},j}^+$ の時間発展の解を、リーマン問題を解くことにより求め、その解からセル境界での非粘性流束を評価する。本解法では、Roeの近似リーマン解法⁶⁾を用いて非粘性流束を求める。

2.3 粘性流束

粘性流束を求めるためには、セル境界における速度及び音速の一階微分値を評価する必要がある。本解法では、これらの一階微分値を Green の定理を適用して中心差分的⁸⁾に求める。

2.4 時間積分法

式(2)を時間に関して積分することによって、漸近的に定常解を求める。本報では、時間積分法として3段階ルンゲ・クッタ法⁹⁾を用いた。

2.5 境界条件

計算領域の境界上での流束を内部セルの界面での流束と同様に評価するために、境界の外側に仮想セルを設定する。

固体壁境界では、圧力以外の非粘性流束を零とする。固体壁上の圧力は隣接する内部セル ($i, 1$) 上の圧力と等しくおく。固体壁境界での粘性流束は、仮想セルの導入により内部セルと同様に 2.3 で述べた方法に従って評価される。滑りなしの条件及び断熱条件を規定するために、固体壁に隣接する仮想セル ($i, 0$) 上の物理量を次のように与える。

$$\begin{aligned} u_{i,0} &= -u_{i,1}, \quad v_{i,0} = -v_{i,1} \\ \rho_{i,0} &= \rho_{i,1}, \quad e_{i,0} = e_{i,1} \end{aligned} \quad (8)$$

流入及び流境界においては、境界条件に対応した物理量を仮想セルに与え、内部セルの界面と同様にして非粘性及び粘性流束を求める。流入境界上の仮想セルには上流状態を与え、流境界上の仮想セルでは圧力を与え密度及び速度の二成分を隣接する内部セルのそれらと等しくおく。

3. 領域境界条件

3.1 領域境界の一意性

図1のような複合格子系を考える。複合格子の場合、領域ごとに四角形セルが定義されるため、図1に示すように領域境界が直線でない場合、各領域で独立に定義される領域境界は互いに一致せず、領域間でセルが重なったり、あるいは離れたりしている。この事を避けるために、一方の領域で与えられる境界を二つの領域間に共通した領域境界として定義する。すなわち、図1の場合、領域境界は領域1の境界により一意に定義されている。その結果、領域2においてこの領域境界に接するセル $(i, 1)$ に着目すると、その面積は四角形 $ABCD$ ではなく、多角形 $P_0^{(2)} P_1^{(2)} P_2^{(2)} P_3^{(2)} BC$ の面積として求められ、さらに辺 $(i-1/2, 1)$ の長さ $S_{i-1/2, 1}$ は線分 CD ではなく線分 $CP_0^{(2)}$ の長さとして計算される。この領域境界の一意性は、領域境界上での流束の保存性を満足させるために必要なことである。

領域境界に接するセルを“領域境界セル”と呼ぶことにする。さらに、領域境界を内部セルの界面と同様に扱うために、各領域境界の外側に仮想セルを設ける。

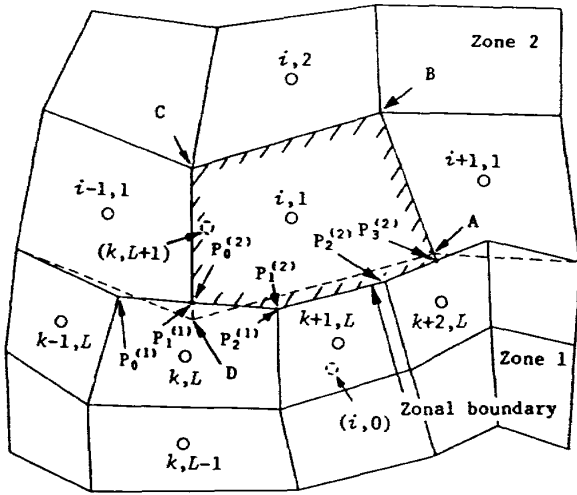


図1 複合格子における領域境界

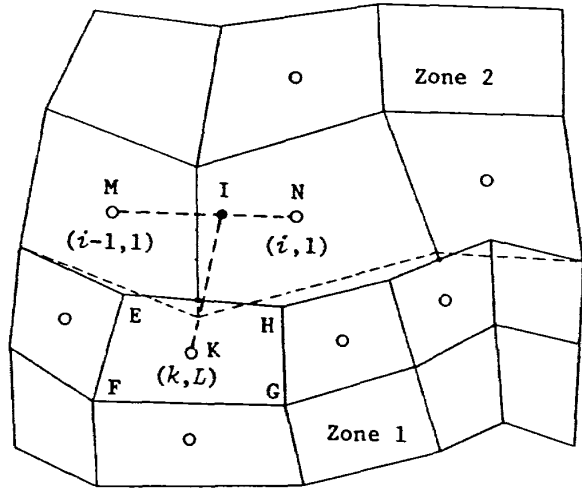


図2 領域境界上の仮想セルに対する内挿

3.2 領域境界における非粘性流束

3.2.1 領域境界での projection

図1で、領域1の領域境界セル (k, L) に対して projection を行うためにはセル $(k, L+1)$ における物理量の値 $Q_{k, L+1}^{(1)}$ が既知でなければならないが、セル $(k, L+1)$ は仮想セルであるので、図2に示すような内挿点 I を求め、次式に従って $Q_{k, L+1}^{(1)}$ を内挿する。

$$Q_{k, L+1}^{(1)} = \frac{l_N Q_{i-1, 1}^{(2)} + l_M Q_{i, 1}^{(2)}}{l_M + l_N} \quad (9)$$

ここで、 $l_M = IM$, $l_N = IN$ であり、図2の内挿点 I は、領域2側のセル重心 M と N を結ぶ直線とセル (k, L) の重心 K から次式で与えられる方向に延長した直線との交点として定義される。

$$\vec{KI} \parallel \vec{KI} = (\vec{FE} + \vec{GH}) / |\vec{FE} + \vec{GH}| \quad (10)$$

記号の右肩に付記した(1)及び(2)はそれぞれ領域1及び2に対する値であることを示す。

3.2.2 領域境界での evolution

前述のように図1の場合、領域境界は領域1の計算セルの辺で定義されているので、領域境界における evolution は領域1の領域境界セルに着目して行う。図1の領域境界セル (k, L) の辺 $(k, L+1/2)$ に対して evolution を行うためには極限值 $Q_{k, L+1/2}^{+(1)}$ を必要とするが、この極限值は領域2上で定義される値であるので、領域2の領域境界セル $(i-1, 1)$ 及び $(i, 1)$ に対する projection で得られた極限值 $Q_{i-1, 1/2}^{+(2)}$ 及び $Q_{i, 1/2}^{+(2)}$ を用いて次式に従って $Q_{k, L+1/2}^{+(2)}$ を内挿する。

$$Q_{k, L+1/2}^{+(1)} = \sum_{m=1}^{M_k^{(1)}} (W_k^{(1)})_m \cdot Q_{i_0^{(k)}+m-1, 1/2}^{+(2)} \quad (11)$$

ここで $(W_k^{(1)})_m$ は次式で定義される内挿係数であり、 $i_0(k)$ は領域1の領域境界セル (k, L) の節点 $P_0^{(1)}$ が接する領域2のセル番号(図1の場合 $i_0(k) = i-1$)、 m はセル (k, L) において線分 $P_m^{(1)} P_{m-1}^{(1)}$ に付けた局所番号、 $M_k^{(1)}$ はその線分の数である。

$$(W_k^{(1)})_m = P_m^{(1)} P_{m-1}^{(1)} / S_{k, L+1/2}^{(1)} \quad (12)$$

$$S_{k, L+1/2}^{(1)} = \sum_{m=1}^{M_k^{(1)}} P_m^{(1)} P_{m-1}^{(1)} \quad (13)$$

式(11)から求まる $Q_{k, L+1/2}^{+(1)}$ と projection で求められた極限值 $Q_{k, L+1/2}^{-(1)}$ に対して近似リーマン解法を適用して辺 $(k, L+1/2)$ 上の非粘性流束 $H_{k, L+1/2}^{(1)}$ を求め、この流束を領域境界における非粘性流束として定義する。

3.3 領域境界における粘性流束

領域境界上の粘性流束は、非粘性流束と同様に領域1の領域境界セル (k, L) に着目して求める。3.2.1 で述べたように、領域境界上の仮想セル $(k, L+1)$ には領域2から内挿された物理量の値が定義されているので、領域境界セルと仮想セル上の物理量 Q から2.3 で述べた方法に従って、領域境界上の辺 $(k, L+1/2)$ における粘性流束 $R_{k, L+1/2}^{(1)}$ を求める。

3.4 領域境界における流束の保存性

図1の領域1の領域境界セル (k, L) において、領域境界を構成する辺 $(k, L+1/2)$ 上の非粘性流束及び粘性流束から成る数値流束 $F_{k, L+1/2}^{(1)}$ は3.2 及び3.3 で述べた手順に従って求められるので、式(2)をそのまま適用できる。一方、領域2の領域境界セル $(i, 1)$ において、領域境界に接する辺 $(i, 1/2)$ 上の数値流束 $F_{i, 1/2}^{(2)}$ は直接に評価されていないので、境界条件として与えられる必要がある。本解法では、領域1の領域境界セルの辺 $(k, L+1/2)$ で求められている流束 $F_{k, L+1/2}^{(1)}$ を用いて、領域境界での流束の保存性が満たされるように流束 $F_{i, 1/2}^{(2)}$ を内挿する。すなわち、図3に示すように、流束 $F_{k, L+1/2}^{(1)}$ が各辺上で一様であると仮定し、 $(SF)_{i, 1/2}^{(2)}$ の値を図3の斜線を施された部分の面積に等しいとおくことにより、流束 $F_{i, 1/2}^{(2)}$ を内挿する。その手順は次のようになる。

DO $k=1, K$; DO $m=1, M_k^{(1)}$

$i = \text{Table}^{(1)}(k, m)$

$$(SF)_{i, 1/2}^{(2)} = (SF)_{i, 1/2}^{(2)} - (W_k^{(1)})_m \cdot (SF)_{k, L+1/2}^{(1)} \quad (14)$$

DO END

ただし、 $\text{Table}^{(1)}(k, m)$ は領域1の領域境界セル (k, L) における線分 $P_m^{(1)} P_{m-1}^{(1)}$ が接する領域2の領域境界セルの番号 i を与えるテーブルである。

4. 数値計算例

二次元タービン翼列¹⁰⁻¹²⁾の遷音速流れ解析に本複合格子解法を適用した結果について述べる。計算格子を図4に示す。格子はC型格子であるが、周期境界上で格子点は一致しておらず、周期境界を領域境界として扱った。本計算条件を表1にまとめている。

各計算条件に対する計算結果の等密度線図及び

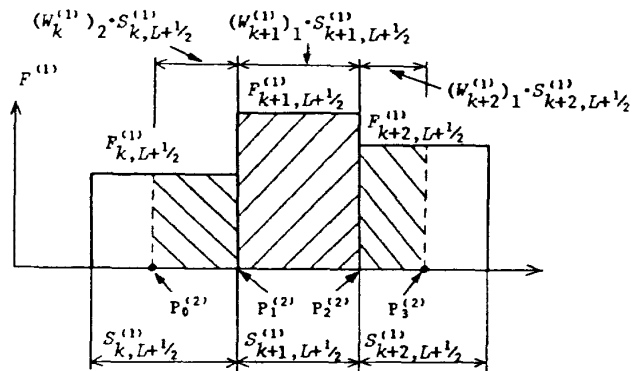


図3 領域境界での流束の保存性

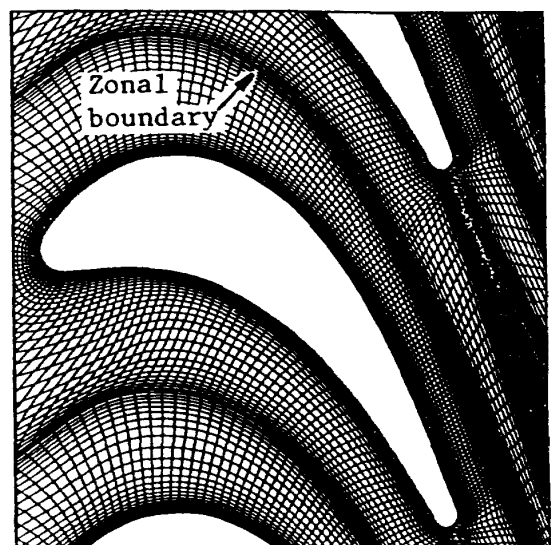
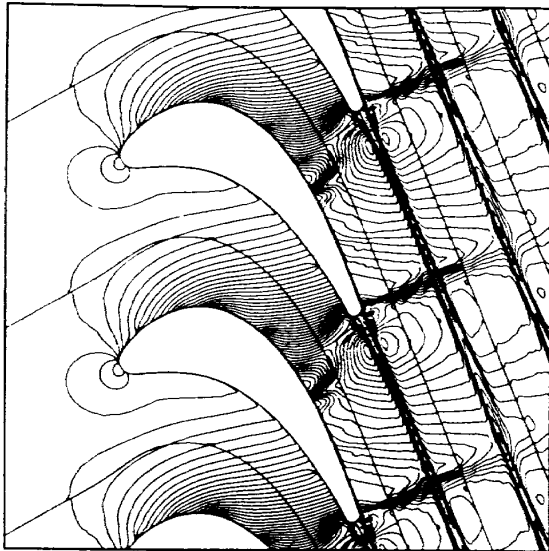


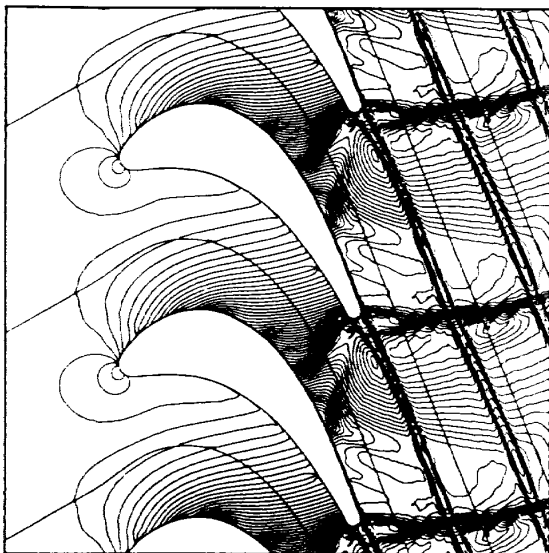
図4 計算格子

表1 計算条件

	Case 1	Case 2
Reynolds number	7.8×10^6	9.0×10^6
Inlet flow angle	30°	30°
Inlet Mach number	0.268	0.270
Isentropic exit Mach number	0.985	1.11

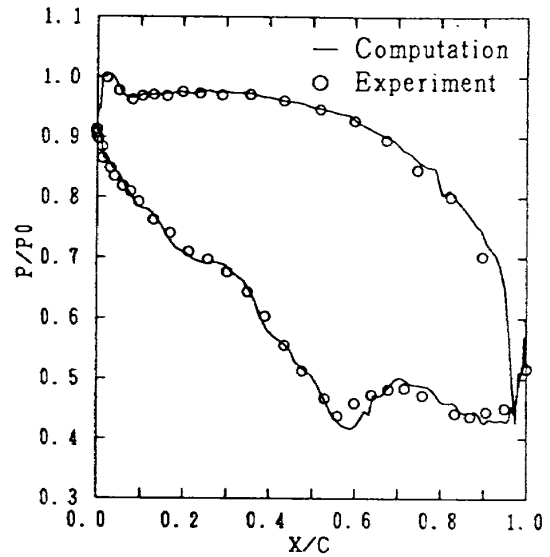


(a) Case 1

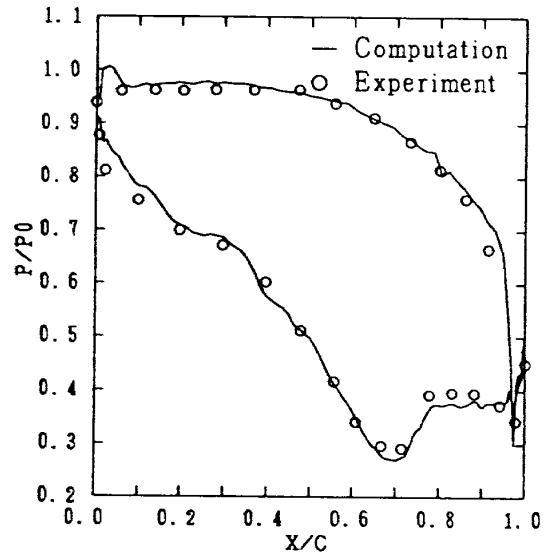


(b) Case 2

図5 等密度線図



(a) Case 1



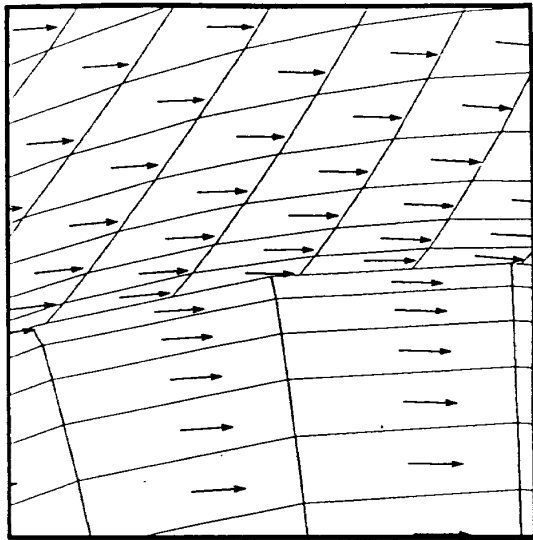
(b) Case 2

図6 翼面圧力分布

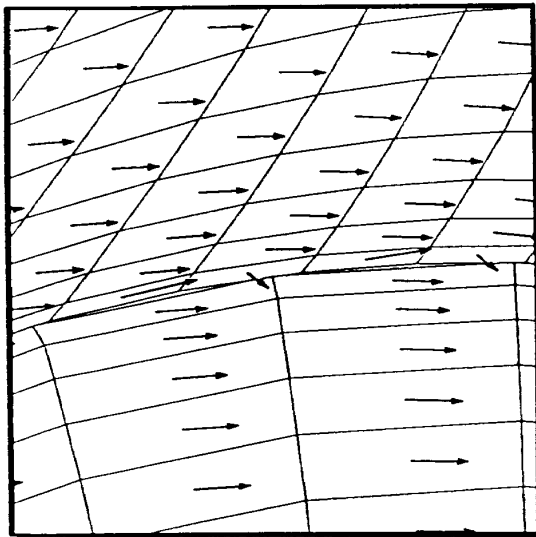
衝撃波は滑らかに伝播していることが分かる。衝撃波が領域境界に現れても、計算の不安定性は生じなかった。また、翼面圧力分布は実験結果とよく一致しており、定量的にも流れ場を精度良くシミュレートできていることが分かる。

3.1で述べた領域境界の一意性を考慮した場合と無視した場合の領域境界部における速度ベクトルを図7に示す。一意性を無視した場合、領域境界上で誤差が生じており、領域境界を設定する位置によって解が変わることが示唆される。このように領域境界の一意性は複合格子法において重要な問題である。

翼面圧力分布をそれぞれ図5及び図6に示す。図6において、実線は本計算結果、シンボルは実験結果である。等密度線図によると、後縁衝撃波が領域境界を横切っているが、領域境界においても



(a) 領域境界の一意性考慮



(b) 領域境界の一意性無視

図7 領域境界部の速度ベクトル

5. 結 言

圧縮性ナビエ・ストークス方程式の複合格子解法として有限体積型 TVD 法を用いた新しい解法を提案した。本解法では、Rai の方法と同様に領域間の流束に着目して領域境界を取り扱うが、有限体積法を用いて計算セル界面の流束を直接評価することにより、さらに領域境界の一意性を規定して領域境界を計算セルの界面で一意に定義することにより、領域境界上での流束の保存性を厳密に満足させる。その結果、本複合格子解法は複雑な流れ場に対しても領域境界上での誤差が少なく高精度であることが分かった。

参 考 文 献

- 1) J.A. Benek, ほか 2 名, AIAA Paper 85-1523CP (1985).
- 2) M.M. Rai, AIAA Paper, 84-0164 (1984).
- 3) R.H. Bush and St. L. Missouri, AIAA Paper, 85-1521CP (1985).
- 4) K. Nakahashi and S. Obayashi, AIAA Paper, 87-0604 (1987).
- 5) W.K. Anderson, ほか 2 名, AIAA Paper, 85-0122 (1985).
- 6) P.L. Roe, J. Comp. Phys., 143 (1981), 353.
- 7) S.R. Chakravarthy, AIAA Paper, 86-0243. (1986).
- 8) R. Peyret and T.D. Taylor, Computational Methods for Fluid Flow, Springer-Verlag (1983), 108.
- 9) A. Jameson and V. Venkatakrishnan, AIAA Paper, 85-1514CP (1985).
- 10) R. Koick, ほか 3 名, Trans. ASME, J. Engng. GT & Power, 108-2 (1986), 277.
- 11) C.H. Sieverding, VKI LS 59 (1973).
- 12) F. Lehthaus, VDI-Forsch.-Heft 586 (1978), 5.